BURHAN

Résumé : Espaces vectoriels réels

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/resume

Chapitre	Semestre
Espaces vectoriels réels	Semestre 2

Espace vectoriel réel et règles de calcul

À retenir : Deux opérations, une liste d'axiomes

Un espace vectoriel réel, c'est un ensemble où l'on sait additionner deux éléments et multiplier un élément par un réel. L'addition fait de E un groupe commutatif. Quatre axiomes relient ensuite les deux opérations. Dans un calcul, nomme l'axiome ou la règle à chaque transformation.

Définition : Espace vectoriel réel

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une **loi de composition externe** à coefficients réels, notée $\cdot$: c'est une application qui, à tout réel α et à tout élément u de E, associe un élément $\alpha \cdot u$ de E.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel réel** si :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est noté 0_E et où le symétrique de u est noté $-u$;
- pour tous réels α et β et tous éléments u et v de E :

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v,$$
$$(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u,$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u,$$
$$1 \cdot u = u.$$

Les éléments de E s'appellent des **vecteurs**, les réels des **scalaires**, et 0_E le **vecteur nul**. On écrit souvent αu pour $\alpha \cdot u$, et $u - v$ pour $u + (-v)$.

Propriété : Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel. Pour tous réels α et β et tous vecteurs u et v de E :

- $0 \cdot u = 0_E$ et $\alpha \cdot 0_E = 0_E$;
- $(-1) \cdot u = -u$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ et $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$;
- $\alpha u = 0_E$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

Exemple

Énoncé. Dans un espace vectoriel réel E, simplifie $w = 2(3u - v) - 5(u - v)$, puis résous $6x + v = x - 4v$, d'inconnue $x \in E$.

Simplifier. Par les règles de calcul (F02) et l'axiome $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, puis en regroupant dans le groupe commutatif $(E, +)$:

$$\begin{aligned} w &= 6u - 2v - 5u + 5v \\ &= (6 - 5)u + (5 - 2)v \\ &= u + 3v. \end{aligned}$$

Résoudre. On ajoute $-x - v$ aux deux membres : $5x = -5v$. On multiplie par le réel $\frac{1}{5}$: $x = -v$. Ces opérations sont réversibles : c'est l'unique solution.

Attention : Le réel zéro n'est pas le vecteur nul

Dans l'égalité $0 \cdot u = 0_E$, deux zéros différents se côtoient : à gauche un nombre réel, à droite un vecteur.

Le vecteur nul change avec l'espace : $(0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$, la matrice O dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto 0$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Écrire « $u = 0$ » pour un triplet est une faute de type.

Les espaces de référence

Propriété : Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit, pour tous couples (x, y) et (x', y') et tout réel α :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Alors $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel ; son vecteur nul est $(0, 0)$ et $-(x, y) = (-x, -y)$.

De même, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, muni des opérations composante par composante, est un espace vectoriel réel, de vecteur nul $(0, 0, 0)$.

Propriété : Les espaces vectoriels $\mathbb{C}$, $\mathbf{M_2(\mathbb{R})}$ et $\mathbf{M_3(\mathbb{R})}$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, où $\alpha \cdot z$ est le produit du réel α par le nombre complexe z, est un espace vectoriel réel, de vecteur nul 0.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munis de l'addition des matrices et du produit d'une matrice par un réel, sont des espaces vectoriels réels, de vecteur nul la matrice nulle O.

Propriété : Espace vectoriel des fonctions définies sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs réelles. Pour f et g dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et α réel, on définit $f+g$ et $\alpha\cdot f$ par : pour tout $x\in I$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

et

$$(\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x).$$

Alors $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel ; son vecteur nul est la fonction nulle sur I, et $-f$ est la fonction $x\mapsto -f(x)$.

Couples et triplets : opérations composante par composante

$$0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)\qquad 0_{\mathbb{R}^3}=(0,0,0)$$

Nombres complexes, multipliés par un réel

$$0_{\mathbb{C}}=0\qquad \alpha\cdot(a+ib)=\alpha a+i\,\alpha b$$

Matrices carrées d'ordre 2 ou 3 : coefficient par coefficient

$$0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}=O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Fonctions définies sur l'intervalle I : point par point, pour tout x de I

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x)$$

Remarque

Dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, deux fonctions sont égales si elles prennent la même valeur en **chaque** point de I. Pour prouver une égalité de fonctions, raisonne pour un x quelconque de I. Pour prouver que deux fonctions diffèrent, une seule valeur de x suffit.

