BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Niveau examen	5

Exercice 1 4,5 pts

Un plan de matrices de carré 3I et un groupe défini par une équation

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a-b \end{pmatrix},$$

et on note $\mathcal{S} = \{M(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ et $J = M(0,1)$.

1. a) 0,25 pts

Vérifier que $M(a,b) = aI + bJ$ pour tous réels a et b.

INDICE

Écris J, puis calcule $aI + bJ$ coefficient par coefficient.

CORRIGÉ

On a $J = M(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit a et b deux réels :

$$\begin{aligned} & aI + bJ \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 2b \\ b & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ b & a-b \end{pmatrix} \\ &= M(a,b). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tous réels a et b, $M(a,b) = aI + bJ$.

1. b) 0,5 pts

En déduire que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

D'après 1. a), $\mathcal{S}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de deux matrices : écris-le sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$.

CORRIGÉ

D'après 1. a), les éléments de $\mathcal{S}$ sont exactement les matrices $aI + bJ$, avec a et b réels, c'est-à-dire les combinaisons linéaires de I et J. Donc $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(I, J)$.

Conclusion. Le sous-espace engendré par une famille est un sous-espace vectoriel (F09) : $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. 0,75 pts

Montrer que (I, J) est une base de $\mathcal{S}$, puis en déduire la dimension de $\mathcal{S}$.

INDICE

La famille engendre $\mathcal{S}$ d'après 1. b). Pour la liberté, écris que $\alpha I + \beta J = M(\alpha, \beta)$ est nulle et choisis un coefficient où α n'apparaît pas.

CORRIGÉ

Génératrice. D'après 1. b), $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(I, J)$.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta J = O$. D'après 1. a), $M(\alpha, \beta) = O$. Le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne donne $2\beta = 0$, donc $\beta = 0$. Le premier coefficient donne alors $\alpha + \beta = \alpha = 0$.

Conclusion. (I, J) est libre et génératrice de $\mathcal{S}$: c'est une base de $\mathcal{S}$ (F14, base). Donc $\dim \mathcal{S} = 2$ (F22, dimension).

3. a) 0,25 pts

Calculer J^2.

INDICE

Produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: ligne par colonne.

CORRIGÉ

Produit ligne par colonne :

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & 2-2 \\ 1-1 & 2+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I. \end{aligned}$$

Conclusion. $J^2 = 3I$.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$. En déduire que $\mathcal{S}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que le produit est commutatif dans $\mathcal{S}$.

INDICE

Développe $(aI+bJ)(cI+dJ)$ par distributivité dans l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis utilise 3. a).

CORRIGÉ

Produit. Soit a, b, c et d des réels. Par distributivité dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, avec $IJ=JI=J$ et $J^2=3I$ (3. a)) :

$$\begin{aligned}&(aI+bJ)(cI+dJ)\\&=acI+adJ+bcJ+bdJ^2\\&=(ac+3bd)I\\&\quad+(ad+bc)J.\end{aligned}$$

D'après 1. a), $M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$.

Stabilité. Ce produit appartient à $\mathcal{S}$: $\mathcal{S}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

Commutativité. Comme $ca+3db=ac+3bd$ et $cb+da=ad+bc$, on a aussi $M(c,d)\times M(a,b)=M(a,b)\times M(c,d)$.

Conclusion. $M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$ pour tous réels a, b, c, d ; $\mathcal{S}$ est stable pour le produit, qui y est commutatif.

4. 0,5 pts

Pour tous réels a et b, on pose $\psi\big(M(a,b)\big)=a^2-3b^2$. Justifier que cela définit une application ψ de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$, puis montrer que ψ est un morphisme de $(\mathcal{S},\times)$ dans $(\mathbb{R},\times)$.

INDICE

Une même matrice de $\mathcal{S}$ pourrait-elle s'écrire $M(a,b)$ avec deux couples différents ? Pense à la question 2. Pour le morphisme, pars de la formule de 3. b).

CORRIGÉ

Application bien définie. (I,J) est une base de $\mathcal{S}$ (question 2) : toute matrice de $\mathcal{S}$ s'écrit $aI+bJ=M(a,b)$ pour un **unique** couple de réels (a,b) (F15, base et écriture unique). Le réel a^2-3b^2 ne dépend donc que de la matrice.

Morphisme. Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ dans $\mathcal{S}$. D'après 3. b), $\psi\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)$ vaut

$$\begin{aligned}&(ac+3bd)^2\\&\quad-3(ad+bc)^2\\&=a^2c^2+9b^2d^2\\&\quad-3a^2d^2-3b^2c^2\\&=(a^2-3b^2)(c^2-3d^2),\end{aligned}$$

car les termes $6abcd$ et $-6abcd$ s'annulent. C'est $\psi\big(M(a,b)\big)\psi\big(M(c,d)\big)$.

Conclusion. ψ est une application de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$, et c'est un morphisme de $(\mathcal{S},\times)$ dans $(\mathbb{R},\times)$.

5. 0,5 pts

On note $G = \{N \in \mathcal{S} \mid \psi(N) = 1\}$. Montrer que $I \in G$ et que G est une partie stable de $(\mathcal{S}, \times)$.

INDICE

Écris I sous la forme $M(a, b)$. Pour la stabilité, utilise la question 4.

CORRIGÉ

Élément I. On a $I = M(1, 0)$ et $\psi(I) = 1^2 - 3 \times 0^2 = 1$: donc $I \in G$.

