BURHAN

Espaces vectoriels réels : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Espaces vectoriels réels	Application	10

Exercice 1

Vecteurs nuls et calcul avec les règles

Dans les questions 2 à 4, $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel, et u, v sont deux vecteurs de E.

1.

Donner le vecteur nul de chacun des espaces vectoriels réels $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

INDICE

Le vecteur nul est l'élément neutre de l'addition de l'espace (F01, définition d'un espace vectoriel réel). Dans chaque espace, cherche l'élément qui ne change rien quand on l'ajoute.

CORRIGÉ

Dans chaque espace, le vecteur nul est l'élément neutre de l'addition (espaces de référence F03, F04 et F05).

- Dans $\mathbb{R}^3$: le triplet $(0, 0, 0)$.
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: la matrice nulle $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dans $\mathbb{C}$: le nombre complexe 0.
- Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: la fonction nulle $x \mapsto 0$.

Conclusion. Le vecteur nul dépend de l'espace : le réel 0 n'est pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ (W01, le réel 0 et le vecteur nul).

2.

Montrer que $3(u-2v)-2(2u-5v)=-u+4v$, en nommant chaque règle utilisée.

INDICE

Développe chaque produit par la règle $\alpha(u-v)=\alpha u-\alpha v$ des règles de calcul (F02), puis par l'axiome $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$. Regroupe ensuite les termes en u et les termes en v.

CORRIGÉ

Notons $X=3(u-2v)-2(2u-5v)$.

Développement. D'après les règles de calcul (F02), puis l'axiome $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ de la définition (F01) :

$$\begin{aligned}3(u-2v)&=3u-3(2v)\\&=3u-6v,\end{aligned}$$

et de même $2(2u-5v)=4u-10v$.

Regroupement. Dans le groupe commutatif $(E,+)$, l'opposé de $4u-10v$ est $-4u+10v$. On peut donc regrouper :

$$\begin{aligned}X=&(3u-4u)\\&+(10v-6v).\end{aligned}$$

Réduction. D'après les règles de calcul (F02), $3u-4u=(3-4)u=-u$ et $10v-6v=(10-6)v=4v$.

Conclusion. $3(u-2v)-2(2u-5v)=-u+4v$.

3.

Déterminer le vecteur x de E tel que $5x+2u=3x-4v$.

INDICE

Ajoute le vecteur $-3x-2u$ aux deux membres : tu obtiens une égalité de la forme $2x=\ldots$. Multiplie ensuite les deux membres par le réel $\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Isoler le terme en x. Dans le groupe $(E,+)$, on ajoute $-3x-2u$ aux deux membres. L'égalité $5x+2u=3x-4v$ équivaut à

$$5x-3x=-2u-4v.$$

D'après les règles de calcul (F02), $5x-3x=(5-3)x=2x$: l'égalité équivaut donc à $2x=-2u-4v$.

Diviser par 2. On multiplie les deux membres par le réel $\dfrac{1}{2}$, ce qui donne une égalité équivalente. D'après la définition (F01), $\dfrac{1}{2}(2x)=\left(\dfrac{1}{2}\times 2\right)x=1\cdot x=x$, et $\dfrac{1}{2}(-2u-4v)=-u-2v$. L'égalité équivaut donc à $x=-u-2v$.

Contrôle. $5(-u-2v)+2u=-3u-10v$ et $3(-u-2v)-4v=-3u-10v$.

Conclusion. Le seul vecteur x de E qui convient est $x=-u-2v$.

4.

Soit α un réel non nul et w un vecteur de E tel que $\alpha u = \alpha w$. Montrer que $u = w$.

INDICE

Fais passer αw dans le premier membre et factorise par α avec les règles de calcul (F02). Cherche ensuite, dans ces règles, quand un produit $\alpha \cdot z$ est nul.

CORRIGÉ

Factorisation. Par hypothèse, $\alpha u = \alpha w$, donc $\alpha u - \alpha w = 0_E$. D'après les règles de calcul (F02), $\alpha u - \alpha w = \alpha(u - w)$. Ainsi :

$$\alpha(u - w) = 0_E.$$

Produit nul. D'après les règles de calcul (F02), $\alpha(u - w) = 0_E$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $u - w = 0_E$. Or $\alpha \neq 0$ par hypothèse, donc $u - w = 0_E$.

