BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Niveau examen	5

Exercice 1 4,5 pts

Un plan de matrices de carré 3I et un groupe défini par une équation

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a-b \end{pmatrix},$$

et on note $\mathcal{S} = \{M(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ et $J = M(0,1)$.

1. a) 0,25 pts

Vérifier que $M(a,b) = aI + bJ$ pour tous réels a et b.

INDICE

Écris J, puis calcule $aI + bJ$ coefficient par coefficient.

1. b) 0,5 pts

En déduire que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

D'après 1. a), $\mathcal{S}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de deux matrices : écris-le sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$.

2. 0,75 pts

Montrer que (I, J) est une base de $\mathcal{S}$, puis en déduire la dimension de $\mathcal{S}$.

INDICE

La famille engendre $\mathcal{S}$ d'après 1. b). Pour la liberté, écris que $\alpha I + \beta J = M(\alpha,\beta)$ est nulle et choisis un coefficient où α n'apparaît pas.

3. a) 0,25 pts

Calculer J^2.

INDICE

Produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: ligne par colonne.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$. En déduire que $\mathcal{S}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que le produit est commutatif dans $\mathcal{S}$.

INDICE

Développe $(aI + bJ)(cI + dJ)$ par distributivité dans l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis utilise 3. a).

4. 0,5 pts

Pour tous réels a et b, on pose $\psi\big(M(a,b)\big) = a^2 - 3b^2$. Justifier que cela définit une application ψ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$, puis montrer que ψ est un morphisme de $(\mathcal{S}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

INDICE

Une même matrice de $\mathcal{S}$ pourrait-elle s'écrire $M(a,b)$ avec deux couples différents ? Pense à la question 2. Pour le morphisme, pars de la formule de 3. b).

5. 0,5 pts

On note $G = \{N \in \mathcal{S} \mid \psi(N) = 1\}$. Montrer que $I \in G$ et que G est une partie stable de $(\mathcal{S}, \times)$.

INDICE

Écris I sous la forme $M(a,b)$. Pour la stabilité, utilise la question 4.

6. 0,75 pts

Soit $M(a,b) \in G$. Montrer que $M(a,-b) \in G$ et calculer $M(a,b) \times M(a,-b)$. En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

INDICE

Calcule $\psi\big(M(a,-b)\big)$, puis le produit avec 3. b). Vérifie ensuite les axiomes d'un groupe un à un, en commençant par le fait que $\times$ est une loi sur G.

7. 0,5 pts

Vérifier que $M(2,1) \in G$. Écrire les matrices $\big(M(2,1)\big)^2$ et $\big(M(2,1)\big)^{-1}$.

INDICE

Calcule $\psi\big(M(2,1)\big)$. Pour le carré, applique 3. b) ; pour l'inverse, applique la question 6.

Exercice 2 4,5 pts

Des matrices de $\mathbf{M_3(\mathbb{R})}$ construites sur une matrice de carré nul

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$N(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 3b & -b \\ 0 & a & 0 \\ 4b & 6b & a-2b \end{pmatrix}.$$

On note $F = \{N(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ et $A = N(0,1)$.

1. 0,5 pts

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : $O = N(0,0)$. Pour la combinaison, calcule $\alpha N(a,b) + \beta N(a',b')$ et reconnais une matrice $N(\dots,\dots)$.

2. 0,75 pts

Montrer que (I, A) est une base de F. En déduire la dimension de F.

INDICE

Vérifie d'abord que $N(a,b) = aI + bA$. Pour la liberté, lis deux coefficients bien choisis de $\alpha I + \beta A$.

3. a) 0,25 pts

Vérifier que $A^2 = O$.

INDICE

Calcule les neuf coefficients du produit ligne par colonne ; la deuxième ligne de A est nulle.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $N(a,b) \times N(c,d) = N(ac, ad+bc)$. En déduire que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Développe $(aI + bA)(cI + dA)$ par distributivité ; I commute avec A et $A^2 = O$.

4. 0,5 pts

On admet que $(F, +, \times)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

INDICE

Rappelle les axiomes d'un corps. Quelle propriété des éléments non nuls ferait défaut pour A ?

5. 0,5 pts

On considère l'application $\psi : \mathbb{R} \to F$ définie par $\psi(t) = N(1,t)$, et $G = \{N(1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ψ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(F, \times)$, injectif.

INDICE

Applique la formule de 3. b) avec $a = c = 1$. Pour l'injectivité, compare les coefficients de $N(1,t)$ et $N(1,t')$.

6. 0,75 pts

En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. Préciser son élément neutre et l'inverse de $N(1,t)$.