Stabilité. Soit N et N' dans G. Alors $N \times N' \in \mathcal{S}$ (3. b)), et d'après la question 4 :

$$\begin{aligned}\psi(N \times N') &= \psi(N)\psi(N') \\ &= 1 \times 1 = 1.\end{aligned}$$

Donc $N \times N' \in G$.

Conclusion. $I \in G$, et G est une partie stable de $(\mathcal{S}, \times)$.

6. 0,75 pts

Soit $M(a, b) \in G$. Montrer que $M(a, -b) \in G$ et calculer $M(a, b) \times M(a, -b)$. En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

INDICE

Calcule $\psi\big(M(a, -b)\big)$, puis le produit avec 3. b). Vérifie ensuite les axiomes d'un groupe un à un, en commençant par le fait que $\times$ est une loi sur G.

CORRIGÉ

Le symétrique candidat. Comme $M(a, b) \in G$, on a $a^2 - 3b^2 = 1$. Alors $\psi\big(M(a, -b)\big) = a^2 - 3(-b)^2 = 1$: $M(a, -b) \in G$. D'après 3. b) :

$$\begin{aligned}&M(a, b) \times M(a, -b) \\ &= M(a^2 - 3b^2, -ab + ab) \\ &= M(1, 0) = I.\end{aligned}$$

Axiomes de groupe.

- **Loi interne.** D'après la question 5, $\times$ est une loi de composition interne sur G.
- **Associativité.** Le produit des matrices est associatif dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc dans G.
- **Neutre.** $I \in G$ (question 5) et, pour tout $N \in G$, $I \times N = N \times I = N$.
- **Symétrique.** Pour $M(a, b) \in G$, $M(a, -b) \in G$ et le produit vaut I dans les deux ordres (3. b), commutativité).
- **Commutativité.** Elle découle de 3. b).

Conclusion. $(G, \times)$ est un groupe commutatif, et l'inverse de $M(a, b)$ est $M(a, -b)$.

7. `0,5 pts`

Vérifier que $M(2,1) \in G$. Écrire les matrices $\big(M(2,1)\big)^2$ et $\big(M(2,1)\big)^{-1}$.

INDICE

Calcule $\psi\big(M(2,1)\big)$. Pour le carré, applique 3. b) ; pour l'inverse, applique la question 6.

CORRIGÉ

Appartenance. $\psi\big(M(2,1)\big) = 4 - 3 = 1$, donc $M(2,1) \in G$.

Carré. D'après 3. b), $\big(M(2,1)\big)^2 = M(4+3, 2+2) = M(7,4)$, et $\psi\big(M(7,4)\big) = 49 - 48 = 1$.

Inverse. D'après la question 6, l'inverse de $M(2,1)$ est $M(2,-1)$.

Conclusion. En remplaçant dans la définition de $M(a,b)$:

$$\big(M(2,1)\big)^2 = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\big(M(2,1)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 4,5 pts

Des matrices de $\mathbf{M_3(\mathbb{R})}$ construites sur une matrice de carré nul

On rappelle que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$N(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 3b & -b \\ 0 & a & 0 \\ 4b & 6b & a-2b \end{pmatrix}.$$

On note $F = \{N(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ et $A = N(0,1)$.

1. 0,5 pts

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : $O = N(0,0)$. Pour la combinaison, calcule $\alpha N(a,b) + \beta N(a',b')$ et reconnais une matrice $N(\dots,\dots)$.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie F de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Vecteur nul. $N(0,0) = O$, donc $O \in F$.

Combinaison. Soit $N(a,b)$ et $N(a',b')$ dans F, et α, β deux réels. Chaque coefficient de $N(a,b)$ est de la forme $pa + qb$, avec p et q fixes. Donc chaque coefficient de $\alpha N(a,b) + \beta N(a',b')$ s'écrit $p(\alpha a + \beta a') + q(\alpha b + \beta b')$. Ainsi

$$\begin{aligned} &\alpha N(a,b) + \beta N(a',b') \\ &= N(\alpha a + \beta a', \\ &\qquad \alpha b + \beta b'), \end{aligned}$$

qui appartient à F.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), F est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

2. 0,75 pts

Montrer que (I, A) est une base de F. En déduire la dimension de F.

INDICE

Vérifie d'abord que $N(a,b) = aI + bA$. Pour la liberté, lis deux coefficients bien choisis de $\alpha I + \beta A$.

CORRIGÉ

Écriture. On a $A = N(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Soit a et b deux réels : en comparant les coefficients, $aI + bA = N(a,b)$.

Génératrice. Tout élément de F s'écrit $aI + bA$: $F = \mathrm{Vect}(I, A)$.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta A = O$. Alors $N(\alpha, \beta) = O$. Le coefficient de la deuxième ligne et de la deuxième colonne donne $\alpha = 0$; celui de la première ligne et de la deuxième colonne donne $3\beta = 0$, donc $\beta = 0$.

Conclusion. (I, A) est une base de F (F14, base), et $\dim F = 2$ (F22, dimension).

3. a) 0,25 pts

Vérifier que $A^2 = O$.

INDICE

Calcule les neuf coefficients du produit ligne par colonne ; la deuxième ligne de A est nulle.

CORRIGÉ

Deuxième ligne. La deuxième ligne de A est nulle, donc celle de A^2 aussi.

Première ligne. Pour la première ligne de A, $(2, 3, -1)$, les produits par les trois colonnes de A valent :

- $2 \times 2 + 3 \times 0 - 1 \times 4 = 0$;
- $2 \times 3 + 0 - 1 \times 6 = 0$;
- $2 \times (-1) + 0 - 1 \times (-2) = 0$.