Conclusion. $u = w$.

Exercice 2

Deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par des équations

On considère les parties F et G de $\mathbb{R}^3$ suivantes.

- F est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$3x - 5y + 2z = 0.$$
- G est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$2x + y = 0 \quad \text{et} \quad y - 4z = 0.$$

1.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Utilise la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) : vérifie d'abord que $(0, 0, 0) \in F$. Prends ensuite $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F, des réels α et β, et calcule $3X - 5Y + 2Z$ pour $\alpha u + \beta u' = (X, Y, Z)$.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie F de $\mathbb{R}^3$.

Vecteur nul. $3 \times 0 - 5 \times 0 + 2 \times 0 = 0$, donc $(0, 0, 0) \in F$.

Combinaison. Soit $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans F, et α, β deux réels. Alors $3x - 5y + 2z = 0$ et $3x' - 5y' + 2z' = 0$. Posons $\alpha u + \beta u' = (X, Y, Z)$, avec $X = \alpha x + \beta x'$, $Y = \alpha y + \beta y'$ et $Z = \alpha z + \beta z'$. En regroupant les termes en α et en β :

$$\begin{aligned} &3X - 5Y + 2Z \\ &= \alpha(3x - 5y + 2z) \\ &\quad + \beta(3x' - 5y' + 2z') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\alpha u + \beta u' \in F$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Même méthode, mais un vecteur de G vérifie **deux** équations : il faut contrôler les deux pour $\alpha u + \beta u'$.

CORRIGÉ

On applique la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07) à la partie G de $\mathbb{R}^3$.

Vecteur nul. $2 \times 0 + 0 = 0$ et $0 - 4 \times 0 = 0$, donc $(0, 0, 0) \in G$.

Combinaison. Soit $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$ dans G, et α, β deux réels. Alors $2x + y = 0$, $y - 4z = 0$, $2x' + y' = 0$ et $y' - 4z' = 0$. Posons $\alpha u + \beta u' = (X, Y, Z)$, avec $X = \alpha x + \beta x'$, $Y = \alpha y + \beta y'$ et $Z = \alpha z + \beta z'$. Alors :

$$\begin{aligned} 2X + Y &= \alpha(2x + y) \\ &\quad + \beta(2x' + y') \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y - 4Z &= \alpha(y - 4z) \\ &\quad + \beta(y' - 4z') \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\alpha u + \beta u' \in G$.

Conclusion. D'après la caractérisation (F07), G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3.

Le vecteur $w = (3, 1, -2)$ appartient-il à F ? à G ?

INDICE

Remplace x, y et z par les composantes de w dans chaque équation. Pour G, une seule équation fausse suffit à conclure.

CORRIGÉ

Dans F. $3 \times 3 - 5 \times 1 + 2 \times (-2) = 9 - 5 - 4 = 0$: l'équation de F est vérifiée.

Dans G. $2 \times 3 + 1 = 7 \neq 0$: la première équation de G n'est pas vérifiée.

Conclusion. $w \in F$ et $w \notin G$.

Exercice 3

Trois parties de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas des sous-espaces

On considère les parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

- H_1, ensemble des (x, y) tels que $2x - 3y = 6$;
- H_2, ensemble des (x, y) tels que $x^2 = 9y^2$;
- H_3, ensemble des (x, y) tels que $x + 2y \geq 0$.

1.

