BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Application	10

Exercice 1

Vecteurs nuls et calcul avec les règles

Dans les questions 2 à 4, $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel, et u, v sont deux vecteurs de E.

1.

Donner le vecteur nul de chacun des espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

INDICE

Le vecteur nul est l'élément neutre de l'addition de l'espace (F01, définition d'un espace vectoriel réel). Dans chaque espace, cherche l'élément qui ne change rien quand on l'ajoute.

2.

Montrer que $3(u - 2v) - 2(2u - 5v) = -u + 4v$, en nommant chaque règle utilisée.

INDICE

Développe chaque produit par la règle $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ des règles de calcul (F02), puis par l'axiome $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$. Regroupe ensuite les termes en u et les termes en v.

3.

Déterminer le vecteur x de E tel que $5x + 2u = 3x - 4v$.

INDICE

Ajoute le vecteur $-3x - 2u$ aux deux membres : tu obtiens une égalité de la forme $2x = \ldots$. Multiplie ensuite les deux membres par le réel $\frac{1}{2}$.

4.

Soit α un réel non nul et w un vecteur de E tel que $\alpha u = \alpha w$. Montrer que $u = w$.

INDICE

Fais passer αw dans le premier membre et factorise par α avec les règles de calcul (F02). Cherche ensuite, dans ces règles, quand un produit $\alpha \cdot z$ est nul.

Exercice 2

Deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par des équations

On considère les parties F et G de $\mathbb{R}^3$ suivantes.

- F est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$3x - 5y + 2z = 0.$$
- G est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$2x + y = 0 \quad \text{et} \quad y - 4z = 0.$$

1.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Utilise la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : vérifie d'abord que $(0, 0, 0) \in F$. Prends ensuite $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F, des réels α et β, et calcule $3X - 5Y + 2Z$ pour $\alpha u + \beta u' = (X, Y, Z)$.

2.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Même méthode, mais un vecteur de G vérifie **deux** équations : il faut contrôler les deux pour $\alpha u + \beta u'$.

3.

Le vecteur $w = (3, 1, -2)$ appartient-il à F ? à G ?

INDICE

Remplace x, y et z par les composantes de w dans chaque équation. Pour G, une seule équation fausse suffit à conclure.

Exercice 3

Trois parties de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des sous-espaces

On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

- H_1, ensemble des (x, y) tels que $2x - 3y = 6$;
- H_2, ensemble des (x, y) tels que $x^2 = 9y^2$;
- H_3, ensemble des (x, y) tels que $x + 2y \geq 0$.

1.

Montrer que H_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Commence par le test le plus rapide : le vecteur nul $(0, 0)$ vérifie-t-il l'équation de H_1 ?

2.

Vérifier que $(0, 0) \in H_2$, puis montrer que H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Le vecteur nul ne suffit pas. Cherche deux vecteurs de H_2 dont la somme sort de H_2 ; essaie des vecteurs de même première composante.

3.

Montrer que H_3 contient $(0, 0)$ et qu'il est stable pour l'addition, mais qu'il n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

La somme de deux réels positifs ou nuls est positive ou nulle. Pour conclure, multiplie un vecteur bien choisi de H_3 par un réel négatif.

Exercice 4

Écrire un ensemble sous la forme Vect(…)

On considère les parties de $\mathbb{R}^3$:

- F est l'ensemble des vecteurs $(2a+b, a-3b, 5b)$, où a et b décrivent $\mathbb{R}$;
- G est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = 4y - 3z$.

1.

Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Sépare, dans $(2a+b, a-3b, 5b)$, ce qui est multiplié par a et ce qui est multiplié par b.

2.

Montrer que $G = \mathrm{Vect}\big((4,1,0), (-3,0,1)\big)$.

INDICE

L'équation donne x en fonction de y et z : un vecteur de G s'écrit $(4y-3z, y, z)$. Sépare ensuite les termes en y et en z, puis vérifie la réciproque.

3.

Les vecteurs $(5,2,1)$ et $(2,1,1)$ appartiennent-ils à G ? Pour celui qui y appartient, l'écrire comme combinaison linéaire des deux vecteurs de la question 2.

INDICE

Teste l'équation $x = 4y - 3z$. Pour le vecteur qui la vérifie, les coefficients sont lisibles sur la deuxième et la troisième composante.

Exercice 5

Familles de deux vecteurs : libres ou liées ?

