BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Entraînement	7

Exercice 1

Des matrices dont les deux lignes ont la même somme

On considère la partie F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a+b=c+d$, et les matrices

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : la matrice nulle, puis $\alpha M+\beta M'$ pour M et M' dans F. Écris les coefficients de $\alpha M+\beta M'$ et compare la somme de sa première ligne à celle de sa seconde.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Vecteur nul. Pour la matrice nulle O, $0+0=0+0$: donc $O\in F$.

Combinaison. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans F, et α, β deux réels. Alors $a+b=c+d$ et $a'+b'=c'+d'$.

Les coefficients de $\alpha M+\beta M'$ sont $\alpha a+\beta a'$, $\alpha b+\beta b'$ (première ligne) et $\alpha c+\beta c'$, $\alpha d+\beta d'$ (seconde ligne). La somme de la première ligne vaut

$$\begin{aligned} &\alpha(a+b)+\beta(a'+b') \\ &=\alpha(c+d)+\beta(c'+d'), \end{aligned}$$

qui est la somme de la seconde ligne. Donc $\alpha M+\beta M'\in F$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}(I, P, Q)$.

INDICE

Dans F, le coefficient d s'exprime avec a, b et c : $d = a + b - c$. Écris alors M comme somme d'un terme en a, d'un terme en b et d'un terme en c.

CORRIGÉ

Inclusion $F \subset \mathrm{Vect}(I, P, Q)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$. Alors $d = a + b - c$, et

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & a + b - c \end{pmatrix} \\ &= aI + bP + cQ, \end{aligned}$$

car $aI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, bP = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $cQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$.

Inclusion $\mathrm{Vect}(I, P, Q) \subset F$. I, P et Q appartiennent à F : $1 + 0 = 0 + 1$, $0 + 1 = 0 + 1$ et $0 + 0 = 1 - 1$. Comme F est un sous-espace vectoriel (question 1), il contient toutes leurs combinaisons linéaires (F09, sous-espace engendré).

Conclusion. Les deux inclusions donnent $F = \mathrm{Vect}(I, P, Q)$.

3.

Montrer que (I, P, Q) est une base de F. En déduire la dimension de F.

INDICE

Il reste la liberté. Écris $\alpha I + \beta P + \gamma Q$ sous forme d'une seule matrice et lis ses trois premiers coefficients.

CORRIGÉ

Liberté. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha I + \beta P + \gamma Q = O$. D'après le calcul de la question 2, la matrice $\alpha I + \beta P + \gamma Q$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha + \beta - \gamma \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est nulle, donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$: la famille (I, P, Q) est libre.

Base. Elle est libre et engendre F (question 2) : c'est une base de F (F14, base).

Conclusion. (I, P, Q) est une base de F, et $\dim F = 3$ (F22, dimension).

4.

Justifier que $F \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de deux façons : par la dimension, puis par une matrice élémentaire.

INDICE

Compare $\dim F$ à $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec F25 (dimension d'un sous-espace). Pour la seconde façon, teste la condition $a+b=c+d$ sur E_{11}.

CORRIGÉ

Par la dimension. $\dim F = 3$ et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ (F22). D'après F25 (dimension d'un sous-espace vectoriel), le sous-espace F est égal à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\dim F = 4$. Ici $3 \neq 4$.

Par une matrice. Pour E_{11}, la première ligne a pour somme $1+0=1$ et la seconde $0+0=0$. Donc $E_{11} \notin F$, alors que $E_{11} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion. Par chacune des deux façons, $F \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Fonctions polynômes de degré au plus 2 qui s'annulent en 2

Dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (F05, espace des fonctions), on note $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont réels, et

$$G = \{f \in \mathcal{P} \mid f(2) = 0\}.$$

1.

Justifier que $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

INDICE

Pour tout x réel, $ax^2 + bx + c = af_2(x) + bf_1(x) + cf_0(x)$. Traduis cette égalité de nombres en une égalité de fonctions.