Montrer que H_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

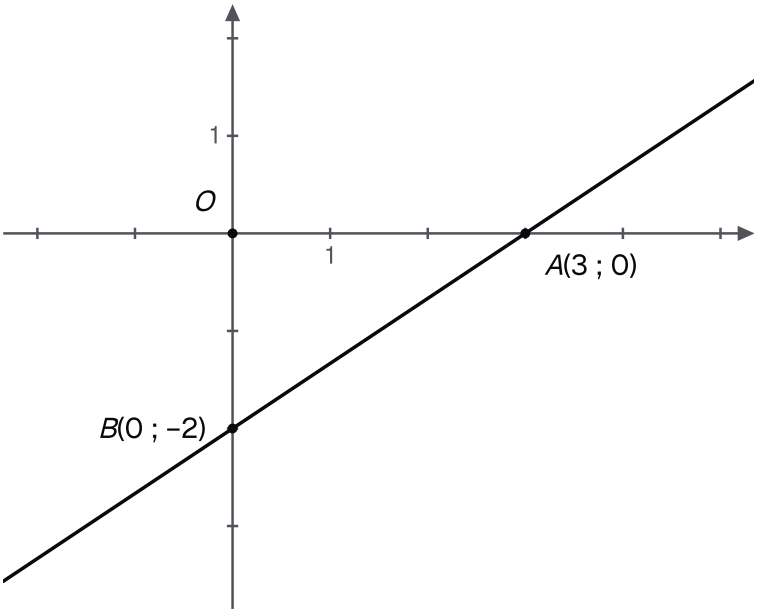
Commence par le test le plus rapide : le vecteur nul $(0, 0)$ vérifie-t-il l'équation de H_1 ?

CORRIGÉ

On a $2 \times 0 - 3 \times 0 = 0 \neq 6$, donc $(0, 0) \notin H_1$.

D'après la caractérisation d'un sous-espace vectoriel (F07), un sous-espace vectoriel contient le vecteur nul.

Conclusion. H_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.



H_1 est la droite d'équation 2x − 3y = 6 : elle coupe les axes en (3 ; 0) et en (0 ; −2), et ne passe pas par l'origine.

2.

Vérifier que $(0,0) \in H_2$, puis montrer que H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Le vecteur nul ne suffit pas. Cherche deux vecteurs de H_2 dont la somme sort de H_2 ; essaie des vecteurs de même première composante.

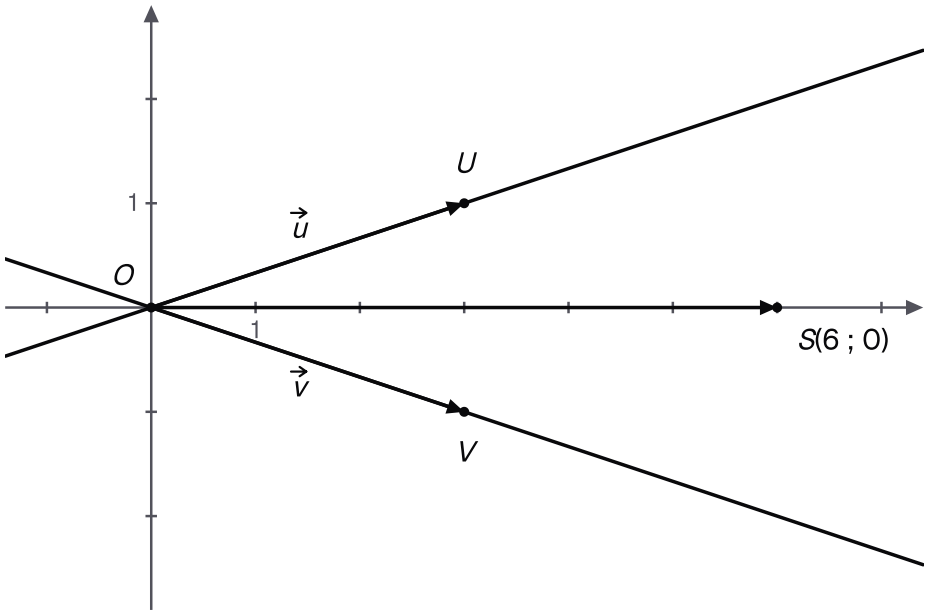
CORRIGÉ

Vecteur nul. $0^2 = 9 \times 0^2$, donc $(0,0) \in H_2$: ce test ne conclut pas (W02, contenir le vecteur nul ne suffit pas).

Deux vecteurs de H_2. Prenons $u = (3,1)$ et $v = (3,-1)$. On a $3^2 = 9 = 9 \times 1^2$ et $3^2 = 9 = 9 \times (-1)^2$, donc $u \in H_2$ et $v \in H_2$.

Leur somme. $u + v = (6,0)$, et $6^2 = 36$ alors que $9 \times 0^2 = 0$. Donc $u + v \notin H_2$.