Sous-espaces vectoriels

Définition : Sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est stable pour $+$: pour tous u et v dans F, $u+v\in F$;
- F est stable pour $\cdot$: pour tout réel α et tout u dans F, $\alpha u\in F$;
- F, muni des lois induites, est un espace vectoriel réel.

Théorème : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel réel et F une partie de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$;
- pour tous vecteurs u et v de F et tous réels α et β, $\alpha u + \beta v \in F$.

En particulier, une partie de E qui ne contient pas 0_E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Méthode : montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel

1. **Inclusion et vecteur nul.** Rappelle que F est une partie de E ; vérifie que le vecteur nul **de** E satisfait la condition qui définit F.
2. **Deux vecteurs, deux réels.** Prends u et v dans F, α et β réels ; écris ce que leur appartenance à F signifie.
3. **Calcul.** Montre que $\alpha u + \beta v$ satisfait encore cette condition.
4. **Conclusion.** Cite la caractérisation (F07).

Rédaction : « $0_E \in F$; soit $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$… donc $\alpha u + \beta v \in F$; d'après la caractérisation, F est un sous-espace vectoriel de E ».

Exemple

Énoncé. Montre que $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) + f(2) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Vecteur nul. La fonction nulle donne $0 + 0 + 0 = 0$: elle est dans F.

Combinaison. Soit f, g dans F et α, β réels. Pour $h = \alpha f + \beta g$, on a $h(k) = \alpha f(k) + \beta g(k)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. Donc :

$$\begin{aligned} &h(0) + h(1) + h(2) \\ &= \alpha\big(f(0) + f(1) + f(2)\big) \\ &\quad + \beta\big(g(0) + g(1) + g(2)\big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car f et g sont dans F.

Conclusion. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels (F07), F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Méthode : montrer qu'une partie n'est pas un sous-espace

1. **Test du vecteur nul.** S'il n'appartient pas à F, c'est fini : la caractérisation (F07) interdit à F d'être un sous-espace.
2. **Sinon, un contre-exemple chiffré.** Deux vecteurs de F dont la somme sort de F, ou un vecteur de F et un réel dont le produit sort de F.

3. **Écris tout** : les vecteurs choisis, la preuve qu'ils sont dans F, le calcul qui sort de F.

Rédaction : « $u = \cdots \in F$, mais $(-1)u = \ldots \notin F$: F n'est pas stable par produit, ce n'est pas un sous-espace vectoriel ».

Exemple

Énoncé. La partie $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ est-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Vecteur nul. $0 \geq 0^2$: $(0, 0) \in H$, le test ne conclut pas.

Contre-exemple. $(1, 1) \in H$, car $1 \geq 1^2$. Mais $(-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1)$, et $-1 < (-1)^2$: ce vecteur n'est pas dans H.

Conclusion. H n'est pas un sous-espace vectoriel.

Attention : Le vecteur nul est nécessaire, pas suffisant

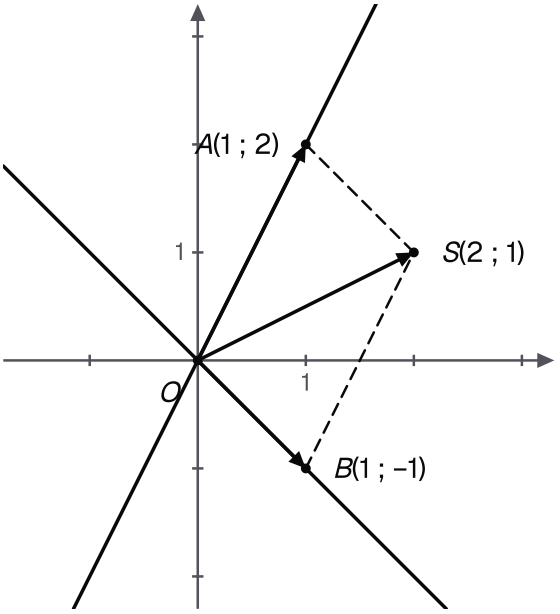
Si $0_E \notin F$, la question est réglée. Mais la présence du vecteur nul ne prouve rien.

La partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3\}$ contient $(0, 0)$ et $(1, 1)$, mais pas $2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$, puisque $2^3 = 8$. Après le vecteur nul, il faut toujours la condition sur $\alpha u + \beta v$.

Attention : Réunion de deux sous-espaces

Les droites $\mathrm{Vect}\big((1, 2)\big)$ et $\mathrm{Vect}\big((1, -1)\big)$ sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$. Leur réunion contient $(1, 2)$ et $(1, -1)$, mais pas leur somme $(2, 1)$: ce vecteur n'est colinéaire ni à l'un ni à l'autre. Une réunion de sous-espaces n'est donc pas un sous-espace en général.

L'intersection de deux sous-espaces en est un : tu le démontres par la caractérisation (F07) dans l'exercice d'entraînement B5.



Les droites Vect((1, 2)) et Vect((1, −1)) : le point S, extrémité de la somme des deux vecteurs, est sur la diagonale du parallélogramme qu'ils construisent, mais sur aucune des deux droites.

Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

Définition : Combinaison linéaire ; sous-espace engendré

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel, p un entier naturel non nul et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E.

- On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ tout vecteur de la forme $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des réels, appelés les **coefficients** de la combinaison.
- L'ensemble de ces combinaisons linéaires se note $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)\\ &= \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p\\ &\qquad \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Propriété : Le sous-espace engendré par une famille

Soit $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel E. Alors :

- $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient chacun des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$;
- tout sous-espace vectoriel de E qui contient $u_1, \ldots, u_p$ contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$.

On dit que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est le **sous-espace vectoriel engendré** par $u_1, \ldots, u_p$.

Méthode : écrire un sous-espace sous la forme Vect(…)

1. **Paramétrer.** Résous les équations qui définissent F, puis écris un élément quelconque de F comme $au_1 + bu_2 + \ldots$, où a, b… sont des réels libres.

2. **Réciproque.** Vérifie que chaque u_k appartient à F et que toute combinaison des u_k y reste.
3. **Conclure** : $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots)$. C'est un sous-espace vectoriel, comme tout sous-espace engendré (F09), et la famille $(u_1, u_2, \dots)$ l'engendre.

Rédaction : « $(x, y, z) \in F$ si et seulement si … si et seulement si $(x, y, z) = au_1 + bu_2$; donc $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ ».

Exemple

Énoncé. Écris $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sous la forme d'un sous-espace engendré.

Paramétrer. Pour tous réels a et b :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclure. Les éléments de F sont exactement les combinaisons de ces deux matrices : F est le sous-espace engendré par elles (F09), sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Familles génératrices, libres, liées

Définition : Famille génératrice, famille libre, famille liée

Soit E un espace vectoriel réel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

- La famille est **génératrice** de E si $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$, c'est-à-dire si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$. On dit aussi que $u_1, \dots, u_p$ **engendrent** E.
- La famille est **libre** si, pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E \\ \Longrightarrow\ &\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0. \end{aligned}$$

On dit aussi que $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement indépendants**.

- La famille est **liée** si elle n'est pas libre : il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, **non tous nuls**, tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$. Une telle égalité s'appelle une **relation de dépendance linéaire**.

Propriété : Familles d'un ou de deux vecteurs

Soit E un espace vectoriel réel.

- Toute famille de vecteurs de E qui contient 0_E est liée.
- Pour $u \in E$, la famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.

- Pour u et v dans E, la famille (u, v) est liée si et seulement si l'un des deux vecteurs est le produit de l'autre par un réel : il existe un réel λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. On dit alors que u et v sont **colinéaires**.

Propriété : Famille liée et combinaison linéaire

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel E, avec $p \geq 2$. La famille est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ est une combinaison linéaire des autres.

Propriété : Ajouter ou retirer un vecteur

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel E.

- Si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre et si v est un vecteur de E qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$, alors la famille $(u_1, \dots, u_p, v)$ est libre.
- Si $p \geq 2$ et si u_p est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{p-1}$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1}) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

Méthode : libre ou liée par une relation de dépendance résolue

1. **Poser la relation** $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$, coefficients inconnus.
2. **Traduire** en système : composante par composante dans $\mathbb{R}^n$, coefficient par coefficient pour des matrices, valeurs de x bien choisies pour des fonctions.
3. **Résoudre** par substitution ou combinaison, jusqu'au bout.
4. **Conclure.** Seule la solution nulle : famille libre. Une solution non nulle : écris la relation de dépendance obtenue et vérifie-la ; la famille est liée.