Troisième ligne. La troisième ligne, $(4, 6, -2)$, vaut deux fois la première : ses produits sont aussi nuls.

Conclusion. $A^2 = O$.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $N(a,b) \times N(c,d) = N(ac, ad+bc)$. En déduire que F est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Développe $(aI+bA)(cI+dA)$ par distributivité ; I commute avec A et $A^2 = O$.

CORRIGÉ

Produit. Soit a, b, c et d des réels. Par distributivité dans l'anneau $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \times)$, avec $IA = AI = A$ et $A^2 = O$ (3. a)) :

$$\begin{aligned}(aI+bA)(cI+dA) &= acI + adA \\ &\quad + bcA + bdA^2 \\ &= acI + (ad+bc)A.\end{aligned}$$

D'après la question 2, $N(a,b) \times N(c,d) = N(ac, ad+bc)$.

Conclusion. Ce produit appartient à F : F est une partie stable de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

4. 0,5 pts

On admet que $(F, +, \times)$ est un anneau commutatif. Est-ce un corps ?

INDICE

Rappelle les axiomes d'un corps. Quelle propriété des éléments non nuls ferait défaut pour A ?

CORRIGÉ

Un diviseur de zéro. A est un élément de F différent de O, et $A \times A = O$ d'après 3. a).

Raisonnement par l'absurde. Supposons que $(F, +, \times)$ soit un corps. Comme $A \neq O$, A aurait un inverse A^{-1} dans F, et l'associativité donnerait

$$\begin{aligned}A &= (A^{-1} \times A) \times A \\ &= A^{-1} \times (A \times A) \\ &= A^{-1} \times O = O.\end{aligned}$$

C'est faux, puisque $A \neq O$.

Conclusion. $(F, +, \times)$ n'est pas un corps.

5. 0,5 pts

On considère l'application $\psi : \mathbb{R} \to F$ définie par $\psi(t) = N(1,t)$, et $G = \{N(1,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ψ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(F, \times)$, injectif.

INDICE

Applique la formule de 3. b) avec $a = c = 1$. Pour l'injectivité, compare les coefficients de $N(1,t)$ et $N(1,t')$.

CORRIGÉ

Morphisme. Soit t et t' deux réels. D'après 3. b), avec $a = c = 1$:

$$\begin{aligned}&\psi(t) \times \psi(t') \\ &= N(1,t) \times N(1,t') \\ &= N(1, t' + t) \\ &= \psi(t + t').\end{aligned}$$

Injectivité. Si $\psi(t) = \psi(t')$, le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne donne $3t = 3t'$, donc $t = t'$.

Conclusion. ψ est un morphisme injectif de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(F, \times)$.

6. 0,75 pts

En déduire que $(G, \times)$ est un groupe commutatif. Préciser son élément neutre et l'inverse de $N(1,t)$.

INDICE

G est l'image de $\mathbb{R}$ par ψ. Utilise la propriété de SM12a sur l'image d'un groupe par un morphisme, puis calcule $\psi(0)$ et $\psi(-t)$.

CORRIGÉ

Groupe image. $G = \psi(\mathbb{R})$. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif et ψ est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$, à valeurs dans F. L'image d'un groupe commutatif par un morphisme est un groupe commutatif : $(G, \times)$ est un groupe commutatif.

Neutre et inverse. Son élément neutre est $\psi(0) = N(1,0) = I$. Soit t un réel : $\psi(t) \times \psi(-t) = \psi(0) = I$.

Conclusion. $(G, \times)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre I, et l'inverse de $N(1,t)$ est $N(1,-t)$.

7. 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier naturel n et tout réel t, $\big(N(1,t)\big)^n = N(1,nt)$. Écrire la matrice $\big(N(1,1)\big)^5$.

INDICE

Raisonne par récurrence sur n, avec $N(1,t)^0 = I = N(1,0)$, et utilise le morphisme ψ pour l'hérédité.

CORRIGÉ

Soit t un réel. On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation. $\big(N(1,t)\big)^0 = I = N(1,0\times t)$.

Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\big(N(1,t)\big)^n = N(1,nt)$. D'après la question 5, $\big(N(1,t)\big)^{n+1}$ vaut

$$\begin{aligned} &N(1,nt)\times N(1,t)\\ &= N(1,nt+t)\\ &= N\big(1,(n+1)t\big). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout entier naturel n et tout réel t, $\big(N(1,t)\big)^n = N(1,nt)$. En particulier :

$$\begin{aligned} &\big(N(1,1)\big)^5\\ &= N(1,5)\\ &= \begin{pmatrix} 11 & 15 & -5\\ 0 & 1 & 0\\ 20 & 30 & -9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8. 0,25 pts

G est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$?

INDICE

Le vecteur nul de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ appartient-il à G ?

CORRIGÉ

Toute matrice $N(1,t)$ a pour coefficient de la deuxième ligne et de la deuxième colonne $1 \neq 0$. Donc $O \notin G$.

Conclusion. D'après la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07), G n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$, bien qu'il soit un groupe pour le produit.

Exercice 3 4,5 pts

Un plan de matrices et un groupe paramétré par les réels positifs

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on note

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a+3b & -4b \\ b & a-2b \end{pmatrix},$$

puis $\mathcal{P} = \{P(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $K = P(0,1)$.

1. a) 0,5 pts

Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Écris $P(a,b)$ comme combinaison de I et de K ; ou applique directement la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07).

CORRIGÉ

Écriture. On a $K = P(0,1) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Soit a et b deux réels :

$$\begin{aligned} & aI + bK \\ &= \begin{pmatrix} a+3b & -4b \\ b & a-2b \end{pmatrix} \\ &= P(a,b). \end{aligned}$$

Forme Vect. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont donc exactement les combinaisons linéaires de I et K : $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(I, K)$.