CORRIGÉ

Égalité de fonctions. Soit a, b et c des réels. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &ax^2 + bx + c \\ &= cf_0(x) + bf_1(x) \\ &\quad + af_2(x). \end{aligned}$$

D'après la définition des opérations de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (F05), la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est donc la fonction $cf_0 + bf_1 + af_2$.

Égalité des ensembles. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont donc exactement les combinaisons linéaires de f_0, f_1 et f_2 : $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$.

Conclusion. Le sous-espace engendré par une famille est un sous-espace vectoriel (F09) : $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2.

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre. En déduire la dimension de $\mathcal{P}$.

INDICE

Suppose $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2$ égale à la fonction nulle : elle s'annule en **tout** réel. Choisis $x = 0$, puis $x = 1$ et $x = -1$.

CORRIGÉ

Valeurs particulières. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha f_0 + \beta f_1 + \gamma f_2$ soit la fonction nulle. Pour tout réel x, $\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$. En particulier :

- pour $x = 0$: $\alpha = 0$;
- pour $x = 1$: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, donc $\beta + \gamma = 0$;
- pour $x = -1$: $\alpha - \beta + \gamma = 0$, donc $-\beta + \gamma = 0$.

Liberté. En additionnant les deux dernières égalités, $2\gamma = 0$: $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$. La famille (f_0, f_1, f_2) est libre.

Conclusion. Elle engendre $\mathcal{P}$ (question 1) : c'est une base de $\mathcal{P}$ (F14, base), et $\dim \mathcal{P} = 3$ (F22, dimension).

3.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) dans l'espace $\mathcal{P}$: son vecteur nul est la fonction nulle. Pour la combinaison, calcule $(\alpha f + \beta g)(2)$ avec la définition des opérations sur les fonctions.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie G de $\mathcal{P}$.

Vecteur nul. La fonction nulle appartient à $\mathcal{P}$ (avec $a = b = c = 0$) et vaut 0 en 2 : elle appartient à G.

Combinaison. Soit f et g dans G, et α, β deux réels. Comme $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel, $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$. De plus, d'après la définition des opérations sur les fonctions (F05) :

$$\begin{aligned}&(\alpha f + \beta g)(2)\\ &= \alpha f(2) + \beta g(2)\\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\alpha f + \beta g \in G$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

4.

On note $g_1 : x \mapsto x^2 - 4$ et $g_2 : x \mapsto x - 2$. Montrer que (g_1, g_2) est une base de G. Quelle est la dimension de G ?

INDICE

Pour $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, la condition $f(2) = 0$ s'écrit $4a + 2b + c = 0$: exprime c, puis regroupe les termes en a et en b. Pour la liberté, choisis deux valeurs de x, par exemple 0 et 3.

CORRIGÉ

Famille génératrice. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ dans $\mathcal{P}$. Alors $f \in G$ si et seulement si $4a + 2b + c = 0$, soit $c = -4a - 2b$. Dans ce cas, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx \\ &\quad - 4a - 2b \\ &= a(x^2 - 4) + b(x - 2) \\ &= a g_1(x) + b g_2(x). \end{aligned}$$

Donc $f = a g_1 + b g_2$. Réciproquement, $g_1(2) = 0$ et $g_2(2) = 0$: g_1 et g_2 sont dans le sous-espace G, qui contient donc $\mathrm{Vect}(g_1, g_2)$ (F09). Ainsi $G = \mathrm{Vect}(g_1, g_2)$.

Liberté. Soit α et β deux réels tels que $\alpha g_1 + \beta g_2$ soit la fonction nulle. Sa valeur en 0 donne $-4\alpha - 2\beta = 0$, et sa valeur en 3 donne $5\alpha + \beta = 0$. La seconde égalité donne $\beta = -5\alpha$; la première devient $-4\alpha + 10\alpha = 6\alpha = 0$. Donc $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$.

