BURHAN

# Espaces vectoriels réels

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/espaces-vectoriels-reels/cours

| Chapitre | Semestre |
| --- | --- |
| Espaces vectoriels réels | Semestre 2 |

## Additionner et multiplier par un réel, partout

Voici trois objets qui n'ont, à première vue, rien en commun : le couple $u = (2, -1)$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

Pourtant, tu sais faire la même chose avec chacun. Tu peux additionner deux couples, deux matrices ou deux fonctions. Tu peux aussi les multiplier par un réel : $3u = (6, -3)$, et $3A$ s'obtient en multipliant chaque coefficient de $A$ par $3$.

**Devine : Multiplier par zéro**

Multiplie $u$, $A$ et $f$ par le réel $0$. Qu'obtiens-tu ?

**A.** Le réel $0$, dans les trois cas.

**Faux.**

$0 \cdot u = (0 \times 2, 0 \times (-1)) = (0, 0)$ : c'est un couple, pas un réel.

**B.** Le couple $(0, 0)$, dans les trois cas.

**Faux.**

$0 \cdot A$ est une matrice : chacun de ses quatre coefficients vaut $0$.

**C.** Le « zéro » de chaque ensemble : un couple, une matrice, une fonction.

**Juste.**

Juste : chaque ensemble a son propre élément nul.

**D.** Un résultat qui dépend des valeurs de $u$, de $A$ et de $f$.

**Faux.**

Chaque composante, chaque coefficient, chaque valeur est multiplié par zéro : tout s'annule.

**Correction**

$0 \cdot u = (0, 0)$ et $0 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice nulle. Enfin, $0 \cdot f$ est la fonction nulle : pour tout réel $x$, elle vaut $0 \times (x^2 - 3) = 0$.

Chaque ensemble a donc son propre « zéro ». Ce chapitre étudie ce que ces ensembles ont en commun.

Ce point commun porte un nom : **espace vectoriel réel**.

Dans ce chapitre, tu apprendras à reconnaître un tel espace. Tu montreras qu'un ensemble de matrices ou de fonctions est un sous-espace. Tu en trouveras une base, puis la dimension.

Chaque propriété est démontrée à partir des définitions ; un seul théorème est présenté par une idée de preuve.

## Espace vectoriel réel

### Une addition et une multiplication

**Petit rappel (structures algébriques).** Un groupe $(G, *)$ est commutatif si sa loi est associative et commutative, possède un élément neutre, et si tout élément a un symétrique.

Dans un groupe, on peut **simplifier** : pour tous $a$, $x$, $y$ de $G$, l'égalité $a * x = a * y$ entraîne $x = y$.

Les couples de réels, munis de l'addition, forment un tel groupe. La multiplication par un réel s'y ajoute.

**Devine : Deux réels, un couple**

Dans $\mathbb{R}^2$, on prend $u = (4, -1)$, $\alpha = 2$ et $\beta = -3$. Que vaut $(\alpha + \beta)u$ ?

**A.** $(-24, 6)$
**Faux.**
Tu as multiplié $u$ par $\alpha\beta = -6$, et non par $\alpha + \beta = -1$.

**B.** $(-4, 1)$
**Juste.**
Juste : $\alpha + \beta = -1$, et $(-1) \cdot (4, -1) = (-4, 1)$.

**C.** $(8, -2)$
**Faux.**
C'est $\alpha u$ seul : le terme $\beta u$ a été oublié.

**D.** $(20, -5)$
**Faux.**
Tu as calculé $(\alpha - \beta)u = 5u$ : attention au signe de $\beta$.

**Correction**
On a $\alpha + \beta = -1$, donc :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)u &= (-1) \cdot (4, -1) \\ &= (-4, 1).\end{aligned}$$

Calcule aussi $\alpha u + \beta u = (8, -2) + (-12, 3) = (-4, 1)$ : même résultat.

Cette règle, $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, est vraie pour tous les réels $\alpha$, $\beta$ et tous les couples $u$. La définition qui suit la retient, avec trois autres.

### La définition

**Définition : Espace vectoriel réel**

Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne, notée $+$, et d'une **loi de composition externe** à coefficients réels, notée $\cdot$ : c'est une application qui, à tout réel $\alpha$ et à tout élément $u$ de $E$, associe un élément $\alpha \cdot u$ de $E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un **espace vectoriel réel** si :

- $(E, +)$ est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est noté $0_E$ et où le symétrique de $u$ est noté $-u$ ;
- pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ et tous éléments $u$ et $v$ de $E$ :

$$\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \qquad (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u,$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u, \qquad 1 \cdot u = u.$$

Les éléments de $E$ s'appellent des **vecteurs**, les réels des **scalaires**, et $0_E$ le **vecteur nul**. On écrit souvent $\alpha u$ pour $\alpha \cdot u$, et $u - v$ pour $u + (-v)$.