Conclusion. Le sous-espace engendré par une famille est un sous-espace vectoriel (F09) : $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

1. b) 0,75 pts

Montrer que (I, K) est une base de $\mathcal{P}$ et en déduire $\dim \mathcal{P}$.

INDICE

La famille engendre $\mathcal{P}$ d'après 1. a). Pour la liberté, écris $\alpha I + \beta K = O$ et lis un coefficient où α n'apparaît pas.

CORRIGÉ

Génératrice. D'après 1. a), (I, K) engendre $\mathcal{P}$.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta K = O$, soit $P(\alpha, \beta) = O$. Le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne donne $\beta = 0$. Le dernier coefficient donne alors $\alpha - 2\beta = \alpha = 0$.

Conclusion. (I, K) est une base de $\mathcal{P}$ (F14, base), et $\dim \mathcal{P} = 2$ (F22, dimension).

2. a) 0,25 pts

Vérifier que $K^2 = K + 2I$.

INDICE

Produit ligne par colonne, puis calcule $K + 2I$ et compare.

CORRIGÉ

Carré. Produit ligne par colonne :

$$\begin{aligned} K^2 &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9-4 & -12+8 \\ 3-2 & -4+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somme. $K + 2I = \begin{pmatrix} 3+2 & -4 \\ 1 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion. $K^2 = K + 2I$.

2. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $P(a,b) \times P(c,d) = P(ac + 2bd, ad + bc + bd)$. En déduire que $\mathcal{P}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

INDICE

Développe $(aI + bK)(cI + dK)$ par distributivité, puis remplace K^2 grâce à 2. a).

CORRIGÉ

Produit. Soit a, b, c et d des réels. Par distributivité dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, avec $IK = KI = K$ et $K^2 = K + 2I$ (2. a)) :

$$\begin{aligned} &(aI + bK)(cI + dK) \\ &= acI + adK + bcK \\ &\quad + bd(K + 2I) \\ &= (ac + 2bd)I \\ &\quad + (ad + bc + bd)K. \end{aligned}$$

D'après 1. a), $P(a,b) \times P(c,d) = P(ac + 2bd, ad + bc + bd)$.

Conclusion. Ce produit appartient à $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

3. 0,5 pts

Pour tous réels a et b, on pose $\chi\big(P(a,b)\big) = a + 2b$. Justifier que χ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, puis montrer que χ est un morphisme de $(\mathcal{P}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

INDICE

Une matrice de $\mathcal{P}$ peut-elle s'écrire $P(a,b)$ de deux façons ? Pense à la base de 1. b). Pour le morphisme, applique χ à la formule de 2. b) et factorise.

CORRIGÉ

Application bien définie. (I, K) est une base de $\mathcal{P}$ (1. b)) : toute matrice de $\mathcal{P}$ s'écrit $P(a,b)$ pour un unique couple (a,b) (F15, base et écriture unique). Le réel $a + 2b$ ne dépend donc que de la matrice.

Morphisme. Soit $P(a,b)$ et $P(c,d)$ dans $\mathcal{P}$. D'après 2. b), $\chi\big(P(a,b) \times P(c,d)\big)$ vaut

$$\begin{aligned} &ac + 2bd \\ &\quad + 2(ad + bc + bd) \\ &= ac + 2ad + 2bc + 4bd \\ &= (a + 2b)(c + 2d). \end{aligned}$$

C'est $\chi\big(P(a,b)\big)\chi\big(P(c,d)\big)$.

Conclusion. χ est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, et c'est un morphisme de $(\mathcal{P}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$.

4. 0,75 pts

Vérifier que $(ac + 2bd) - (ad + bc + bd) = (a - b)(c - d)$ pour tous réels a, b, c, d. On note Γ l'ensemble des matrices $P(a,b)$ telles que $a + 2b = 1$ et $a - b > 0$. Montrer que Γ est une partie stable de $(\mathcal{P}, \times)$.

INDICE

Développe $(a - b)(c - d)$. Pour la stabilité, il y a deux conditions à vérifier pour le produit : la première vient de la question 3.

CORRIGÉ

Identité. Soit a, b, c et d des réels. D'une part $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$; d'autre part

$$\begin{aligned} &(ac + 2bd) \\ &\quad - (ad + bc + bd) \\ &= ac - ad - bc + bd. \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie.

Stabilité. Soit $P(a,b)$ et $P(c,d)$ dans Γ. D'après 2. b), leur produit est $P(e,f)$, avec $e = ac + 2bd$ et $f = ad + bc + bd$.

- D'après la question 3, $e + 2f = (a + 2b)(c + 2d) = 1 \times 1 = 1$.
- D'après l'identité ci-dessus, $e - f = (a - b)(c - d)$, produit de deux réels strictement positifs : $e - f > 0$.

Conclusion. $P(e,f) \in \Gamma$: Γ est une partie stable de $(\mathcal{P}, \times)$.

5. 0,5 pts

Pour $t > 0$, on pose $T(t) = P\left(\frac{1+2t}{3}, \frac{1-t}{3}\right)$. Montrer que T est une bijection de $]0, +\infty[$ sur Γ.

INDICE

Calcule $a + 2b$ et $a - b$ pour $T(t)$. Réciproquement, pour $P(a, b) \in \Gamma$, résous le système formé par $a + 2b = 1$ et $a - b = t$.