Conclusion. (g_1, g_2) est une base de G (F14, base) et $\dim G = 2$ (F22, dimension).

Exercice 3

Une famille libre selon la valeur d'un paramètre

Pour tout réel m, on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (1, 1, 2),$$
$$v = (2, -1, 1),$$
$$w_m = (m, 3, 5).$$

1.

Montrer que la famille (u, v) est libre.

INDICE

Deux vecteurs : utilise les familles de deux vecteurs (F11). Cherche si un réel λ peut vérifier $v = \lambda u$, puis $u = \lambda v$.

CORRIGÉ

v multiple de u ? Si $v = \lambda u$, alors $\lambda = 2$ (première composante) et $\lambda = -1$ (deuxième) : impossible.

u multiple de v ? Si $u = \lambda v$, alors $2\lambda = 1$ et $-\lambda = 1$: impossible.

Conclusion. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires : d'après les familles de deux vecteurs (F11), la famille (u, v) est libre.

2.

Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w_m = (0, 0, 0)$. Montrer que $\alpha = -8\beta$, $\gamma = 3\beta$ et $(3m - 6)\beta = 0$.

INDICE

Écris les trois équations. La deuxième donne α en fonction de β et γ ; substitue dans la troisième, qui ne contient pas m.

CORRIGÉ

Système. Composante par composante, l'égalité s'écrit :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + m\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

Expression de γ et α. La deuxième équation donne $\alpha = \beta - 3\gamma$. La troisième devient $2\beta - 6\gamma + \beta + 5\gamma = 0$, soit $3\beta - \gamma = 0$: $\gamma = 3\beta$. Alors $\alpha = \beta - 9\beta = -8\beta$.

Première équation. Elle devient $-8\beta + 2\beta + 3m\beta = 0$.

Conclusion. $\alpha = -8\beta$, $\gamma = 3\beta$ et $(3m - 6)\beta = 0$.

3.

En déduire, selon la valeur de m, si la famille (u, v, w_m) est libre ou liée. Pour la valeur où elle est liée, donner une relation de dépendance linéaire et écrire w_m comme combinaison linéaire de u et v.

INDICE

Discute selon que le facteur $3m - 6$ est nul ou non, et applique à chaque cas la définition d'une famille libre ou liée.

CORRIGÉ

On discute selon la valeur de m, à partir de la question 2.

- **Si $m \neq 2$.** Alors $3m - 6 \neq 0$, donc $\beta = 0$, puis $\gamma = 0$ et $\alpha = 0$. La seule solution est nulle : la famille (u, v, w_m) est libre (F10, famille libre).
- **Si $m = 2$.** La condition $(3m - 6)\beta = 0$ est vraie pour tout réel β. Avec $\beta = 1$: $\alpha = -8$ et $\gamma = 3$. On vérifie, composante par composante, que $-8u + v + 3w_2$ vaut

$$\begin{aligned}&(-8 + 2 + 6,\\ &\ -8 - 1 + 9,\\ &\ -16 + 1 + 15)\\ &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

  La relation $-8u + v + 3w_2 = (0, 0, 0)$ a des coefficients non tous nuls : la famille (u, v, w_2) est liée (F10, famille liée).

Conclusion. La famille (u, v, w_m) est libre si $m \neq 2$, liée si $m = 2$. Dans ce cas, $-8u + v + 3w_2 = (0, 0, 0)$, d'où $w_2 = \dfrac{8}{3}u - \dfrac{1}{3}v$.

4.

Montrer que, pour $m \neq 2$, la famille (u, v, w_m) est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Compte les vecteurs et rappelle la dimension de $\mathbb{R}^3$. Une seule propriété suffit alors (F24, familles de n vecteurs en dimension n).

CORRIGÉ

Soit $m \neq 2$. D'après la question 3, (u, v, w_m) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (F22, dimension).