**Exemple : calculer en nommant les règles**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel, $u$ et $v$ dans $E$. Simplifions $w = 2(u + 3v) - 6v$.

$$\begin{aligned} w &= 2u + 2(3v) - 6v \\ &= 2u + 6v - 6v \\ &= 2u + 0_E = 2u. \end{aligned}$$

Les règles utilisées :

- première ligne : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;
- deuxième ligne : $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ ;
- troisième ligne : $6v$ et $-6v$ sont symétriques dans le groupe $(E, +)$, et $0_E$ y est neutre.

Dans un espace abstrait, chaque ligne d'un calcul cite ainsi sa règle.

**Attention : le réel 0 n'est pas le vecteur nul**

Dans l'égalité $0 \cdot u = 0_E$, les deux zéros sont différents. À gauche, $0$ est un réel. À droite, $0_E$ est un vecteur de $E$.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on écrit $0 \cdot A = O$, la matrice nulle, et non $0 \cdot A = 0$.

Quand tu testes « $0_E \in F$ », écris d'abord le vecteur nul de l'espace où tu travailles.

## Les règles de calcul

L'exemple a utilisé $6v - 6v = 0_E$. Mais que vaut $0 \cdot u$ ? Aucun axiome ne le dit directement.

**Pourquoi** a-t-on $0 \cdot u = 0_E$ ? La preuve écrit le réel $0$ comme $0 + 0$. Elle simplifie ensuite dans le groupe $(E, +)$.

**Propriété : Règles de calcul dans un espace vectoriel**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel. Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ et tous vecteurs $u$ et $v$ de $E$ :

- $0 \cdot u = 0_E$ et $\alpha \cdot 0_E = 0_E$ ;
- $(-1) \cdot u = -u$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ et $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$ ;
- $\alpha u = 0_E$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

**Démonstration**

**Étape 1.** L'axiome $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$, avec $\alpha = \beta = 0$, donne $0 \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$. Dans le groupe $(E, +)$, on simplifie par $0 \cdot u$ (règles de calcul dans un groupe) : $0 \cdot u = 0_E$. De même, $\alpha \cdot 0_E = \alpha(0_E + 0_E) = \alpha \cdot 0_E + \alpha \cdot 0_E$, donc $\alpha \cdot 0_E = 0_E$.

**Étape 2.** $u + (-1)u = 1 \cdot u + (-1)u = (1 - 1)u = 0 \cdot u = 0_E$ : $(-1)u$ est le symétrique $-u$. Puis $\alpha\big((-1)v\big) = (-\alpha)v = (-1)(\alpha v) = -\alpha v$ ; par l'axiome $\alpha(u + v') = \alpha u + \alpha v'$ avec $v' = -v$, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ ; et $(\alpha - \beta)u = \alpha u + (-\beta)u = \alpha u - \beta u$.

**Étape 3.** Si $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$, l'étape 1 donne $\alpha u = 0_E$. Réciproquement, si $\alpha u = 0_E$ et $\alpha \neq 0$, alors $u = 1 \cdot u = \left(\frac{1}{\alpha} \times \alpha\right) u = \frac{1}{\alpha}(\alpha u) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0_E = 0_E$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On écrit un même vecteur de deux façons : $0 \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$. Puis on **simplifie** dans le groupe $(E, +)$.

Pour l'équivalence, on multiplie par le réel $\frac{1}{\alpha}$ : ce geste exige $\alpha \neq 0$.

**Vérifie : L'hypothèse de l'étape 3**

Dans l'étape 3 de la preuve, pourquoi suppose-t-on $\alpha \neq 0$ ?

**A.** Pour que le vecteur nul $0_E$ existe dans $E$.

**Faux.**

$0_E$ existe toujours : c'est le neutre du groupe $(E, +)$.

**B.** Pour pouvoir utiliser l'axiome $1 \cdot u = u$.

**Faux.**

Cet axiome vaut pour tout $u$, sans condition sur $\alpha$.

**C.** Pour pouvoir multiplier par le réel $\frac{1}{\alpha}$.

**Juste.**

Juste : le réel $\frac{1}{\alpha}$ n'existe que si $\alpha \neq 0$.

**D.** Pour pouvoir échanger les deux termes d'une somme.

**Faux.**

La commutativité de $+$ ne dépend d'aucun réel.