CORRIGÉ

$T(t)$ appartient à Γ. Soit $t > 0$. Avec $a = \frac{1+2t}{3}$ et $b = \frac{1-t}{3}$:

$$\begin{aligned} a + 2b &= \frac{1 + 2t + 2 - 2t}{3} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$a - b = \frac{3t}{3} = t > 0.$$

Surjectivité. Soit $P(a, b) \in \Gamma$, et $t = a - b > 0$. Le système $a + 2b = 1$, $a - b = t$ donne, par différence, $3b = 1 - t$, puis $a = t + b = \frac{1+2t}{3}$. Donc $P(a, b) = T(t)$.

Injectivité. Soit $t > 0$ et $t' > 0$ tels que $T(t) = T(t')$. L'unicité de l'écriture dans la base (I, K) (F15) donne les mêmes coefficients a et b, donc $t = a - b = t'$.

Conclusion. T est une bijection de $]0, +\infty[$ sur Γ.

6. 0,75 pts

Montrer que $T(st) = T(s) \times T(t)$ pour tous réels $s > 0$ et $t > 0$. En déduire que $(\Gamma, \times)$ est un groupe commutatif, et préciser son élément neutre et l'inverse de $T(t)$.

INDICE

$T(s) \times T(t)$ est dans Γ (question 4) : quelle est la valeur de $a - b$ pour ce produit ? Utilise ensuite la question 5, puis un résultat de SM12a sur l'image d'un groupe par un morphisme.

CORRIGÉ

Le produit $T(s) \times T(t)$. Soit $s > 0$ et $t > 0$. Écrivons $T(s) = P(a, b)$ et $T(t) = P(c, d)$: alors $a - b = s$ et $c - d = t$ (question 5). D'après la question 4, le produit $P(e, f) = T(s) \times T(t)$ appartient à Γ, et

$$\begin{aligned} e - f &= (a - b)(c - d) \\ &= st. \end{aligned}$$

D'après la question 5, la seule matrice de Γ pour laquelle $e - f = st$ est $T(st)$. Donc $T(s) \times T(t) = T(st)$.

Groupe image. Ainsi T est un morphisme du groupe commutatif $(]0, +\infty[, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$, d'image Γ (question 5). L'image d'un groupe commutatif par un morphisme est un groupe commutatif : $(\Gamma, \times)$ est un groupe commutatif.

Neutre et inverse. Son élément neutre est $T(1) = P(1, 0) = I$. Et $T(t) \times T\left(\frac{1}{t}\right) = T(1) = I$.

Conclusion. $(\Gamma, \times)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre I, et l'inverse de $T(t)$ est $T\left(\frac{1}{t}\right)$.

Exercice 4 4,5 pts

Les matrices qui commutent avec une matrice de carré –I et un corps

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. On rappelle aussi que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \times M = M \times A\}$ des matrices qui commutent avec A.

1. a) 0,5 pts

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : la matrice nulle commute-t-elle avec A ? Pour la combinaison, développe $A \times (\alpha M + \beta N)$ par distributivité.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie E de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Vecteur nul. $A \times O = O = O \times A$, donc $O \in E$.

Combinaison. Soit M et N dans E, et α, β deux réels. On utilise la distributivité, et le fait que $A \times (\lambda P) = \lambda(A \times P)$ et $(\lambda P) \times A = \lambda(P \times A)$ pour tout réel λ et toute matrice P :

$$\begin{aligned} & A \times (\alpha M + \beta N) \\ &= \alpha(A \times M) + \beta(A \times N) \\ &= \alpha(M \times A) + \beta(N \times A) \\ &= (\alpha M + \beta N) \times A. \end{aligned}$$

Ainsi $\alpha M + \beta N \in E$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

1. b) 0,75 pts

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in E$ si et seulement si $y = -2z$ et $t = x - 2z$. En déduire que $E = \mathrm{Vect}(I, A)$.

INDICE

Calcule $A \times M$ et $M \times A$, puis écris les quatre équations obtenues en égalant les coefficients, et résous ce système par substitution.

CORRIGÉ

Les deux produits. On calcule

$$\begin{aligned} &A \times M \\ &= \begin{pmatrix} x - 2z & y - 2t \\ x - z & y - t \end{pmatrix}, \\ &M \times A \\ &= \begin{pmatrix} x + y & -2x - y \\ z + t & -2z - t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Système. Donc $M \in E$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - 2z = x + y \\ y - 2t = -2x - y \\ x - z = z + t \\ y - t = -2z - t \end{cases}$$

La première et la dernière équation s'écrivent toutes deux $y = -2z$; la troisième s'écrit $t = x - 2z$. La deuxième s'écrit $t = x + y$: avec $y = -2z$, c'est encore $t = x - 2z$. Ainsi $M \in E$ si et seulement si $y = -2z$ et $t = x - 2z$.

Forme Vect. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} x & -2z \\ z & x - 2z \end{pmatrix} \\ &= (x - z)I + zA, \end{aligned}$$

car $(x - z)I + zA = \begin{pmatrix} x - z + z & -2z \\ z & x - z - z \end{pmatrix}$. Réciproquement, soit a et b deux réels : $aI + bA = \begin{pmatrix} a + b & -2b \\ b & a - b \end{pmatrix}$ vérifie les deux conditions, car $a - b = (a + b) - 2b$.

Conclusion. Les éléments de E sont exactement les combinaisons linéaires de I et A : $E = \mathrm{Vect}(I, A)$ (méthode M02, écrire un sous-espace sous la forme Vect).

2. 0,5 pts

Montrer que (I, A) est une base de E, puis en déduire la dimension de E.