Conclusion. D'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), pour $m \neq 2$, la famille (u, v, w_m) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Composantes dans une base non canonique de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$\varepsilon_1 = (1, -1, 0),$$
$$\varepsilon_2 = (0, 1, 2),$$
$$\varepsilon_3 = (1, 0, 3),$$

et la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1.

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Trois vecteurs en dimension 3 : prouve la liberté, puis cite F24 (familles de n vecteurs en dimension n). Dans le système, exprime β et γ en fonction de α.

CORRIGÉ

Liberté. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma\varepsilon_3 = (0, 0, 0)$, soit

$$(\alpha + \gamma, -\alpha + \beta, 2\beta + 3\gamma) = (0, 0, 0).$$

La première composante donne $\gamma = -\alpha$, et la deuxième $\beta = \alpha$. La troisième devient $2\alpha - 3\alpha = -\alpha = 0$. Donc $\alpha = 0$, puis $\beta = \gamma = 0$: la famille $\mathcal{B}$ est libre.

Conclusion. $\mathcal{B}$ est une famille libre de trois vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (F22). D'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

Déterminer les composantes du vecteur $u = (5, -3, 7)$ dans la base $\mathcal{B}$.

INDICE

Écris $u = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$: trois équations. Exprime x_2 et x_3 en fonction de x_1, puis utilise l'équation qui reste.

CORRIGÉ

Système. On cherche des réels x_1, x_2 et x_3 tels que $u = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 = -3 \\ 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $x_3 = 5 - x_1$, la deuxième $x_2 = x_1 - 3$. La troisième devient $2x_1 - 6 + 15 - 3x_1 = 7$, soit $-x_1 + 9 = 7$: donc $x_1 = 2$, puis $x_2 = -1$ et $x_3 = 3$.

Contrôle. $2(1, -1, 0) - (0, 1, 2) + 3(1, 0, 3) = (5, -3, 7)$.

Conclusion. Par unicité de l'écriture dans une base (F15), les composantes de u dans $\mathcal{B}$ sont $(2, -1, 3)$.

3.

Plus généralement, déterminer les composantes d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

INDICE

Même système avec le second membre (x, y, z). Exprime d'abord x_2 et x_3 en fonction de x_1, puis isole x_1.

CORRIGÉ

Système. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On résout $x_1 + x_3 = x$, $-x_1 + x_2 = y$ et $2x_2 + 3x_3 = z$.

Résolution. On a $x_3 = x - x_1$ et $x_2 = y + x_1$, donc la troisième équation devient $2y + 2x_1 + 3x - 3x_1 = z$, soit $x_1 = 3x + 2y - z$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x + 2y - z, \\ x_2 &= 3x + 3y - z, \\ x_3 &= -2x - 2y + z. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $(5, -3, 7)$, on retrouve $(2, -1, 3)$.

Conclusion. Les composantes de (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ sont $(3x + 2y - z, 3x + 3y - z, -2x - 2y + z)$.

4.

En utilisant les composantes, déterminer les composantes de $v = 3u - \varepsilon_1$ dans $\mathcal{B}$. Contrôler avec la question 3.

INDICE

Dans $\mathcal{B}$, ε_1 a pour composantes $(1, 0, 0)$. Applique F17 (composantes d'une somme et d'un produit par un réel) : d'abord le produit par un réel, puis la somme.

CORRIGÉ

Composantes connues. Dans $\mathcal{B}$, u a pour composantes $(2, -1, 3)$, et $\varepsilon_1 = 1 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$ a pour composantes $(1, 0, 0)$.

Composantes de v. D'après F17 (composantes d'une somme et d'un produit par un réel), $v = 3u + (-1)\varepsilon_1$ a pour composantes

$$\begin{aligned}&(3 \times 2 - 1,\\ &3 \times (-1) - 0,\\ &3 \times 3 - 0) = (5, -3, 9).\end{aligned}$$

Contrôle. $v = (15, -9, 21) - (1, -1, 0) = (14, -8, 21)$. Les formules de la question 3 donnent $42 - 16 - 21 = 5$, $42 - 24 - 21 = -3$ et $-28 + 16 + 21 = 9$.