**Correction**

Si $\alpha u = 0_E$ et $\alpha \neq 0$, on multiplie par le réel $\frac{1}{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\alpha}(\alpha u) \\ &= \frac{1}{\alpha} \cdot 0_E = 0_E. \end{aligned}$$

Sans $\alpha \neq 0$, ce réel n'existe pas.

La conclusion tombe d'ailleurs : pour tout $u \in E$, on a $0 \cdot u = 0_E$, même si $u \neq 0_E$.

## Simplifier par un réel

**Exemple : Contre-exemple : simplifier par zéro**

Soit $u$ et $v$ dans $E$, et $\alpha$ un réel non nul. L'égalité $\alpha u = \alpha v$ entraîne $u = v$. En effet, $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v = 0_E$. Comme $\alpha \neq 0$, les règles de calcul donnent $u - v = 0_E$, d'où $u = v$.

L'hypothèse $\alpha \neq 0$ est nécessaire. Dans $\mathbb{R}^2$, $0 \cdot (1, 2) = (0, 0)$ et $0 \cdot (5, -7) = (0, 0)$. Pourtant $(1, 2) \neq (5, -7)$.

**À toi : Rédige un calcul dans un espace abstrait**

Soit $u$ et $v$ deux vecteurs d'un espace vectoriel réel $E$ tels que $2u - 5v = 0_E$. Rédige le calcul qui exprime $u$ en fonction de $v$, en nommant chaque règle. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Ajoute $5v$ aux deux membres, puis simplifie dans le groupe $(E, +)$.

**Indice 2**

Tu obtiens $2u = 5v$ ; multiplie alors par un réel bien choisi.

**Indice 3**

Point délicat : justifie $\frac{1}{2}(2u) = u$ par $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, puis par $1 \cdot u = u$.

**Réponse**

« On ajoute $5v$ aux deux membres : $2u - 5v + 5v = 0_E + 5v$. Dans le groupe $(E, +)$, $-5v + 5v = 0_E$ et $0_E$ est neutre : $2u = 5v$.

On multiplie par le réel $\frac{1}{2}$. Par l'axiome $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, puis $1 \cdot u = u$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2u) &= \left(\frac{1}{2} \times 2\right) u \\ &= 1 \cdot u = u.\end{aligned}$$

De même, $\frac{1}{2}(5v) = \frac{5}{2}v$. Donc $u = \frac{5}{2}v$. »

## Les espaces de référence

## Calculer dans les espaces usuels

**Vérifie : Une combinaison de matrices**

Calcule $2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**A.** $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 9\end{pmatrix}$

**Faux.**

Tu as ajouté la seconde matrice multipliée par trois, au lieu de la retrancher.

**B.** $\begin{pmatrix}2 & -8\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

**Juste.**

Juste : on calcule coefficient par coefficient.

**C.** $\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

**Faux.**

Le facteur $3$ n'a pas été appliqué à la seconde matrice.

**D.** $\begin{pmatrix}-6 & 6\\ 18 & 18\end{pmatrix}$

**Faux.**

Tu as multiplié les deux matrices entre elles : le produit de matrices n'intervient pas ici.

**Correction**

On calcule d'abord chaque produit par un réel :

$$2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix},$$

$$3\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 6\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$

La différence, coefficient par coefficient, vaut $\begin{pmatrix}2 & -8\\ -3 & 3\end{pmatrix}$.

**Petit rappel (structures algébriques).** Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la somme et le produit par un réel se calculent coefficient par coefficient. Tu as vu que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe commutatif.

**Pourquoi** $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$, les matrices et les fonctions sont-ils des espaces vectoriels ? Chaque axiome se ramène à une propriété des réels : composante par composante, coefficient par coefficient, ou point par point.

## Les espaces de référence

**Propriété : Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit, pour tous couples $(x, y)$ et $(x', y')$ et tout réel $\alpha$ :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \qquad \text{et} \qquad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Alors $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel réel ; son vecteur nul est $(0, 0)$ et $-(x, y) = (-x, -y)$.

De même, $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, muni des opérations composante par composante, est un espace vectoriel réel, de vecteur nul $(0, 0, 0)$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Les deux lois sont bien définies : la somme de deux couples de réels et le produit d'un couple par un réel sont des couples de réels.

**Étape 2.** $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe commutatif : l'associativité et la commutativité se vérifient composante par composante, car elles sont vraies dans le groupe commutatif $(\mathbb{R}, +)$ ; $(0, 0)$ est neutre et $(-x, -y)$ est le symétrique de $(x, y)$.