INDICE

La famille engendre E d'après 1. b). Pour la liberté, écris $\alpha I + \beta A = O$ coefficient par coefficient.

CORRIGÉ

Génératrice. D'après 1. b), $E = \mathrm{Vect}(I, A)$.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta A = O$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & -2\beta \\ \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix} = O.$$

Le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne donne $\beta = 0$, puis le premier coefficient donne $\alpha = 0$.

Conclusion. (I, A) est une base de E (F14, base), et $\dim E = 2$ (F22, dimension).

3. a) 0,25 pts

Vérifier que $A^2 = -I$.

INDICE

Produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: ligne par colonne.

CORRIGÉ

Produit ligne par colonne :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2 & -2+2 \\ 1-1 & -2+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I. \end{aligned}$$

Conclusion. $A^2 = -I$.

3. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tous réels a, b, c et d, $(aI+bA)\times(cI+dA)=(ac-bd)I+(ad+bc)A$. En déduire que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

INDICE

Développe par distributivité dans l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; I commute avec A, et 3. a) donne A^2.

CORRIGÉ

Produit. Soit a, b, c et d des réels. Par distributivité dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, avec $IA=AI=A$ et $A^2=-I$ (3. a)) :

$$\begin{aligned}&(aI+bA)(cI+dA)\\&=acI+adA\\&\quad+bcA+bdA^2\\&=(ac-bd)I\\&\quad+(ad+bc)A.\end{aligned}$$

Stabilité. D'après 1. b), ce produit appartient à $E=\mathrm{Vect}(I,A)$.

Commutativité. Comme $ca-db=ac-bd$ et $cb+da=ad+bc$, le produit est de plus commutatif dans E.

Conclusion. $(aI+bA)\times(cI+dA)=(ac-bd)I+(ad+bc)A$ pour tous réels a, b, c, d, et E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$, sur laquelle le produit est commutatif.

4. 0,75 pts

On considère l'application $\varphi : \mathbb{C} \to E$ définie, pour tous réels a et b, par $\varphi(a+ib) = aI + bA$. Justifier que φ est bien définie et bijective, puis montrer que, pour tous complexes z et z', $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$ et $\varphi(zz') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

INDICE

Un complexe n'a qu'une forme algébrique. Pour la bijection, utilise la base (I, A) de la question 2 ; pour le produit, compare $(a+ib)(c+id)$ avec la formule de 3. b).

CORRIGÉ

Bien définie. Tout complexe z s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec a et b réels (forme algébrique) : $\varphi(z)$ ne dépend que de z, et $\varphi(z) \in E$ d'après 1. b).

Bijective. (I, A) est une base de E (question 2) : toute matrice de E s'écrit de façon unique $aI + bA$ (F15, base et écriture unique), c'est-à-dire qu'elle est l'image par φ d'un unique complexe $a + ib$. Donc φ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur E.

Somme. Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$, avec a, b, c, d réels. Alors $z + z' = (a+c) + i(b+d)$, donc

$$\begin{aligned} &\varphi(z+z') \\ &= (a+c)I + (b+d)A \\ &= \varphi(z) + \varphi(z'). \end{aligned}$$

Produit. De plus $zz' = (ac - bd) + i(ad + bc)$, donc, d'après 3. b) :

$$\begin{aligned} &\varphi(zz') \\ &= (ac-bd)I + (ad+bc)A \\ &= (aI + bA) \times (cI + dA) \\ &= \varphi(z) \times \varphi(z'). \end{aligned}$$

Conclusion. φ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur E, et pour tous complexes z et z', $\varphi(z+z') = \varphi(z) + \varphi(z')$ et $\varphi(zz') = \varphi(z) \times \varphi(z')$.

5. 0,5 pts

On note E^* l'ensemble des matrices non nulles de E, et $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls. Montrer que $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif, puis en déduire que $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

INDICE

Montre que $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$, puis utilise la propriété de SM12a sur l'image d'un groupe commutatif par un morphisme. Pour le corps, rassemble les propriétés de $(E, +)$, de $(E^*, \times)$ et la distributivité.

CORRIGÉ

Image de $\mathbb{C}^*$. On a $\varphi(0) = 0I + 0A = O$. Comme φ est bijective (question 4), $\varphi(z) = O$ si et seulement si $z = 0$; donc $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

Groupe. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et, d'après la question 4, φ est un morphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$, d'image E^*. L'image d'un groupe commutatif par un morphisme est un groupe commutatif : $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $\varphi(1) = I$.

Corps. On rassemble les propriétés :

- E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $(E, +)$ est un groupe commutatif ;
- $\times$ est une loi interne sur E (3. b)), associative et distributive par rapport à $+$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc dans E ;
- $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Conclusion. $(E^*, \times)$ est un groupe commutatif, et $(E, +, \times)$ est un corps commutatif.

6. 0,25 pts

Calculer $(1 + i)^4$, puis en déduire la matrice $(I + A)^4$.

INDICE

$I + A = \varphi(1 + i)$: applique deux fois la propriété du produit de la question 4.

CORRIGÉ

Puissance du complexe. $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, donc $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$.

Puissance de la matrice. Comme $I + A = \varphi(1 + i)$, la propriété du produit (question 4) donne $(I + A)^2 = \varphi\big((1 + i)^2\big)$, puis

$$\begin{aligned}(I + A)^4 &= \big(\varphi\big((1 + i)^2\big)\big)^2 \\ &= \varphi\big((1 + i)^4\big) \\ &= \varphi(-4) = -4I.\end{aligned}$$

Conclusion. $(1 + i)^4 = -4$ et $(I + A)^4 = -4I$.