Conclusion. Les composantes de v dans $\mathcal{B}$ sont $(5, -3, 9)$.

Exercice 5

L'intersection de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère :

- l'ensemble F des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $2x + y - 3z = 0$;
- $G = \mathrm{Vect}\big((2, 1, 1), (3, 0, 2)\big)$.

1.

Montrer que $F = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 0), (0, 3, 1)\big)$. En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

L'équation de F donne $y = -2x + 3z$. Écris (x, y, z) comme combinaison d'un vecteur multiplié par x et d'un vecteur multiplié par z.

CORRIGÉ

Forme Vect. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $y = -2x + 3z$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned}&(x, y, z)\\ &= (x, -2x + 3z, z)\\ &= x(1, -2, 0)\\ &\quad + z(0, 3, 1).\end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 0), (0, 3, 1)\big)$.

Conclusion. F et G sont deux sous-espaces engendrés par des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: d'après F09 (le sous-espace engendré par une famille), ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2.

Soit E un espace vectoriel réel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

INDICE

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) pour $F_1 \cap F_2$. Un vecteur est dans l'intersection s'il est dans F_1 **et** dans F_2 : applique la caractérisation à chacun des deux.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie $F_1 \cap F_2$ de E.

Vecteur nul. F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels, donc $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$ (F07). Ainsi $0_E \in F_1 \cap F_2$.

Combinaison. Soit u et v dans $F_1 \cap F_2$, et α, β deux réels. Comme u et v sont dans le sous-espace vectoriel F_1, $\alpha u + \beta v \in F_1$ (F07). De même, $\alpha u + \beta v \in F_2$. Donc $\alpha u + \beta v \in F_1 \cap F_2$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

3.

Déterminer $F \cap G$.

INDICE

Un vecteur de G s'écrit $a(2,1,1)+b(3,0,2)$. Calcule ses composantes, puis écris la condition pour qu'il vérifie l'équation de F.

CORRIGÉ

Vecteur de G. Un vecteur w de G s'écrit, avec a et b réels,

$$\begin{aligned} w &= a(2,1,1) \\ &\quad + b(3,0,2) \\ &= (2a+3b, a, a+2b). \end{aligned}$$

Condition d'appartenance à F. $w \in F$ si et seulement si $2(2a+3b)+a-3(a+2b)=0$. Or

$$\begin{aligned} &2(2a+3b)+a \\ &\quad -3(a+2b) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Donc $w \in F$ si et seulement si $a=0$.

Conclusion. Les vecteurs de $F \cap G$ sont les vecteurs $b(3,0,2)$, avec b réel : $F \cap G = \mathrm{Vect}\big((3,0,2)\big)$.

4.

Donner une base et la dimension de $F \cap G$. Le sous-espace $F \cap G$ est-il égal à F ?

INDICE

Un seul vecteur non nul : F11 (famille d'un vecteur) donne la liberté. Pour la comparaison, utilise la dimension de F, lue sur la question 1, et F25 (dimension d'un sous-espace).

CORRIGÉ

Base de $F \cap G$. Le vecteur $(3,0,2)$ n'est pas nul : la famille $\big((3,0,2)\big)$ est libre (F11, famille d'un vecteur). Elle engendre $F \cap G$ (question 3) : c'est une base de $F \cap G$, et $\dim(F \cap G) = 1$ (F22, dimension).

Dimension de F. Les vecteurs $(1,-2,0)$ et $(0,3,1)$ ne sont pas colinéaires : un multiple de $(0,3,1)$ a une première composante nulle, et $(0,3,1)$ n'est pas un multiple de $(1,-2,0)$, dont tout multiple non nul a une première composante non nulle. Ils forment donc une base de F (question 1), et $\dim F = 2$.