**Étape 3.** Les quatre axiomes de la loi externe se lisent composante par composante. Par exemple, $\alpha \cdot \big((x, y) + (x', y')\big) = \big(\alpha(x + x'), \alpha(y + y')\big) = (\alpha x + \alpha x', \alpha y + \alpha y')$ par distributivité dans $\mathbb{R}$. Les trois autres viennent de même de $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ et $1 \times x = x$, écrits pour chaque composante.

**Étape 4.** Les mêmes calculs, avec trois composantes, valent dans $\mathbb{R}^3$.

**Propriété : Les espaces vectoriels $\mathbb{C}$, $\mathbf{M_2(\mathbb{R})}$ et $\mathbf{M_3(\mathbb{R})}$**

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, où $\alpha \cdot z$ est le produit du réel $\alpha$ par le nombre complexe $z$, est un espace vectoriel réel, de vecteur nul $0$.
- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munis de l'addition des matrices et du produit d'une matrice par un réel, sont des espaces vectoriels réels, de vecteur nul la matrice nulle $O$.

---

**Démonstration**

**Étape 1 ($\mathbb{C}$).** Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = a + ib$, avec $a$ et $b$ réels (forme algébrique). Pour $z' = a' + ib'$ et $\alpha$ réel : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $\alpha z = \alpha a + i(\alpha b)$. Les deux lois agissent donc sur le couple $(a, b)$ comme les lois de $\mathbb{R}^2$ : chaque propriété exigée par la définition

d'un espace vectoriel, écrite sur les parties réelles et imaginaires, est l'une de celles établies pour $\mathbb{R}^2$ (F03).

**Étape 2 (matrices).** Deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ s'additionnent coefficient par coefficient, et $\alpha A$ multiplie chaque coefficient de $A$ par $\alpha$. Chaque propriété exigée se vérifie donc coefficient par coefficient, car elle est vraie dans $\mathbb{R}$ (même raisonnement que F03, avec quatre coefficients) ; le neutre est $O$ et le symétrique de $A$ est $-A$. Le même raisonnement, avec neuf coefficients, vaut dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**Exemple : un complexe se calcule comme un couple**

Un nombre complexe $a+ib$ se calcule comme le couple $(a,b)$. Par exemple, $(2-3i)+2(1+4i) = 4+5i$, comme $(2,-3)+2(1,4)=(4,5)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions, elles, se calculent valeur par valeur.

**Propriété : Espace vectoriel des fonctions définies sur un intervalle**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $I$ et à valeurs réelles. Pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $\alpha$ réel, on définit $f+g$ et $\alpha\cdot f$ par : pour tout $x\in I$,

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad \text{et} \qquad (\alpha\cdot f)(x)=\alpha f(x).$$

Alors $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel ; son vecteur nul est la fonction nulle sur $I$, et $-f$ est la fonction $x\mapsto -f(x)$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $f, g, h$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $\alpha$, $\beta$ réels. Deux fonctions sont égales si elles prennent la même valeur en tout point de $I$. Chaque égalité à établir se vérifie donc en un point $x$ quelconque de $I$, où $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ sont des réels.

**Étape 2.** L'associativité et la commutativité de l'addition des réels donnent celles de $+$. La fonction nulle est neutre, car $f(x)+0=f(x)$, et $f+(-f)$ est la fonction nulle, car $f(x)+\big(-f(x)\big)=0$. Donc $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+)$ est un groupe commutatif.

**Étape 3.** En tout $x\in I$ : $\alpha\big(f(x)+g(x)\big)=\alpha f(x)+\alpha g(x)$, $(\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)$, $\alpha\big(\beta f(x)\big)=(\alpha\beta)f(x)$ et $1\times f(x)=f(x)$ : ce sont les quatre axiomes de la loi externe.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour prouver qu'un ensemble de référence est un espace vectoriel, on ne réinvente rien. On ramène chaque axiome à une propriété des réels : composante par composante, coefficient par coefficient, ou point par point.

Le vecteur nul est alors l'objet dont tout est nul : composantes, coefficients ou valeurs.

## Chaque axiome compte

**Vérifie : Égalité de deux fonctions**

Dans la preuve pour $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, pourquoi suffit-il de vérifier chaque égalité en un point $x$ quelconque de $I$ ?

**A.** Parce que les fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sont continues.
**Faux.**
Aucune continuité n'est supposée : $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ contient toutes les fonctions définies sur $I$.

**B.** Par définition de l'égalité de deux fonctions sur $I$.
**Juste.**
Juste : deux fonctions sont égales si elles ont la même valeur en tout point de $I$.