Conclusion. La condition de la caractérisation (F07), avec $\alpha = \beta = 1$, est fausse : H_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.



H_2 est la réunion des deux droites d'équations x = 3y et x = −3y. Les vecteurs u = (3, 1) et v = (3, −1) y sont, mais leur somme, d'extrémité S(6 ; 0), est sur l'axe des abscisses, hors de H_2.

3.

Montrer que H_3 contient $(0,0)$ et qu'il est stable pour l'addition, mais qu'il n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

La somme de deux réels positifs ou nuls est positive ou nulle. Pour conclure, multiplie un vecteur bien choisi de H_3 par un réel négatif.

CORRIGÉ

Vecteur nul. $0 + 2 \times 0 = 0 \geq 0$, donc $(0,0) \in H_3$.

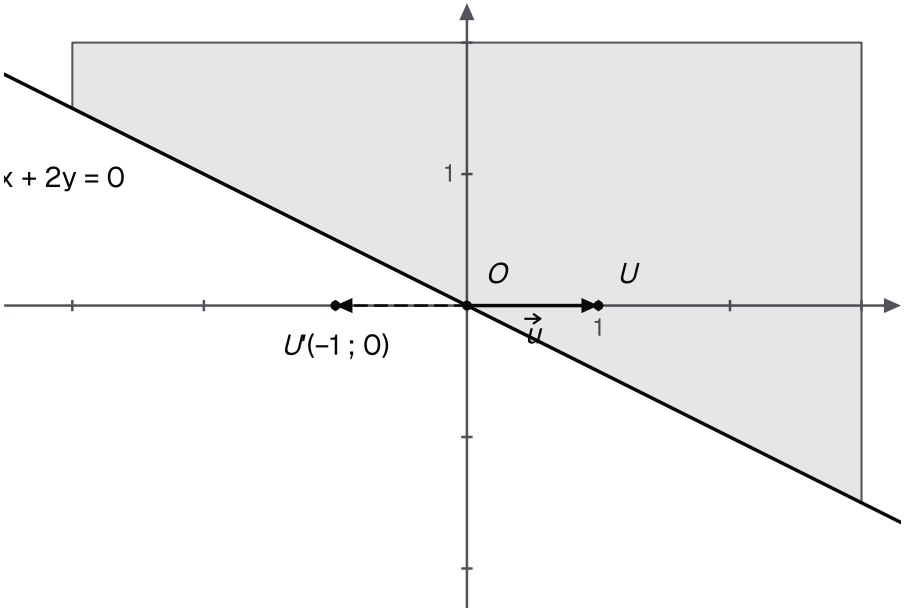
Stabilité pour l'addition. Soit (x, y) et (x', y') dans H_3 : $x + 2y \geq 0$ et $x' + 2y' \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned}&(x + x') + 2(y + y') \\ &= (x + 2y) + (x' + 2y') \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

donc la somme $(x + x', y + y')$ est dans H_3.

Produit par un réel négatif. $u = (1,0)$ est dans H_3, car $1 + 0 = 1 \geq 0$. Mais $(-1)u = (-1,0)$ et $-1 + 2 \times 0 = -1 < 0$, donc $(-1)u \notin H_3$.

Conclusion. La condition de la caractérisation (F07), avec $v = u$, $\alpha = -1$ et $\beta = 0$, est fausse, puisque $(-1)u + 0 \cdot u = (-1)u \notin H_3$: H_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.



H_3 est le demi-plan teinté, au-dessus de la droite d'équation x + 2y = 0, bord compris. Le vecteur u = (1, 0) y est, mais son opposé, d'extrémité U'(–1 ; 0), en sort.

Exercice 4

Écrire un ensemble sous la forme Vect(…)

On considère les parties de $\mathbb{R}^3$:

- F est l'ensemble des vecteurs $(2a+b, a-3b, 5b)$, où a et b décrivent $\mathbb{R}$;
- G est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x = 4y - 3z$.

1.

Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

Sépare, dans $(2a+b, a-3b, 5b)$, ce qui est multiplié par a et ce qui est multiplié par b.