Comparaison. $F \cap G$ est un sous-espace de F de dimension $1 \neq 2$: d'après F25 (dimension d'un sous-espace vectoriel), $F \cap G \neq F$. Par exemple, $(1,-2,0) \in F$, mais il n'est pas colinéaire à $(3,0,2)$.

Conclusion. $\big((3,0,2)\big)$ est une base de $F \cap G$, $\dim(F \cap G) = 1$, et $F \cap G$ n'est pas égal à F.

Exercice 6

$\mathbb{C}$ vu comme un espace vectoriel réel

On considère l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (F04), de dimension 2 (F22, dimension), et les nombres complexes $\omega_1 = 1 + 2i$ et $\omega_2 = 3 - i$.

1.

Montrer que (ω_1, ω_2) est une base de $\mathbb{C}$.

INDICE

Si $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = 0$, avec α et β réels, sépare la partie réelle et la partie imaginaire. Termine avec F24 (familles de n vecteurs en dimension n).

CORRIGÉ

Liberté. Soit α et β deux réels tels que $\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}&\alpha(1 + 2i) + \beta(3 - i)\\ &= (\alpha + 3\beta) + (2\alpha - \beta)i.\end{aligned}$$

Ce nombre est nul, et $\alpha + 3\beta$, $2\alpha - \beta$ sont réels : donc $\alpha + 3\beta = 0$ et $2\alpha - \beta = 0$. La seconde égalité donne $\beta = 2\alpha$; la première devient $7\alpha = 0$. Donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$: la famille est libre.

Conclusion. C'est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{C}$, et $\dim \mathbb{C} = 2$: d'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), (ω_1, ω_2) est une base de $\mathbb{C}$.

2.

Déterminer les composantes de $z = 7 + 7i$ dans la base (ω_1, ω_2).

INDICE

Cherche les réels x_1 et x_2 tels que $z = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$: identifie les parties réelles, puis les parties imaginaires.

CORRIGÉ

Système. On cherche des réels x_1 et x_2 tels que $z = x_1\omega_1 + x_2\omega_2$, soit $(x_1 + 3x_2) + (2x_1 - x_2)i = 7 + 7i$. Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

Résolution. La seconde équation donne $x_2 = 2x_1 - 7$; la première devient $7x_1 - 21 = 7$, donc $x_1 = 4$, puis $x_2 = 1$. Contrôle : $4(1 + 2i) + (3 - i) = 7 + 7i$.

Conclusion. Par unicité de l'écriture dans une base (F15), les composantes de z dans (ω_1, ω_2) sont $(4, 1)$.

3.

Soit D l'ensemble des nombres complexes $a+ib$, avec a et b réels, tels que $b=2a$. Montrer que $D=\mathrm{Vect}(\omega_1)$, puis donner sa dimension et les composantes de ses éléments dans la base (ω_1,ω_2).

INDICE

Un élément de D s'écrit $a+2ai$: factorise par le réel a. Pour les composantes, écris cet élément avec ω_1 et ω_2.

CORRIGÉ

Forme Vect. Soit a et b deux réels. Le nombre $a+ib$ appartient à D si et seulement si $b=2a$, c'est-à-dire s'il s'écrit $a+2ai=a(1+2i)=a\,\omega_1$. Donc $D=\mathrm{Vect}(\omega_1)$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ (F09, sous-espace engendré).

Dimension. Comme $\omega_1\neq 0$, la famille (ω_1) est libre (F11, famille d'un vecteur) et engendre D : c'est une base de D, et $\dim D=1$ (F22).

Composantes. Soit a un réel. $a\,\omega_1=a\,\omega_1+0\,\omega_2$: ses composantes dans (ω_1,ω_2) sont $(a,0)$.

Conclusion. $D=\mathrm{Vect}(\omega_1)$, $\dim D=1$, et l'élément $a\,\omega_1$ de D a pour composantes $(a,0)$ dans la base (ω_1,ω_2).

4.