7. `0,5 pts`

On pose $B = 2I + A$. Justifier que B a un inverse dans $(E^*, \times)$, déterminer les composantes de B^{-1} dans la base (I, A), puis écrire la matrice B^{-1}.

INDICE

$B = \varphi(2+i)$: écris l'inverse du complexe $2+i$ sous forme algébrique, puis applique φ.

CORRIGÉ

Existence de l'inverse. $B = \varphi(2+i)$ et $2+i \neq 0$, donc $B \in E^*$: B a un inverse dans le groupe $(E^*, \times)$ (question 5).

Inverse par φ. Soit z un complexe non nul : $\varphi(z) \times \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right) = \varphi(1) = I$ (question 4). L'inverse de $\varphi(z)$ est donc $\varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+i} &= \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{2-i}{5},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}B^{-1} &= \varphi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) \\ &= \frac{2}{5}I - \frac{1}{5}A.\end{aligned}$$

Conclusion. Les composantes de B^{-1} dans la base (I, A) sont $\left(\dfrac{2}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ (F16, composantes d'un vecteur dans une base), et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \\ -\dfrac{1}{5} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 — 4,5 pts

Un plan de matrices, une seconde base (U, V) et un groupe à quatre éléments

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire, d'unité I. Pour tous réels a et b, on pose

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+2b \end{pmatrix},$$

et on note $W = \{S(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, $U = S(0,1)$ et $V = I - U$.

1. a) — 0,5 pts

Vérifier que $S(a,b) = aI + bU$ pour tous réels a et b, puis en déduire que W est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

INDICE

Écris U, puis calcule $aI + bU$ coefficient par coefficient. Reconnais ensuite un sous-espace engendré.

CORRIGÉ

Écriture. On a $U = S(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Soit a et b deux réels :

$$\begin{aligned} & aI + bU \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & 2b \\ -b & 2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ -b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= S(a,b). \end{aligned}$$

Forme Vect. Les éléments de W sont donc exactement les combinaisons linéaires de I et U : $W = \mathrm{Vect}(I, U)$.

Conclusion. Pour tous réels a et b, $S(a,b) = aI + bU$, et, d'après F09 (le sous-espace engendré par une famille), W est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

1. b) — 0,5 pts

Montrer que (I, U) est une base de W et en déduire $\dim W$.

INDICE

La famille engendre W d'après 1. a). Pour la liberté, lis le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne de $\alpha I + \beta U$.

CORRIGÉ

Génératrice. D'après 1. a), (I, U) engendre W.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha I + \beta U = O$, soit $S(\alpha, \beta) = O$. Le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne donne $2\beta = 0$, donc $\beta = 0$. Le premier coefficient donne alors $\alpha - \beta = \alpha = 0$.

Conclusion. (I, U) est une base de W (F14, base), et $\dim W = 2$ (F22, dimension).

2. 0,5 pts

Vérifier que $U^2 = U$. En déduire que $V \in W$, que $V^2 = V$ et que $U \times V = V \times U = O$.

INDICE

Calcule U^2 ligne par colonne. Pour V, écris V sous la forme $S(a, b)$, puis développe $(I - U)^2$ et $U(I - U)$ par distributivité.

CORRIGÉ

Carré de U. Produit ligne par colonne :

$$\begin{aligned} U^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2 & -2+4 \\ 1-2 & -2+4 \end{pmatrix} = U. \end{aligned}$$

La matrice V. $V = I - U = 1 \cdot I + (-1) \cdot U = S(1, -1)$, donc $V \in W$, et $V = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Produits. Par distributivité dans l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, avec $IU = UI = U$ et $U^2 = U$:

$$\begin{aligned} V^2 &= I - 2U + U^2 \\ &= I - U = V, \\ U \times V &= U - U^2 = O, \\ V \times U &= U - U^2 = O. \end{aligned}$$

Conclusion. $U^2 = U$, $V \in W$, $V^2 = V$ et $U \times V = V \times U = O$.

3. 0,5 pts

Montrer que (U, V) est une base de W.

INDICE

W est de dimension 2 (1. b)) : d'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), il suffit de prouver que la famille est libre. Multiplie une relation $xU + yV = O$ par U, puis par V.

CORRIGÉ

Liberté. U et V appartiennent à W. Soit x et y deux réels tels que $xU + yV = O$.

- En multipliant à gauche par U, avec $U^2 = U$ et $U \times V = O$ (question 2), on obtient $xU = O$. Comme $U \neq O$, les règles de calcul (F02) donnent $x = 0$.
- En multipliant à gauche par V, avec $V \times U = O$ et $V^2 = V$, on obtient $yV = O$. Comme $V \neq O$, $y = 0$.

La famille (U, V) est libre.

Conclusion. C'est une famille libre de deux vecteurs de W, et $\dim W = 2$: d'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), (U, V) est une base de W.

4. 0,5 pts

Déterminer les composantes de $S(a,b)$ dans la base (U,V). Montrer ensuite que, pour tous réels x, y, x' et y', $(xU+yV)\times(x'U+y'V)=xx'U+yy'V$, et en déduire que W est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

INDICE

Remplace I par $U+V$ dans $aI+bU$. Pour le produit, développe par distributivité et utilise la question 2.

CORRIGÉ

Composantes. Soit a et b deux réels. Comme $I=U+V$:

$$\begin{aligned} S(a,b) &= aI+bU \\ &= a(U+V)+bU \\ &= (a+b)U+aV. \end{aligned}$$

Les composantes de $S(a,b)$ dans la base (U,V) sont donc $(a+b,a)$ (F16, composantes d'un vecteur dans une base).