**C.** Parce qu'il suffit de vérifier l'égalité en $x = 0$.
**Faux.**
Un seul point ne suffit pas, et $0$ n'est pas forcément dans $I$.

**D.** Parce que $I$ est un intervalle, donc d'un seul tenant.
**Faux.**
La preuve n'utilise pas cette propriété : elle travaille point par point.

**Correction**
Deux fonctions $f$ et $g$ de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout $x$ de $I$.

Pour prouver une égalité de fonctions, on fixe donc un $x$ quelconque de $I$. On prouve l'égalité des deux réels obtenus, avec les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

**Exemple : Contre-exemple : une loi externe qui viole un axiome**

Sur $\mathbb{R}^2$, garde l'addition habituelle mais pose $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, 0)$, pour tout réel $\alpha$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Trois axiomes restent vrais. Par exemple, pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot (x, y) \\ = ((\alpha + \beta)x, 0) \\ = \alpha \odot (x, y) \\ \quad + \beta \odot (x, y).\end{aligned}$$

Mais $1 \odot (2, 5) = (2, 0) \neq (2, 5)$ : l'axiome $1 \cdot u = u$ est faux. Ce n'est donc pas un espace vectoriel.

Cet axiome n'est pas une conséquence des trois autres : il faut le vérifier.

**À toi : Rédige un axiome pour les complexes**

Soit $\alpha$ un réel, $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes, avec $a$, $b$, $a'$, $b'$ réels. Rédige la preuve de $\alpha(z + z') = \alpha z + \alpha z'$ à partir des parties réelles et imaginaires. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Écris $z + z'$ sous forme algébrique.
**Indice 2**
Multiplie par $\alpha$, puis développe chaque partie dans $\mathbb{R}$.
**Indice 3**
Point délicat : regroupe à la fin les termes de $z$ d'un côté, ceux de $z'$ de l'autre.

**Réponse**
« On a $z + z' = (a + a') + i(b + b')$, avec $a + a'$ et $b + b'$ réels. Par le produit d'un complexe par un réel, puis par distributivité dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
&\alpha(z + z') \\
&= \alpha(a + a') + i\alpha(b + b') \\
&= (\alpha a + \alpha a') \\
&\quad + i(\alpha b + \alpha b') \\
&= (\alpha a + i\alpha b) \\
&\quad + (\alpha a' + i\alpha b') \\
&= \alpha z + \alpha z'.
\end{aligned}$$

La troisième égalité regroupe les termes. »

## Sous-espaces vectoriels

## Des parties stables

**Devine : Une partie qui résiste**

Dans $\mathbb{R}^2$, laquelle de ces parties reste stable quand on additionne deux de ses éléments, ou qu'on en multiplie un par un réel ?

**A.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y = 4\}$
**Faux.**
$(4, 0)$ y est, mais $2 \cdot (4, 0) = (8, 0)$ n'y est pas : $8 \neq 4$.

**B.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$
**Faux.**
$(1, 2)$ y est, mais $(-1) \cdot (1, 2) = (-1, -2)$ n'y est pas.

**C.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
**Faux.**
$(3, 0)$ et $(0, -2)$ y sont, mais pas leur somme $(3, -2)$, car $3 \times (-2) = -6 \neq 0$.

**D.** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 4y = 0\}$

**Juste.**

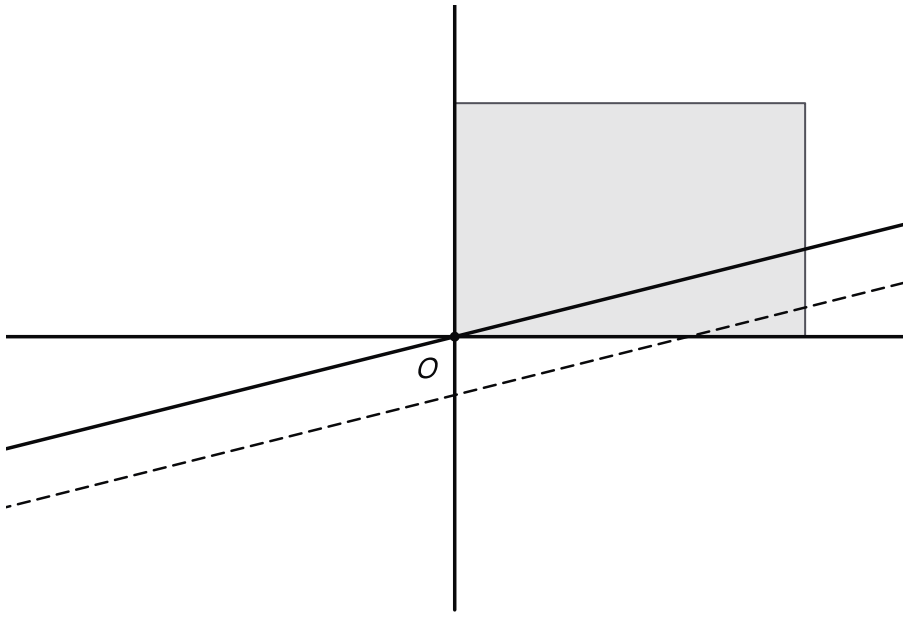
Juste : une somme ou un multiple d'éléments reste sur cette droite.