Montrer que la partie $U=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

INDICE

U contient 0 : le test du vecteur nul ne conclut pas. Multiplie un élément de U par un réel bien choisi.

CORRIGÉ

Vecteur nul. $|0|=0\leq 1$, donc $0\in U$: ce test ne conclut pas.

Produit par un réel. $1\in U$, car $|1|=1$. Mais $2\cdot 1=2$ et $|2|=2>1$: $2\cdot 1\notin U$.

Conclusion. La condition de la caractérisation (F07), avec $u=v=1$, $\alpha=2$ et $\beta=0$, est fausse, puisque $2\cdot 1+0\cdot 1=2\notin U$: U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

Exercice 7

Quatre matrices dans un espace de dimension 4

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$: la liberté suffit (F24, familles de n vecteurs en dimension n). Écris $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4$ comme une seule matrice, puis exprime tout en fonction de α_1.

CORRIGÉ

Combinaison. Soit α_1, α_2, α_3 et α_4 des réels tels que $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O$. Le premier membre est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_4 & -\alpha_1 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 - \alpha_3 & \alpha_3 + \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Résolution. Les quatre coefficients sont nuls. Le deuxième donne $\alpha_2 = \alpha_1$, le troisième $\alpha_3 = 2\alpha_2 = 2\alpha_1$, le quatrième $\alpha_4 = -\alpha_3 = -2\alpha_1$. Le premier devient $\alpha_1 - 4\alpha_1 = -3\alpha_1 = 0$. Ainsi $\alpha_1 = 0$, puis $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$: la famille est libre.

Conclusion. (A_1, A_2, A_3, A_4) est une famille libre de quatre vecteurs, et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ (F22). D'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.

Déterminer les composantes de la matrice identité I dans la base (A_1, A_2, A_3, A_4).

INDICE

Reprends la matrice de la question 1 et égale-la à I : quatre équations. Exprime x_2, x_3 et x_4 en fonction de x_1.

CORRIGÉ

Système. On cherche des réels x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 = I$. D'après le calcul de la question 1 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Résolution. La deuxième équation donne $x_2 = x_1$, la troisième $x_3 = 2x_1$, la dernière $x_4 = 1 - 2x_1$. La première devient $x_1 + 2 - 4x_1 = 1$, donc $x_1 = \dfrac{1}{3}$, puis $x_2 = \dfrac{1}{3}$, $x_3 = \dfrac{2}{3}$ et $x_4 = \dfrac{1}{3}$.

Contrôle. $A_1 + A_2 + 2A_3 + A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$.

Conclusion. Par unicité de l'écriture dans une base (F15), les composantes de I dans (A_1, A_2, A_3, A_4) sont $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

3.

Sans calcul, justifier que la famille (A_1, A_2, A_3) n'engendre pas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que la famille (A_1, A_2, A_3, A_4, I) est liée. Donner une relation de dépendance de cette dernière.

INDICE

Compare le nombre de matrices de chaque famille à la dimension 4 : les deux points de F23 (familles libres et génératrices en dimension n). La question 2 fournit la relation.

CORRIGÉ

On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. D'après F23 (familles libres et génératrices en dimension n) :

- une famille génératrice a au moins quatre vecteurs : la famille (A_1, A_2, A_3), de trois matrices, n'engendre pas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
- une famille libre a au plus quatre vecteurs : la famille (A_1, A_2, A_3, A_4, I), de cinq matrices, est liée.

Relation. D'après la question 2, $3I = A_1 + A_2 + 2A_3 + A_4$, donc

$$\begin{aligned} &A_1 + A_2 + 2A_3 \\ &\quad + A_4 - 3I = O. \end{aligned}$$

Conclusion. (A_1, A_2, A_3) n'engendre pas $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et (A_1, A_2, A_3, A_4, I) est liée : $A_1 + A_2 + 2A_3 + A_4 - 3I = O$ est une relation de dépendance, à coefficients non tous nuls.