Rédaction : « soit α, β, γ réels tels que… ; le système impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$; la famille est donc libre ». Raccourci, d'après la propriété des familles de deux vecteurs (F11) : deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre.

Exemple

Énoncé. La famille $\big((1, 2, 0), (0, 1, 1), (3, 4, -2)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

Système. Soit α, β, γ réels. L'égalité $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(3, 4, -2) = (0, 0, 0)$ s'écrit $\alpha + 3\gamma = 0$, $2\alpha + \beta + 4\gamma = 0$ et $\beta - 2\gamma = 0$.

Résolution. La première et la troisième équation donnent $\alpha = -3\gamma$ et $\beta = 2\gamma$. La deuxième devient $-6\gamma + 2\gamma + 4\gamma = 0$, vraie pour tout γ.

Conclusion. Avec $\gamma = 1$:

$$-3(1,2,0)+2(0,1,1)\\+(3,4,-2)=(0,0,0).$$

C'est une relation de dépendance linéaire : la famille est liée.

Attention : Non colinéaires deux à deux ne veut pas dire libre

Pour trois vecteurs, vérifier qu'aucun couple n'est colinéaire ne suffit pas.

Les vecteurs $(1,0,1)$, $(0,1,1)$ et $(1,1,2)$ ne sont pas colinéaires deux à deux. Pourtant $(1,0,1)+(0,1,1)-(1,1,2)=(0,0,0)$: la famille est liée. Seule la résolution de la relation complète décide.

Base, écriture unique, composantes

Définition : Base d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel. Une famille $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème : Base et écriture unique

Soit E un espace vectoriel réel et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E. $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur u de E s'écrit **de façon unique** sous la forme

$$u=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,$$

avec $x_1,\dots,x_n$ réels.

Définition : Composantes d'un vecteur dans une base

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel réel E et u un vecteur de E. Les réels $x_1,\dots,x_n$ de l'écriture unique $u=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ (F15) s'appellent les **composantes** de u dans la base $\mathcal{B}$; x_k est la composante de u selon e_k. Elles dépendent de la base et de l'ordre de ses vecteurs.

Propriété : Composantes d'une somme et d'un produit par un réel

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un espace vectoriel réel E. Si u a pour composantes $(x_1,\dots,x_n)$ et v a pour composantes $(y_1,\dots,y_n)$ dans $\mathcal{B}$, et si α est un réel, alors :

- $u+v$ a pour composantes $(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$;
- αu a pour composantes $(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$;
- $u=v$ si et seulement si $x_k=y_k$ pour tout k ; en particulier, $u=0_E$ si et seulement si toutes ses composantes sont nulles.

Méthode : calculer les composantes dans une base

1. **Nommer la base** $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et poser $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
2. **Résoudre** le système obtenu en identifiant les composantes, les coefficients ou les parties réelle et imaginaire.
3. **Contrôler** en recalculant la combinaison.
4. **Conclure** par l'unicité de l'écriture dans une base (F15).

Rédaction : « $\mathcal{B}$ étant une base, cette écriture est unique ; les composantes de u dans $\mathcal{B}$ sont $(x_1, \dots, x_n)$ ».

Exemple

Énoncé. On admet que $\mathcal{B} = \big((1,3),(2,5)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calcule les composantes de $u = (4,11)$ dans $\mathcal{B}$.

Système. $x_1(1,3) + x_2(2,5) = (4,11)$ donne $x_1 + 2x_2 = 4$ et $3x_1 + 5x_2 = 11$.

La première équation donne $x_1 = 4 - 2x_2$; la seconde devient $12 - x_2 = 11$, donc $x_2 = 1$, puis $x_1 = 2$.

Contrôle. $2(1,3) + (2,5) = (4,11)$.

Conclusion. L'écriture dans une base est unique (F15) : les composantes de u dans $\mathcal{B}$ sont $(2,1)$.

Attention : Libre ou génératrice : il faut les deux

Une base doit être libre **et** génératrice. Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\big((1,1,0),(0,0,1)\big)$ est libre, mais $(1,0,0)$ n'est pas une combinaison de ces deux vecteurs.