**Correction**

La droite d'équation $x - 4y = 0$ passe par l'origine. Soit $(x, y)$ et $(x', y')$ sur cette droite, et $\alpha$ un réel. Alors $(x + x') - 4(y + y') = (x - 4y) + (x' - 4y') = 0$. De même, $\alpha x - 4(\alpha y) = \alpha(x - 4y) = 0$.

Les trois autres parties perdent un élément : une somme ou un multiple en sort.

Une partie stable de ce type s'appelle un **sous-espace vectoriel**.




**Les quatre parties de l'activité dessinées dans $\mathbb{R}^2$ : la droite d'équation x − 4y = 0, en trait plein, la droite parallèle d'équation x − 4y = 4, en pointillés, le quart de plan teinté où x ≥ 0 et y ≥ 0, et la réunion des deux droites qui se coupent à angle droit en O, où xy = 0.**

**Définition : Sous-espace vectoriel**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel et $F$ une partie de $E$. On dit que $F$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$ si :

- $F$ est stable pour $+$ : pour tous $u$ et $v$ dans $F$, $u + v \in F$ ;
- $F$ est stable pour $\cdot$ : pour tout réel $\alpha$ et tout $u$ dans $F$, $\alpha u \in F$ ;
- $F$, muni des lois induites, est un espace vectoriel réel.

**Exemple : deux sous-espaces toujours présents**

Dans tout espace vectoriel $E$, la partie $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel. En effet, $0_E + 0_E = 0_E$ et, pour tout réel $\alpha$, $\alpha 0_E = 0_E$ : elle est stable pour les deux lois. Les axiomes y sont vrais, car ils le sont dans $E$.

L'espace $E$ lui-même est aussi un sous-espace de $E$. La droite de l'activité en est un autre : le théorème suivant le prouvera sans effort.

## La caractérisation

**Petit rappel (structures algébriques).** Une partie $H$ d'un groupe $(G, *)$ en est un sous-groupe si elle est non vide et si, pour tous $x$, $y$ de $H$, $x * y'$ reste dans $H$. Ici, $y'$ désigne le symétrique de $y$.

Or vérifier la dernière condition de la définition d'un sous-espace, c'est reprendre tous les axiomes : c'est long.

**Pourquoi** deux vérifications suffisent-elles ? La preuve applique le test du sous-groupe à $u - v = 1 \cdot u + (-1)v$.

**Théorème : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel et $F$ une partie de $E$. $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si :

- $0_E \in F$ ;
- pour tous vecteurs $u$ et $v$ de $F$ et tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\alpha u + \beta v \in F$.

En particulier, une partie de $E$ qui ne contient pas $0_E$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$.

---

**Démonstration**

**Étape 1 (condition nécessaire).** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Le neutre $e$ du groupe $(F, +)$ vérifie $e + e = e = e + 0_E$ dans $E$ ; en simplifiant par $e$ dans le groupe $(E, +)$, $e = 0_E$, donc $0_E \in F$. Pour $u, v \in F$ et $\alpha, \beta$ réels, $\alpha u$ et $\beta v$ sont dans $F$ (stabilité pour $\cdot$), donc $\alpha u + \beta v \in F$ (stabilité pour $+$).

**Étape 2 (condition suffisante).** $F$ est non vide, car $0_E \in F$. Pour $u$ et $v$ dans $F$, $u - v = 1 \cdot u + (-1)v \in F$ (F02). Par la caractérisation d'un sous-groupe, $F$ est un sous-groupe de $(E, +)$ : $(F, +)$ est un groupe, commutatif comme $+$. De plus, $u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v \in F$ et $\alpha u = \alpha u + 0 \cdot u \in F$ (F02) : $F$ est stable pour les deux lois.

**Étape 3.** Les quatre axiomes de la loi externe, vrais dans $E$, le sont dans $F$ : $F$, muni des lois induites, est un espace vectoriel réel.