INDICE

G est l'image de $\mathbb{R}$ par ψ. Utilise la propriété de SM12a sur l'image d'un groupe par un morphisme, puis calcule $\psi(0)$ et $\psi(-t)$.

7. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel t, $\big(N(1,t)\big)^n = N(1,nt)$. Écrire la matrice $\big(N(1,1)\big)^5$.

INDICE

Raisonne par récurrence sur n, avec $N(1,t)^0 = I = N(1,0)$, et utilise le morphisme ψ pour l'hérédité.

8. 0,25 pts

G est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

INDICE

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient-il à G ?

Exercice 3 — 4,5 pts

Un plan de matrices et un groupe paramétré par les réels positifs

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on note

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a+3b & -4b \\ b & a-2b \end{pmatrix},$$

puis $\mathcal{P} = \{P(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $K = P(0,1)$.

1. a) — 0,5 pts

Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Écris $P(a,b)$ comme combinaison de I et de K ; ou applique directement la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07).

1. b) — 0,75 pts

Montrer que (I, K) est une base de $\mathcal{P}$ et en déduire $\dim \mathcal{P}$.

INDICE

La famille engendre $\mathcal{P}$ d'après 1. a). Pour la liberté, écris $\alpha I + \beta K = O$ et lis un coefficient où α n'apparaît pas.

2. a) — 0,25 pts

Vérifier que $K^2 = K + 2I$.

INDICE

Produit ligne par colonne, puis calcule $K + 2I$ et compare.

2. b) — 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $P(a,b) \times P(c,d) = P(ac + 2bd, ad + bc + bd)$. En déduire que $\mathcal{P}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Développe $(aI + bK)(cI + dK)$ par distributivité, puis remplace K^2 grâce à 2. a).

3. — 0,5 pts

Pour tous réels a et b, on pose $\chi\big(P(a,b)\big) = a + 2b$. Justifier que χ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, puis montrer que χ est un morphisme de $(\mathcal{P}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

INDICE

Une matrice de $\mathcal{P}$ peut-elle s'écrire $P(a,b)$ de deux façons ? Pense à la base de 1. b). Pour le morphisme, applique χ à la formule de 2. b) et factorise.

4. 0,75 pts

Vérifier que $(ac+2bd)-(ad+bc+bd)=(a-b)(c-d)$ pour tous réels a, b, c, d. On note Γ l'ensemble des matrices $P(a,b)$ telles que $a+2b=1$ et $a-b>0$. Montrer que Γ est une partie stable de $(\mathcal{P},\times)$.

INDICE

Développe $(a-b)(c-d)$. Pour la stabilité, il y a deux conditions à vérifier pour le produit : la première vient de la question 3.

5. 0,5 pts

Pour $t>0$, on pose $T(t)=P\left(\dfrac{1+2t}{3},\dfrac{1-t}{3}\right)$. Montrer que T est une bijection de $]0,+\infty[$ sur Γ.

INDICE

Calcule $a+2b$ et $a-b$ pour $T(t)$. Réciproquement, pour $P(a,b)\in\Gamma$, résous le système formé par $a+2b=1$ et $a-b=t$.

6. 0,75 pts

Montrer que $T(st)=T(s)\times T(t)$ pour tous réels $s>0$ et $t>0$. En déduire que $(\Gamma,\times)$ est un groupe commutatif, et préciser son élément neutre et l'inverse de $T(t)$.

INDICE

$T(s)\times T(t)$ est dans Γ (question 4) : quelle est la valeur de $a-b$ pour ce produit ? Utilise ensuite la question 5, puis un résultat de SM12a sur l'image d'un groupe par un morphisme.

Exercice 4 4,5 pts

Les matrices qui commutent avec une matrice de carré –I et un corps

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. On rappelle aussi que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \times M = M \times A\}$ des matrices qui commutent avec A.

1. a) 0,5 pts

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : la matrice nulle commute-t-elle avec A ? Pour la combinaison, développe $A \times (\alpha M + \beta N)$ par distributivité.

1. b) 0,75 pts

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in E$ si et seulement si $y = -2z$ et $t = x - 2z$. En déduire que $E = \mathrm{Vect}(I, A)$.

INDICE

Calcule $A \times M$ et $M \times A$, puis écris les quatre équations obtenues en égalant les coefficients, et résous ce système par substitution.

2. 0,5 pts

Montrer que (I, A) est une base de E, puis en déduire la dimension de E.

INDICE

La famille engendre E d'après 1. b). Pour la liberté, écris $\alpha I + \beta A = O$ coefficient par coefficient.