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((1,0),(0,2),(3,1)\big)$ engendre tout, mais elle est liée. Aucune des deux n'est une base.

Attention : Pas de composantes sans base nommée

Les composantes n'appartiennent pas au vecteur seul : elles dépendent de la base et de l'ordre de ses vecteurs.

Le vecteur $(4,11)$ a pour composantes $(4,11)$ dans la base canonique, mais $(2,1)$ dans la base $\big((1,3),(2,5)\big)$, et $(1,2)$ si l'on échange les deux vecteurs de cette base. Écris toujours le nom de la base.

Bases de référence et base d'un sous-espace

Propriété : Bases de référence

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une base (e_1, e_2), appelée **base canonique** ; les composantes de (x, y) y sont (x, y).
- Dans $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ forment la base canonique (e_1, e_2, e_3).
- Dans $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est une base ; les composantes de $z = a + ib$, avec a et b réels, y sont (a, b).
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les quatre matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forment une base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les neuf matrices qui ont un coefficient égal à 1 et tous les autres nuls forment une base.

À retenir : Lire les composantes dans une base de référence

Dans une base de référence, les composantes se lisent sans calcul. Le triplet (x, y, z) a pour composantes (x, y, z) dans (e_1, e_2, e_3) ; le complexe $a + ib$ a pour composantes (a, b) dans $(1, i)$. Une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a pour composantes ses quatre coefficients, lus dans l'ordre E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}.

Méthode : une base d'un sous-espace par paramétrage

1. **Famille génératrice par paramétrage** : écris $F = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ en résolvant les équations de F.
2. **Liberté** : résous $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$. En général, chaque paramètre apparaît seul dans une composante ou un coefficient, et la liberté se lit directement.
3. **Si la famille est liée**, retire un vecteur combinaison des autres (propriétés des familles liées, F12 et F13), puis recommence.
4. **Conclure** : la famille obtenue est une base de F.

Rédaction : « la famille (u_1, u_2) engendre F et elle est libre ; c'est donc une base de F ».

Exemple

Énoncé. Trouve une base de F, ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $a + 2b = 0$ et $c = d$.

Paramétrer. Ces matrices s'écrivent, pour tous réels b et d :

$$\begin{pmatrix} -2b & b \\ d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réciproque. Une telle combinaison vérifie $-2b + 2b = 0$ et $d = d$: F est le sous-espace engendré par ces deux matrices (F09).

Liberté. Si la combinaison est nulle, le coefficient en haut à droite donne $b = 0$, celui en bas à gauche $d = 0$.

Conclusion. Ces deux matrices forment une famille libre et génératrice de F : c'est une base de F.

Dimension

Théorème : Plus de n vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs

Soit E un espace vectoriel réel engendré par une famille de n vecteurs, avec $n \geq 1$. Alors toute famille de p vecteurs de E, avec $p > n$, est liée.

Remarque

Le théorème des familles trop longues (F19) est le seul énoncé du chapitre dont le cours présente une **idée de preuve**, avec des étapes omises et nommées.

Tous les autres énoncés qui ne sont pas des définitions sont démontrés dans le cours. Toute la suite de la dimension repose sur ce théorème.

Théorème : Existence d'une base

Soit E un espace vectoriel réel, avec $E \neq \{0_E\}$, engendré par une famille finie $(u_1, \ldots, u_p)$. Alors on peut **extraire** de $(u_1, \ldots, u_p)$ une base de E : certains des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ forment une base de E.

Théorème : Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs

Soit E un espace vectoriel réel qui possède une base de n vecteurs, avec $n \geq 1$. Alors toute base de E a exactement n vecteurs.

Définition : Dimension d'un espace vectoriel

Un espace vectoriel réel E est **de dimension finie** s'il est engendré par une famille finie de vecteurs.

- Si $E \neq \{0_E\}$, E possède une base (F20) et toutes ses bases ont le même nombre n de vecteurs (F21) : ce nombre s'appelle la **dimension** de E et se note $\dim E$.
- Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$.

D'après F18 : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{C} = 2$, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$.

Couples, triplets

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 \qquad \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Nombres complexes, base (1, i)

$$\dim \mathbb{C} = 2$$

Matrices carrées

$$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 \qquad \dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$$

Espace réduit au vecteur nul

$$\dim\{0_E\} = 0$$

En dimension n, famille libre de p vecteurs

$$p \leq n$$

En dimension n, famille génératrice de p vecteurs

$$p \geq n$$

Utiliser la dimension

Propriété : Familles libres et génératrices en dimension n

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.