> **À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Un sous-espace est un **sous-groupe** de $(E, +)$, stable par produit par un réel.

Le neutre de $F$ est forcément $0_E$ : on le prouve en simplifiant dans $(E, +)$. D'où le premier test, toujours le même : $0_E \in F$ ?

**Vérifie : Le bon outil**

Dans l'étape 2 de la preuve, quel résultat montre que $(F, +)$ est un groupe ?

**A.** La définition d'un espace vectoriel réel.

**Faux.**
Cette définition suppose déjà un groupe : elle ne le fabrique pas.

**B.** Les règles de calcul dans un espace vectoriel.

**Faux.**
Elles donnent $u - v = 1 \cdot u + (-1)v$, mais pas la structure de groupe.

**C.** La caractérisation d'un sous-groupe.

**Juste.**
Juste : $F$ est non vide et $u - v \in F$ pour tous $u, v$ de $F$.

**D.** La commutativité de l'addition dans $E$.

**Faux.**
Elle rend le groupe commutatif, une fois qu'il est un groupe.

**Correction**
$F$ est non vide, car $0_E \in F$. Pour $u$ et $v$ dans $F$, le vecteur $u - v = 1 \cdot u + (-1)v$ est dans $F$ par la seconde condition.

La caractérisation d'un sous-groupe donne alors : $F$ est un sous-groupe de $(E, +)$. C'est le lien direct avec le chapitre des structures.

## Les deux conditions comptent

**Exemple : Contre-exemple : la partie vide**

La seconde condition seule ne suffit pas. La partie vide $\varnothing$ la vérifie : elle ne contient aucun vecteur, donc aucune combinaison n'est à tester.

Pourtant $\varnothing$ n'est pas un sous-espace vectoriel : un groupe contient au moins son neutre. La condition $0_E \in F$ est donc nécessaire.

**Attention : contenir le vecteur nul ne suffit pas**

Si $0_E \notin F$, la conclusion est immédiate : $F$ n'est pas un sous-espace. Mais la réciproque est fausse.

La partie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$ contient $(0,0)$ et $(1,1)$. Pourtant $(-1)\cdot(1,1) = (-1,-1)$ n'y est pas, car $|-1| = 1 \neq -1$.

Après le vecteur nul, il reste toujours la seconde condition à prouver.

## Montrer qu'une partie est un sous-espace

**Méthode : montrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel**

1. **Vérifier** que $F$ est inclus dans $E$, puis que le vecteur nul de $E$ est dans $F$.
2. **Prendre** $u$ et $v$ dans $F$, $\alpha$ et $\beta$ réels, et traduire $u \in F$ et $v \in F$ par les conditions qui définissent $F$.
3. **Calculer** $\alpha u + \beta v$ et prouver qu'il vérifie ces conditions.
4. **Conclure** par la caractérisation.

**Rédaction attendue.** « $F \subset E$ et $0_E \in F$ car … Soit $u, v \in F$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors … donc $\alpha u + \beta v \in F$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$. »

**Exemple : Exemple guidé : un sous-espace de matrices**

**Énoncé.** Montre que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \text{ et } b = 2c \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Vecteur nul.** $F$ est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $O \in F$, car $0 + 0 = 0$ et $0 = 2 \times 0$.

**Combinaison.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dans $F$, $\alpha$ et $\beta$ réels. Ainsi $a + d = 0$, $b = 2c$, $a' + d' = 0$ et $b' = 2c'$. Les coefficients de $\alpha M + \beta M'$ vérifient :

$$\begin{aligned} &(\alpha a + \beta a') + (\alpha d + \beta d') \\ &= \alpha(a + d) + \beta(a' + d') \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus, $\alpha b + \beta b' = 2\alpha c + 2\beta c' = 2(\alpha c + \beta c')$.

**Conclusion.** $\alpha M + \beta M' \in F$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**À toi : Complète : un sous-espace de fonctions**

Soit $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 3f(0)\}$. Complète la rédaction de la preuve que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Vecteur nul.** La fonction nulle vérifie … : elle est dans $G$.

**Combinaison.** Soit $f, g \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $(\alpha f + \beta g)(1) = \cdots = 3\alpha f(0) + 3\beta g(0) = \ldots$

**Conclusion.** Donc $\alpha f + \beta g \in G$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Complète les pointillés avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Les opérations de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se font point par point : $(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1)$.
**Indice 2**
Remplace ensuite $f(1)$ et $g(1)$ grâce à la condition qui définit $G$.
**Indice 3**
Point délicat : la dernière égalité regroupe $3\alpha f(0) + 3\beta g(0)$ en une seule valeur en $0$.