CORRIGÉ

Décomposition. Soit a et b deux réels. On sépare les termes en a et en b :

$$\begin{aligned}(2a+b, a-3b, 5b) &= (2a, a, 0) \\ &\quad + (b, -3b, 5b) \\ &= a(2,1,0) \\ &\quad + b(1,-3,5).\end{aligned}$$

Égalité des ensembles. Posons $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (1,-3,5)$. Tout élément de F s'écrit donc $a(2,1,0) + b(1,-3,5) = au_1 + bu_2$: c'est une combinaison linéaire de u_1 et u_2. Réciproquement, toute combinaison $au_1 + bu_2$ s'écrit $(2a+b, a-3b, 5b)$: elle appartient à F. Ainsi $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Conclusion. Avec $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (1,-3,5)$, on a $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Le sous-espace engendré par une famille est un sous-espace vectoriel (F09) : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.

Montrer que $G = \mathrm{Vect}\big((4,1,0),(-3,0,1)\big)$.

INDICE

L'équation donne x en fonction de y et z : un vecteur de G s'écrit $(4y-3z,y,z)$. Sépare ensuite les termes en y et en z, puis vérifie la réciproque.

CORRIGÉ

Notons $V = \mathrm{Vect}\big((4,1,0),(-3,0,1)\big)$.

Inclusion $G \subset V$. Soit $(x,y,z) \in G$. Alors $x = 4y - 3z$, donc

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= (4y-3z,y,z)\\ &= y(4,1,0)\\ &\quad + z(-3,0,1).\end{aligned}$$

Ainsi $(x,y,z) \in V$.

Inclusion $V \subset G$. Soit β et γ deux réels. Alors $\beta(4,1,0)+\gamma(-3,0,1) = (4\beta-3\gamma,\beta,\gamma)$. Sa première composante vaut $4\beta-3\gamma$: ce vecteur appartient à G.

Conclusion. Les deux inclusions donnent $G = \mathrm{Vect}\big((4,1,0),(-3,0,1)\big)$.

3.

Les vecteurs $(5,2,1)$ et $(2,1,1)$ appartiennent-ils à G ? Pour celui qui y appartient, l'écrire comme combinaison linéaire des deux vecteurs de la question 2.

INDICE

Teste l'équation $x = 4y - 3z$. Pour le vecteur qui la vérifie, les coefficients sont lisibles sur la deuxième et la troisième composante.

CORRIGÉ

Le vecteur $(5,2,1)$. $4\times 2 - 3\times 1 = 5$: l'équation de G est vérifiée, donc $(5,2,1) \in G$. D'après la question 2, avec $y=2$ et $z=1$:

$$\begin{aligned}(5,2,1) &= 2(4,1,0)\\ &\quad + 1\cdot(-3,0,1).\end{aligned}$$

Le vecteur $(2,1,1)$. $4\times 1 - 3\times 1 = 1 \neq 2$, donc $(2,1,1) \notin G$.

Conclusion. Seul $(5,2,1)$ appartient à G, et $(5,2,1) = 2(4,1,0) + 1\cdot(-3,0,1)$.

Exercice 5

Familles de deux vecteurs : libres ou liées ?

1.

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille (u, v), avec $u = (3, -2, 5)$ et $v = (-6, 4, -10)$, est-elle libre ou liée ?

INDICE

Compare chaque composante de v à celle de u : un même réel λ convient-il pour les trois ?

CORRIGÉ

Colinéarité. On a $-6 = -2 \times 3$, $4 = -2 \times (-2)$ et $-10 = -2 \times 5$, donc $v = -2u$.

Relation de dépendance. $2u + v = (0, 0, 0)$, à coefficients 2 et 1 non nuls.

Conclusion. u et v sont colinéaires : d'après les familles de deux vecteurs (F11), la famille (u, v) est liée.

2.

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille (u', w), avec $u' = (1, 4, -2)$ et $w = (2, 7, -4)$, est libre.

INDICE

Écris $\alpha u' + \beta w = (0, 0, 0)$ et traduis-le composante par composante. La première équation donne α en fonction de β.