Produit. Soit x, y, x' et y' des réels. Par distributivité, avec $U^2=U$, $V^2=V$ et $U\times V=V\times U=O$ (question 2), $(xU+yV)\times(x'U+y'V)$ vaut

$$\begin{aligned} &xx'U^2+xy'UV \\ &\quad+yx'VU+yy'V^2 \\ &=xx'U+yy'V. \end{aligned}$$

Conclusion. Les composantes de $S(a,b)$ dans la base (U,V) sont $(a+b,a)$, et $(xU+yV)\times(x'U+y'V)=xx'U+yy'V$ pour tous réels x, y, x', y'. Ce produit appartient à $W=\mathrm{Vect}(U,V)$: W est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$, et le produit y est commutatif.

5. 0,75 pts

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls et $G = \{xU + yV \mid x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^*\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe commutatif ; donner son élément neutre et l'inverse de $xU + yV$.

INDICE

Utilise la formule du produit de la question 4 et écris I dans la base (U, V). Vérifie ensuite les axiomes d'un groupe un à un.

CORRIGÉ

Soit $N = xU + yV$ et $N' = x'U + y'V$ dans G, avec x, y, x', y' réels non nuls.

- **Loi interne.** $N \times N' = xx'U + yy'V$ (question 4), avec $xx' \neq 0$ et $yy' \neq 0$: $N \times N' \in G$.
- **Associativité.** Le produit des matrices est associatif dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc dans G.
- **Neutre.** $I = U + V = 1 \cdot U + 1 \cdot V \in G$, et $I \times N = N \times I = N$.
- **Symétrique.** $N'' = \dfrac{1}{x}U + \dfrac{1}{y}V$ appartient à G, et $N \times N'' = N'' \times N = U + V = I$ (question 4).
- **Commutativité.** $xx'U + yy'V = x'xU + y'yV$, donc $N \times N' = N' \times N$.

Conclusion. $(G, \times)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre I, et l'inverse de $xU + yV$ est $\dfrac{1}{x}U + \dfrac{1}{y}V$.

6. 0,5 pts

Pour tous réels non nuls x et y, on pose $\varphi(xU + yV) = xy$. Justifier que cela définit une application φ de G dans $\mathbb{R}^*$, puis montrer que φ est un morphisme surjectif de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

INDICE

La base (U, V) de la question 3 donne des composantes uniques (F15, base et écriture unique). Pour la surjectivité, cherche un antécédent de la forme $tU + V$.

CORRIGÉ

Application. (U, V) est une base de W (question 3) : toute matrice de G s'écrit $xU + yV$ pour un **unique** couple (x, y) (F15, base et écriture unique), avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Le réel xy, non nul, ne dépend donc que de la matrice.

Morphisme. Soit $N = xU + yV$ et $N' = x'U + y'V$ dans G. D'après la question 4 :

$$\begin{aligned} &\varphi(N \times N') \\ &= \varphi(xx'U + yy'V) \\ &= xx'yy' = (xy)(x'y') \\ &= \varphi(N)\varphi(N'). \end{aligned}$$

Surjectivité. Soit t un réel non nul : $tU + V \in G$ et $\varphi(tU + V) = t$.

Conclusion. φ est une application de G dans $\mathbb{R}^*$, et c'est un morphisme surjectif de $(G, \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$.

7. 0,75 pts

On note $H = \{N \in W \mid N^2 = I\}$. Montrer que H contient exactement quatre matrices, que l'on écrira, puis que H est un sous-groupe de $(G, \times)$. Calculer $\varphi(N)$ pour chaque matrice N de H.

INDICE

Écris $N = xU + yV$: la question 4 donne N^2, et $I = U + V$. Compare ensuite les composantes dans la base (U, V).

CORRIGÉ

Les éléments de H. Soit $N = xU + yV$ dans W. D'après la question 4, $N^2 = x^2U + y^2V$, et $I = U + V$. Par unicité des composantes dans la base (U, V) (F15), $N^2 = I$ si et seulement si $x^2 = 1$ et $y^2 = 1$, c'est-à-dire $x \in \{-1, 1\}$ et $y \in \{-1, 1\}$. Les quatre couples donnent quatre matrices distinctes :

$$H = \{I, -I, U - V, V - U\},$$

car $U + V = I$ et $-U - V = -I$, avec

$$U - V = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$V - U = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sous-groupe.

- Les composantes des éléments de H valent 1 ou -1 : $H \subset G$, et $I \in H$.
- Si $N = xU + yV$ et $N' = x'U + y'V$ sont dans H, alors $N \times N' = xx'U + yy'V$ avec $(xx')^2 = 1$ et $(yy')^2 = 1$: $N \times N' \in H$.
- L'inverse de N dans G est $\frac{1}{x}U + \frac{1}{y}V = xU + yV = N$, car $\frac{1}{x} = x$ lorsque $x^2 = 1$ (de même pour y) : il appartient à H.

Donc H est un sous-groupe de $(G, \times)$.

Valeurs de φ. $\varphi(I) = 1 \times 1 = 1$, $\varphi(-I) = (-1) \times (-1) = 1$, $\varphi(U - V) = 1 \times (-1) = -1$ et $\varphi(V - U) = (-1) \times 1 = -1$.

Conclusion. $H = \{I, -I, U - V, V - U\}$ est un sous-groupe de $(G, \times)$, et φ vaut 1 sur I et $-I$, -1 sur $U - V$ et $V - U$.