BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Entraînement	7

Exercice 1

Des matrices dont les deux lignes ont la même somme

On considère la partie F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a+b=c+d$, et les matrices

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : la matrice nulle, puis $\alpha M+\beta M'$ pour M et M' dans F. Écris les coefficients de $\alpha M+\beta M'$ et compare la somme de sa première ligne à celle de sa seconde.

2.

Montrer que $F=\mathrm{Vect}(I,P,Q)$.

INDICE

Dans F, le coefficient d s'exprime avec a, b et c : $d=a+b-c$. Écris alors M comme somme d'un terme en a, d'un terme en b et d'un terme en c.

3.

Montrer que (I,P,Q) est une base de F. En déduire la dimension de F.

INDICE

Il reste la liberté. Écris $\alpha I+\beta P+\gamma Q$ sous forme d'une seule matrice et lis ses trois premiers coefficients.

4.

Justifier que $F\neq\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de deux façons : par la dimension, puis par une matrice élémentaire.

INDICE

Compare $\dim F$ à $\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec F25 (dimension d'un sous-espace). Pour la seconde façon, teste la condition $a+b=c+d$ sur E_{11}.

Exercice 2

Fonctions polynômes de degré au plus 2 qui s'annulent en 2

Dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (F05, espace des fonctions), on note $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont réels, et

$$G = \{f \in \mathcal{P} \mid f(2) = 0\}.$$

1.

Justifier que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

INDICE

Pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = af_2(x) + bf_1(x) + cf_0(x)$. Traduis cette égalité de nombres en une égalité de fonctions.

2.

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. En déduire la dimension de $\mathcal{P}$.

INDICE

Suppose $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2$ égale à la fonction nulle : elle s'annule en **tout** réel. Choisis $x = 0$, puis $x = 1$ et $x = -1$.

3.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) dans l'espace $\mathcal{P}$: son vecteur nul est la fonction nulle. Pour la combinaison, calcule $(\alpha f + \beta g)(2)$ avec la définition des opérations sur les fonctions.

4.

On note $g_1 : x \mapsto x^2 - 4$ et $g_2 : x \mapsto x - 2$. Montrer que (g_1, g_2) est une base de G. Quelle est la dimension de G ?

INDICE

Pour $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, la condition $f(2) = 0$ s'écrit $4a + 2b + c = 0$: exprime c, puis regroupe les termes en a et en b. Pour la liberté, choisis deux valeurs de x, par exemple 0 et 3.

Exercice 3

Une famille libre selon la valeur d'un paramètre

Pour tout réel m, on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 1, 2),$$
$$v = (2, -1, 1),$$
$$w_m = (m, 3, 5).$$

1.

Montrer que la famille (u, v) est libre.

INDICE

Deux vecteurs : utilise les familles de deux vecteurs (F11). Cherche si un réel λ peut vérifier $v = \lambda u$, puis $u = \lambda v$.

2.

Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w_m = (0, 0, 0)$. Montrer que $\alpha = -8\beta$, $\gamma = 3\beta$ et $(3m - 6)\beta = 0$.

INDICE

Écris les trois équations. La deuxième donne α en fonction de β et γ ; substitue dans la troisième, qui ne contient pas m.

3.

En déduire, selon la valeur de m, si la famille (u, v, w_m) est libre ou liée. Pour la valeur où elle est liée, donner une relation de dépendance linéaire et écrire w_m comme combinaison linéaire de u et v.

INDICE

Discute selon que le facteur $3m - 6$ est nul ou non, et applique à chaque cas la définition d'une famille libre ou liée.

4.

Montrer que, pour $m \neq 2$, la famille (u, v, w_m) est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Compte les vecteurs et rappelle la dimension de $\mathbb{R}^3$. Une seule propriété suffit alors (F24, familles de n vecteurs en dimension n).

Exercice 4

Composantes dans une base non canonique de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\varepsilon_1 = (1, -1, 0),$$
$$\varepsilon_2 = (0, 1, 2),$$
$$\varepsilon_3 = (1, 0, 3),$$

et la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Trois vecteurs en dimension 3 : prouve la liberté, puis cite F24 (familles de n vecteurs en dimension n). Dans le système, exprime β et γ en fonction de α.