CORRIGÉ

Système. Soit α et β deux réels tels que $\alpha u' + \beta w = (0, 0, 0)$. Composante par composante :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ 4\alpha + 7\beta = 0 \\ -2\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $\alpha = -2\beta$. Dans la deuxième : $-8\beta + 7\beta = -\beta = 0$, donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Conclusion. La seule solution est $\alpha = \beta = 0$: d'après la définition d'une famille libre (F10), la famille (u', w) est libre.

3.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la famille (A, B), avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, est-elle libre ou liée ?

INDICE

Compare d'abord les premières lignes, puis vérifie les autres coefficients avant de conclure. Résous $\alpha A + \beta B = O$ coefficient par coefficient.

CORRIGÉ

Combinaison. Soit α et β deux réels tels que $\alpha A + \beta B = O$. La matrice $\alpha A + \beta B$ vaut

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 4\beta & -\alpha + 2\beta \\ 0 & 3\alpha + 6\beta \end{pmatrix}.$$

Coefficient par coefficient : $2\alpha - 4\beta = 0$, $-\alpha + 2\beta = 0$ et $3\alpha + 6\beta = 0$.

Résolution. La deuxième équation donne $\alpha = 2\beta$. Dans la troisième : $6\beta + 6\beta = 12\beta = 0$, donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

Remarque. La proportionnalité des premières lignes ne suffisait pas : $-2A$ a pour dernier coefficient -6, et non 6.

Conclusion. La seule solution est $\alpha = \beta = 0$: la famille (A, B) est libre (F10, famille libre).

Exercice 6

Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 2, -1),$$
$$u_2 = (0, 3, 2),$$
$$u_3 = (2, 1, -4),$$
$$w = (2, 1, 3).$$

1.

Calculer $2u_1 - u_2$. En déduire que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée et donner une relation de dépendance linéaire.

INDICE

Calcule composante par composante et compare le résultat à u_3. Une relation de dépendance a des coefficients non tous nuls.

CORRIGÉ

Calcul. Composante par composante :

$$\begin{aligned} &2u_1 - u_2 \\ &= (2 - 0, 4 - 3, -2 - 2) \\ &= (2, 1, -4) \\ &= u_3. \end{aligned}$$

Relation. Donc $2u_1 - u_2 - u_3 = (0, 0, 0)$, et les coefficients 2, -1 et -1 ne sont pas tous nuls.

Conclusion. $2u_1 - u_2 - u_3 = (0, 0, 0)$ est une relation de dépendance linéaire : d'après la définition d'une famille liée (F10), la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

2.

Montrer que la famille (u_1, u_2, w) est libre.

INDICE

Écris $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w = (0,0,0)$: trois équations. La première donne α en fonction de γ ; substitue dans les deux autres.

CORRIGÉ

Système. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma w = (0,0,0)$. Composante par composante :

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $\alpha = -2\gamma$. La deuxième devient $-4\gamma + 3\beta + \gamma = 0$, soit $\beta = \gamma$. La troisième devient $2\gamma + 2\gamma + 3\gamma = 7\gamma = 0$, donc $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\alpha = 0$.

Conclusion. La seule solution est nulle : d'après la définition d'une famille libre (F10), la famille (u_1, u_2, w) est libre.

3.

Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

INDICE

La question 1 écrit u_3 comme combinaison linéaire de u_1 et u_2. Cherche l'énoncé du cours qui permet alors de retirer u_3.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $u_3 = 2u_1 - u_2$: le dernier vecteur de la famille (u_1, u_2, u_3) est une combinaison linéaire des deux premiers.

D'après la propriété « ajouter ou retirer un vecteur » (F13), on peut le retirer sans changer le sous-espace engendré.

Conclusion. $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

Exercice 7

Composantes dans une base nommée

1.

Donner les composantes de la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

INDICE

Écris M comme somme de quatre matrices ayant chacune un seul coefficient éventuellement non nul.

CORRIGÉ

Décomposition. On écrit M comme somme de quatre matrices à un seul coefficient éventuellement non nul :

$$\begin{aligned} M = {} & 5E_{11} - 2E_{12} \\ & + 7E_{21} + 0E_{22}, \end{aligned}$$

où $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Unicité. $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (F18, bases de référence) : cette écriture est unique (F15, base et écriture unique).

Conclusion. Les composantes de M dans cette base sont $(5, -2, 7, 0)$.