1.

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v), avec $u = (3, -2, 5)$ et $v = (-6, 4, -10)$, est-elle libre ou liée ?

INDICE

Compare chaque composante de v à celle de u : un même réel λ convient-il pour les trois ?

2.

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille (u', w), avec $u' = (1, 4, -2)$ et $w = (2, 7, -4)$, est libre.

INDICE

Écris $\alpha u' + \beta w = (0, 0, 0)$ et traduis-le composante par composante. La première équation donne α en fonction de β.

3.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la famille (A, B), avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, est-elle libre ou liée ?

INDICE

Compare d'abord les premières lignes, puis vérifie les autres coefficients avant de conclure. Résous $\alpha A + \beta B = O$ coefficient par coefficient.

Exercice 6

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1),$$
$$u_2 = (0, 3, 2),$$
$$u_3 = (2, 1, -4),$$
$$w = (2, 1, 3).$$

1.

Calculer $2u_1 - u_2$. En déduire que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée et donner une relation de dépendance linéaire.

INDICE

Calcule composante par composante et compare le résultat à u_3. Une relation de dépendance a des coefficients non tous nuls.

2.

Montrer que la famille (u_1, u_2, w) est libre.

INDICE

Écris $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w = (0, 0, 0)$: trois équations. La première donne α en fonction de γ ; substitue dans les deux autres.

3.

Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

INDICE

La question 1 écrit u_3 comme combinaison linéaire de u_1 et u_2. Cherche l'énoncé du cours qui permet alors de retirer u_3.

Exercice 7

Composantes dans une base nommée

1.

Donner les composantes de la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

Écris M comme somme de quatre matrices ayant chacune un seul coefficient éventuellement non nul.

2.

Donner les composantes du nombre complexe $z = (3 - 2i)(1 + i)$ dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$.

INDICE

Mets d'abord z sous forme algébrique $a + ib$, avec $i^2 = -1$.

3.

On admet que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = (1, 2)$ et $e'_2 = (1, 3)$, est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les composantes de $u = (5, 13)$ dans $\mathcal{B}$.

INDICE

Cherche les réels x_1 et x_2 tels que $u = x_1 e'_1 + x_2 e'_2$: deux équations. La première donne x_1 en fonction de x_2.

Exercice 8

La base (1, i) de $\mathbb{C}$ et la dimension de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est muni de l'addition et du produit d'un nombre complexe par un réel : c'est un espace vectoriel réel (F04, l'espace vectoriel $\mathbb{C}$).

1.

Montrer, à partir de la définition, que la famille $(1, i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

INDICE

Deux propriétés à vérifier. Génératrice : écris z sous forme algébrique. Libre : si $\alpha + \beta i = 0$ avec α et β réels, que dire de la partie réelle et de la partie imaginaire ?

2.

En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

INDICE

La dimension est le nombre de vecteurs d'une base (F22, dimension d'un espace vectoriel).

3.

Sans calcul, justifier que la famille $(1, i, 2 - 3i)$ est liée. Écrire ensuite une relation de dépendance linéaire.

INDICE

Compte les vecteurs et compare à la dimension avec F23 (familles libres en dimension n). Pour la relation, écris $2 - 3i$ à l'aide de 1 et de i.

Exercice 9

Bases en dimension connue

1.

Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3), avec $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (3, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 2, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et la famille a trois vecteurs : il suffit de prouver la liberté. Dans le système, la deuxième équation donne β en fonction de γ.

2.

Montrer que la famille $\big((5, 2), (-1, 3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Deux vecteurs dans un espace de dimension 2. Pour la liberté de deux vecteurs, F11 (familles de deux vecteurs) suffit : sont-ils colinéaires ?

Exercice 10

Dimension d'un sous-espace par une base exhibée

On considère les parties de $\mathbb{R}^3$:

- F est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - 2y + 5z = 0$;
- G est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

1. a)

Écrire F sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$.

INDICE

Exprime x en fonction de y et z, puis sépare les termes en y et en z.

1. b)

En déduire une base et la dimension de F.

INDICE

La famille de 1. a) engendre F. Pour la liberté, regarde la deuxième et la troisième composante d'une combinaison nulle.

2.

Résoudre le système qui définit G. En déduire une base et la dimension de G.

INDICE

La première équation donne $z = x + 2y$. Substitue dans la seconde : tu obtiens une relation entre x et y seulement.