3. a) 0,25 pts

Vérifier que $A^2 = -I$.

INDICE

Produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: ligne par colonne.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $(aI + bA) \times (cI + dA) = (ac - bd)I + (ad + bc)A$. En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Développe par distributivité dans l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; I commute avec A, et 3. a) donne A^2.

4. 0,75 pts

On considère l'application $\varphi : \mathbb{C} \to E$ définie, pour tous réels a et b, par $\varphi(a+ib) = aI + bA$. Justifier que φ est bien définie et bijective, puis montrer que, pour tous complexes z et z', $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$ et $\varphi(zz') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

INDICE

Un complexe n'a qu'une forme algébrique. Pour la bijection, utilise la base (I, A) de la question 2 ; pour le produit, compare $(a+ib)(c+id)$ avec la formule de 3. b).

5. 0,5 pts

On note E^* l'ensemble des matrices non nulles de E, et $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls. Montrer que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif, puis en déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

INDICE

Montre que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$, puis utilise la propriété de SM12a sur l'image d'un groupe commutatif par un morphisme. Pour le corps, rassemble les propriétés de $(E, +)$, de $(E^*, \times)$ et la distributivité.

6. 0,25 pts

Calculer $(1+i)^4$, puis en déduire la matrice $(I+A)^4$.

INDICE

$I + A = \varphi(1+i)$: applique deux fois la propriété du produit de la question 4.

7. 0,5 pts

On pose $B = 2I + A$. Justifier que B a un inverse dans $(E^*, \times)$, déterminer les composantes de B^{-1} dans la base (I, A), puis écrire la matrice B^{-1}.

INDICE

$B = \varphi(2+i)$: écris l'inverse du complexe $2+i$ sous forme algébrique, puis applique φ.

Exercice 5 4,5 pts

Un plan de matrices, une seconde base (U, V) et un groupe à quatre éléments

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+2b \end{pmatrix},$$

et on note $W = \{S(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, $U = S(0,1)$ et $V = I - U$.

1. a) 0,5 pts

Vérifier que $S(a,b) = aI + bU$ pour tous réels a et b, puis en déduire que W est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Écris U, puis calcule $aI + bU$ coefficient par coefficient. Reconnais ensuite un sous-espace engendré.

1. b) 0,5 pts

Montrer que (I, U) est une base de W et en déduire $\dim W$.

INDICE

La famille engendre W d'après 1. a). Pour la liberté, lis le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne de $\alpha I + \beta U$.

2. 0,5 pts

Vérifier que $U^2 = U$. En déduire que $V \in W$, que $V^2 = V$ et que $U \times V = V \times U = O$.

INDICE

Calcule U^2 ligne par colonne. Pour V, écris V sous la forme $S(a,b)$, puis développe $(I-U)^2$ et $U(I-U)$ par distributivité.

3. 0,5 pts

Montrer que (U, V) est une base de W.

INDICE

W est de dimension 2 (1. b)) : d'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), il suffit de prouver que la famille est libre. Multiplie une relation $xU + yV = O$ par U, puis par V.

4. 0,5 pts

Déterminer les composantes de $S(a,b)$ dans la base (U, V). Montrer ensuite que, pour tous réels x, y, x' et y', $(xU + yV) \times (x'U + y'V) = xx'U + yy'V$, et en déduire que W est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Remplace I par $U + V$ dans $aI + bU$. Pour le produit, développe par distributivité et utilise la question 2.

5. 0,75 pts

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls et $G = \{xU + yV \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif ; donner son élément neutre et l'inverse de $xU + yV$.

INDICE

Utilise la formule du produit de la question 4 et écris I dans la base (U, V). Vérifie ensuite les axiomes d'un groupe un à un.

6. 0,5 pts

Pour tous réels non nuls x et y, on pose $\varphi(xU + yV) = xy$. Justifier que cela définit une application φ de G dans $\mathbb{R}^*$, puis montrer que φ est un morphisme surjectif de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

La base (U, V) de la question 3 donne des composantes uniques (F15, base et écriture unique). Pour la surjectivité, cherche un antécédent de la forme $tU + V$.

7. 0,75 pts

On note $H = \{N \in W \mid N^2 = I\}$. Montrer que H contient exactement quatre matrices, que l'on écrira, puis que H est un sous-groupe de $(G, \times)$. Calculer $\varphi(N)$ pour chaque matrice N de H.

INDICE

Écris $N = xU + yV$: la question 4 donne N^2, et $I = U + V$. Compare ensuite les composantes dans la base (U, V).