2.

Donner les composantes du nombre complexe $z = (3 - 2i)(1 + i)$ dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$.

INDICE

Mets d'abord z sous forme algébrique $a + ib$, avec $i^2 = -1$.

CORRIGÉ

Forme algébrique. Avec $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z &= 3 + 3i - 2i - 2i^2 \\ &= 3 + i + 2 \\ &= 5 + i. \end{aligned}$$

Donc $z = 5 \cdot 1 + 1 \cdot i$, avec 5 et 1 réels.

Conclusion. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ (F18, bases de référence) : les composantes de z dans cette base sont $(5, 1)$.

3.

On admet que $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$, avec $e'_1 = (1, 2)$ et $e'_2 = (1, 3)$, est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer les composantes de $u = (5, 13)$ dans $\mathcal{B}$.

INDICE

Cherche les réels x_1 et x_2 tels que $u = x_1 e'_1 + x_2 e'_2$: deux équations. La première donne x_1 en fonction de x_2.

CORRIGÉ

Système. On cherche les réels x_1 et x_2 tels que $x_1(1, 2) + x_2(1, 3) = (5, 13)$, soit

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases}$$

Résolution. La première équation donne $x_1 = 5 - x_2$; la seconde devient $10 + x_2 = 13$, donc $x_2 = 3$, puis $x_1 = 2$. Contrôle : $2(1, 2) + 3(1, 3) = (5, 13)$.

Conclusion. $\mathcal{B}$ est une base, donc cette écriture est unique (F15, base et écriture unique). Les composantes de u dans $\mathcal{B}$ sont $(2, 3)$; elles diffèrent de ses composantes $(5, 13)$ dans la base canonique (W06, les composantes dépendent de la base).

Exercice 8

La base (1, i) de $\mathbb{C}$ et la dimension de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est muni de l'addition et du produit d'un nombre complexe par un réel : c'est un espace vectoriel réel (F04, l'espace vectoriel $\mathbb{C}$).

1.

Montrer, à partir de la définition, que la famille $(1, i)$ est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

INDICE

Deux propriétés à vérifier. Génératrice : écris z sous forme algébrique. Libre : si $\alpha + \beta i = 0$ avec α et β réels, que dire de la partie réelle et de la partie imaginaire ?

CORRIGÉ

Génératrice. Soit $z \in \mathbb{C}$. Il s'écrit $z = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i$, avec a et b réels : c'est une combinaison linéaire de 1 et i.

Libre. Soit α et β deux réels tels que $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0$. Le nombre $\alpha + i\beta$ est nul : sa partie réelle α et sa partie imaginaire β sont nulles.

Conclusion. La famille $(1, i)$ est libre et génératrice de $\mathbb{C}$: d'après la définition d'une base (F14), c'est une base de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

2.

En déduire la dimension de l'espace vectoriel réel $\mathbb{C}$.

INDICE

La dimension est le nombre de vecteurs d'une base (F22, dimension d'un espace vectoriel).

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\mathbb{C}$ possède une base de deux vecteurs. Toutes ses bases ont donc deux vecteurs (F21, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs).

Conclusion. D'après la définition de la dimension (F22), $\dim \mathbb{C} = 2$.

3.

Sans calcul, justifier que la famille $(1, i, 2-3i)$ est liée. Écrire ensuite une relation de dépendance linéaire.

INDICE

Compte les vecteurs et compare à la dimension avec F23 (familles libres en dimension n). Pour la relation, écris $2-3i$ à l'aide de 1 et de i.

CORRIGÉ

Famille liée. La famille compte trois vecteurs dans $\mathbb{C}$, de dimension 2. D'après F23 (familles libres et génératrices en dimension n), une famille libre de $\mathbb{C}$ a au plus deux vecteurs : la famille $(1, i, 2-3i)$ n'est pas libre, elle est liée.

Relation. Comme $2-3i = 2\cdot 1 - 3\cdot i$, on a

$$\begin{aligned} &2\cdot 1 - 3\cdot i \\ &\quad - 1\cdot(2-3i) = 0, \end{aligned}$$

à coefficients 2, -3 et -1 non tous nuls.