- Toute famille libre de vecteurs de E a au plus n vecteurs.
- Toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs.

Théorème : Familles de n vecteurs en dimension n

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre, c'est une base de E.
- Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice de E, c'est une base de E.

Propriété : Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq n$. De plus, $\dim F = n$ si et seulement si $F = E$.

Méthode : une base quand la dimension est connue (F24)

1. **Dimension** : rappelle $\dim E = n$, par la définition de la dimension (F22) ou par une base déjà trouvée.
2. **Compter** : la famille doit compter exactement n vecteurs.
3. **Une seule propriété** : prouve la liberté par une relation résolue (ou, plus rarement, le caractère générateur).
4. **Conclure** par le théorème des familles de n vecteurs en dimension n (F24).

Rédaction : « (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, espace de dimension 3 ; d'après le théorème des familles de n vecteurs en dimension n (F24), c'est une base de $\mathbb{R}^3$ ».

Méthode : la dimension d'un sous-espace par une base exhibée

1. **Exhiber une base** de F (méthode du paramétrage).
2. **Compter** ses vecteurs : ce nombre est $\dim F$, par définition de la dimension (F22).
3. **Comparer** si besoin à $\dim E$: si $\dim F < \dim E$, alors $F \neq E$; si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$, d'après la dimension d'un sous-espace (F25).

Rédaction : « la famille (A, B) est une base de F ; donc $\dim F = 2$ ». La dimension ne se devine pas : elle se prouve par une base.

Exemple

Énoncé. Montre que $\big((2,1,0),(0,1,-2),(3,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Liberté. Soit α, β, γ réels tels que $\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,-2)+\gamma(3,0,1)=(0,0,0)$. La deuxième composante donne $\beta=-\alpha$, la troisième $\gamma=2\beta=-2\alpha$. La première devient $2\alpha+3\gamma=-4\alpha=0$. Donc $\alpha=0$, puis $\beta=\gamma=0$.

Conclusion. Trois vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$, de dimension 3 : d'après le théorème des familles de n vecteurs en dimension n (F24), c'est une base.

Attention : Le bon nombre de vecteurs ne fait pas une base

Avoir n vecteurs en dimension n ne suffit pas : le théorème des familles de n vecteurs (F24) exige en plus la liberté, ou le caractère générateur.

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((2,-6),(-1,3)\big)$ compte deux vecteurs, mais $(2,-6)=-2\cdot(-1,3)$: elle est liée, ce n'est pas une base.

Coin examen : quelques questions dans l'exercice de structures

À retenir : La forme des questions

Les espaces vectoriels n'ont pas d'exercice propre : ils occupent quelques questions d'un exercice sur les structures, dans 5 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). La forme est stable. Un ensemble de matrices dépend de deux réels. On montre que c'est un sous-espace vectoriel, qu'une famille de deux matrices en est une base, puis on en déduit la dimension. L'exercice continue avec une loi sur le même ensemble.

Exemple

Énoncé. Soit $K=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $\mathcal{G}=\{xI+yK \mid x,y\in\mathbb{R}\}$. Montre que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donne sa dimension.

Sous-espace. Pour tous réels x, y : $xI + yK = \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix}$. Les éléments de $\mathcal{G}$ sont les combinaisons de I et K : $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}(I, K)$, sous-espace vectoriel comme tout sous-espace engendré (F09). La caractérisation des sous-espaces (F07) conduit au même résultat.

Base. Si $xI + yK = O$, alors $x = 0$ et $y = 0$: (I, K) est libre. Elle engendre $\mathcal{G}$, c'est une base.

Dimension. $\dim \mathcal{G} = 2$.

Rédige chaque « montrer que » comme une courte preuve : annonce ce que tu montres, nomme l'énoncé utilisé, termine par une phrase de conclusion. Par exemple : la caractérisation (F07), le sous-espace engendré (F09), la définition d'une base (F14), le théorème des familles de n vecteurs (F24).

« En déduire la dimension » demande une base déjà prouvée, puis son nombre de vecteurs. Quand l'énoncé rappelle une structure, comme l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, utilise-la sans la redémontrer.