2.

Déterminer les composantes du vecteur $u = (5, -3, 7)$ dans la base $\mathcal{B}$.

INDICE

Écris $u = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$: trois équations. Exprime x_2 et x_3 en fonction de x_1, puis utilise l'équation qui reste.

3.

Plus généralement, déterminer les composantes d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

INDICE

Même système avec le second membre (x, y, z). Exprime d'abord x_2 et x_3 en fonction de x_1, puis isole x_1.

4.

En utilisant les composantes, déterminer les composantes de $v = 3u - \varepsilon_1$ dans $\mathcal{B}$. Contrôler avec la question 3.

INDICE

Dans $\mathcal{B}$, ε_1 a pour composantes $(1, 0, 0)$. Applique F17 (composantes d'une somme et d'un produit par un réel) : d'abord le produit par un réel, puis la somme.

Exercice 5

L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- l'ensemble F des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x + y - 3z = 0$;
- $G = \mathrm{Vect}\big((2, 1, 1), (3, 0, 2)\big)$.

1.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 0), (0, 3, 1)\big)$. En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

L'équation de F donne $y = -2x + 3z$. Écris (x, y, z) comme combinaison d'un vecteur multiplié par x et d'un vecteur multiplié par z.

2.

Soit E un espace vectoriel réel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) pour $F_1 \cap F_2$. Un vecteur est dans l'intersection s'il est dans F_1 **et** dans F_2 : applique la caractérisation à chacun des deux.

3.

Déterminer $F \cap G$.

INDICE

Un vecteur de G s'écrit $a(2, 1, 1) + b(3, 0, 2)$. Calcule ses composantes, puis écris la condition pour qu'il vérifie l'équation de F.

4.

Donner une base et la dimension de $F \cap G$. Le sous-espace $F \cap G$ est-il égal à F ?

INDICE

Un seul vecteur non nul : F11 (famille d'un vecteur) donne la liberté. Pour la comparaison, utilise la dimension de F, lue sur la question 1, et F25 (dimension d'un sous-espace).

Exercice 6

$\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel réel

On considère l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (F04), de dimension 2 (F22, dimension), et les nombres complexes $\omega_1 = 1 + 2i$ et $\omega_2 = 3 - i$.

1.

Montrer que (ω_1, ω_2) est une base de $\mathbb{C}$.

INDICE

Si $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = 0$, avec α et β réels, sépare la partie réelle et la partie imaginaire. Termine avec F24 (familles de n vecteurs en dimension n).

2.

Déterminer les composantes de $z = 7 + 7i$ dans la base (ω_1, ω_2).

INDICE

Cherche les réels x_1 et x_2 tels que $z = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$: identifie les parties réelles, puis les parties imaginaires.

3.

Soit D l'ensemble des nombres complexes $a + ib$, avec a et b réels, tels que $b = 2a$. Montrer que $D = \mathrm{Vect}(\omega_1)$, puis donner sa dimension et les composantes de ses éléments dans la base (ω_1, ω_2).

INDICE

Un élément de D s'écrit $a + 2ai$: factorise par le réel a. Pour les composantes, écris cet élément avec ω_1 et ω_2.

4.

Montrer que la partie $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

INDICE

U contient 0 : le test du vecteur nul ne conclut pas. Multiplie un élément de U par un réel bien choisi.

Exercice 7

Quatre matrices dans un espace de dimension 4

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$: la liberté suffit (F24, familles de n vecteurs en dimension n). Écris $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$ comme une seule matrice, puis exprime tout en fonction de α_1.

2.

Déterminer les composantes de la matrice identité I dans la base (A_1, A_2, A_3, A_4).

INDICE

Reprends la matrice de la question 1 et égale-la à I : quatre équations. Exprime x_2, x_3 et x_4 en fonction de x_1.

3.

Sans calcul, justifier que la famille (A_1, A_2, A_3) n'engendre pas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que la famille (A_1, A_2, A_3, A_4, I) est liée. Donner une relation de dépendance de cette dernière.

INDICE

Compare le nombre de matrices de chaque famille à la dimension 4 : les deux points de F23 (familles libres et génératrices en dimension n). La question 2 fournit la relation.