Conclusion. La famille $(1, i, 2-3i)$ est liée, et $2\cdot 1 - 3\cdot i - 1\cdot(2-3i) = 0$ en est une relation de dépendance linéaire.

Exercice 9

Bases en dimension connue

1.

Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3), avec $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (3, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 2, -1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.

INDICE

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et la famille a trois vecteurs : il suffit de prouver la liberté. Dans le système, la deuxième équation donne β en fonction de γ.

CORRIGÉ

Liberté. Soit α, β et γ des réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0, 0, 0)$. Composante par composante :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 4\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $\beta = -2\gamma$, puis la première $\alpha = -3\beta = 6\gamma$. La troisième devient

$$24\gamma - \gamma = 23\gamma = 0.$$

Donc $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\alpha = 0$: la famille est libre.

Conclusion. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (F22, dimension) et (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de trois vecteurs. D'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2.

Montrer que la famille $\big((5, 2), (-1, 3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

INDICE

Deux vecteurs dans un espace de dimension 2. Pour la liberté de deux vecteurs, F11 (familles de deux vecteurs) suffit : sont-ils colinéaires ?

CORRIGÉ

Non colinéarité. Si $(-1, 3) = \lambda(5, 2)$, alors $5\lambda = -1$ et $2\lambda = 3$, soit $\lambda = -\dfrac{1}{5}$ et $\lambda = \dfrac{3}{2}$: impossible. De même, $(5, 2) = \lambda(-1, 3)$ donnerait $\lambda = -5$ et $\lambda = \dfrac{2}{3}$: impossible.

Liberté. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : d'après les familles de deux vecteurs (F11), la famille est libre.

Conclusion. C'est une famille libre de deux vecteurs et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (F22). D'après F24 (familles de n vecteurs en dimension n), $\big((5, 2), (-1, 3)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Dimension d'un sous-espace par une base exhibée

On considère les parties de $\mathbb{R}^3$:

- F est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x - 2y + 5z = 0$;
- G est l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

1. a)

Écrire F sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$.

INDICE

Exprime x en fonction de y et z, puis sépare les termes en y et en z.

CORRIGÉ

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $x = 2y - 5z$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{aligned} &(x, y, z) \\ &= (2y - 5z, y, z) \\ &= y(2, 1, 0) \\ &\quad + z(-5, 0, 1). \end{aligned}$$

Conclusion. $F = \mathrm{Vect}\big((2, 1, 0), (-5, 0, 1)\big)$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (F09, sous-espace engendré).

1. b)

En déduire une base et la dimension de F.

INDICE

La famille de 1. a) engendre F. Pour la liberté, regarde la deuxième et la troisième composante d'une combinaison nulle.

CORRIGÉ

Liberté. Soit α et β deux réels tels que $\alpha(2, 1, 0) + \beta(-5, 0, 1) = (0, 0, 0)$. Alors $(2\alpha - 5\beta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0)$, donc $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Base. La famille $\big((2, 1, 0), (-5, 0, 1)\big)$ est libre et engendre F (1. a)) : c'est une base de F (F14, base).

Conclusion. Cette famille est une base de F, et $\dim F = 2$ (F22, dimension).

2.

Résoudre le système qui définit G. En déduire une base et la dimension de G.

INDICE

La première équation donne $z = x + 2y$. Substitue dans la seconde : tu obtiens une relation entre x et y seulement.

CORRIGÉ

Résolution. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. La première équation donne $z = x + 2y$. La seconde devient $3x - y + 4x + 8y = 0$, soit $7x + 7y = 0$, donc $y = -x$. Alors $z = x - 2x = -x$.

Forme Vect. Ainsi $(x, y, z) \in G$ si et seulement si $(x, y, z) = (x, -x, -x) = x(1, -1, -1)$. Donc $G = \mathrm{Vect}\big((1, -1, -1)\big)$, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (F09).

Contrôle. $1 - 2 + 1 = 0$ et $3 + 1 - 4 = 0$.

Conclusion. Le vecteur $(1, -1, -1)$ n'est pas nul : la famille $\big((1, -1, -1)\big)$ est libre (F11, famille d'un vecteur). Elle engendre G : c'est une base de G, et $\dim G = 1$ (F22).