**Réponse**
« La fonction nulle vaut $0$ en $1$ et en $0$, et $0 = 3 \times 0$ : elle est dans $G$.

Soit $f, g \in G$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}&(\alpha f + \beta g)(1)\\ &= \alpha f(1) + \beta g(1)\\ &= 3\alpha f(0) + 3\beta g(0)\\ &= 3(\alpha f + \beta g)(0).\end{aligned}$$

Donc $\alpha f + \beta g \in G$. D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. »

## Montrer qu'une partie n'en est pas un

**Méthode : montrer qu'une partie n'est pas un sous-espace vectoriel**

1. **Tester le vecteur nul** : s'il n'est pas dans $F$, c'est terminé.
2. Sinon, **chercher un contre-exemple** : deux éléments de $F$ dont la somme sort de $F$, ou un élément et un réel dont le produit en sort.
3. **Écrire** les vecteurs choisis et le calcul qui les met en défaut.

**Rédaction attendue.** « $u = \ldots$ et $v = \ldots$ sont dans $F$ car … ; mais $u + v = \ldots$ n'est pas dans $F$ car … Donc $F$ n'est pas stable pour $+$ : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $E$. »

**Exemple : Exemple guidé : des parties qui n'en sont pas**

**Partie $G$.** Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 1\}$. On a $0 + 2 \times 0 = 0 \neq 1$, donc $(0, 0, 0) \notin G$ : $G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Partie $H$.** Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = yz\}$. Elle contient $(0, 0, 0)$, car $0^2 = 0 \times 0$.

Prenons $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, -1, -1)$. Ils sont dans $H$, car $1^2 = 1 \times 1$ et $1^2 = (-1) \times (-1)$. Mais $u + v = (2, 0, 0)$, et $2^2 = 4 \neq 0 \times 0$ : $u + v \notin H$.

**Conclusion.** Donc $H$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Attention : la réunion de deux sous-espaces**

La réunion de deux sous-espaces n'est pas, en général, un sous-espace. Les droites $D_1 : y = 3x$ et $D_2 : x + 2y = 0$ sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$.

On a $(1, 3) \in D_1$ et $(2, -1) \in D_2$. Leur somme $(3, 2)$ n'est dans aucune des deux : $2 \neq 9$ et $3 + 4 \neq 0$ .

Donc $D_1 \cup D_2$ n'est pas stable pour $+$.

## Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

### Fabriquer des vecteurs

**Devine : Atteindre un vecteur**

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, -1, 2)$ et $v = (0, 1, 1)$. Avec des réels $\alpha$ et $\beta$, on forme $\alpha u + \beta v = (\alpha, -\alpha + \beta, 2\alpha + \beta)$. Lequel de ces vecteurs peut-on obtenir ?

**A.** $(2, -3, 4)$
**Faux.**
La première composante impose $\alpha = 2$, la deuxième $\beta = -1$ ; la troisième vaut alors $3$, pas $4$.

**B.** $(0, 0, 1)$
**Faux.**
$\alpha = 0$, puis $\beta = 0$ : la troisième composante vaut $0$, pas $1$.

**C.** $(1, 1, 1)$
**Faux.**
$\alpha = 1$, puis $\beta = 2$ : la troisième composante vaut $4$, pas $1$.

**D.** $(2, -3, 3)$
**Juste.**
Juste : $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ donnent $(2, -3, 3)$.

**Correction**
La première composante donne $\alpha$, la deuxième donne alors $\beta$. Il reste à contrôler la troisième.

Pour $(2, -3, 3)$ : $\alpha = 2$, puis $-2 + \beta = -3$, donc $\beta = -1$. Enfin $2 \times 2 + (-1) = 3$. Donc $(2, -3, 3) = 2u - v$.

Les vecteurs ainsi obtenus s'appellent des **combinaisons linéaires** de $u$ et $v$.

**Définition : Combinaison linéaire ; sous-espace engendré**

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel réel, $p$ un entier naturel non nul et $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de $E$.

- On appelle **combinaison linéaire** de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ tout vecteur de la forme $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des réels, appelés les **coefficients** de la combinaison.
- L'ensemble de ces combinaisons linéaires se note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p \mid \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

**Exemple : décrire $\mathrm{Vect}(u, v)$ par une équation**

Soit $u = (1, -1, 2)$, $v = (0, 1, 1)$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ce vecteur est dans $\mathrm{Vect}(u, v)$ si et seulement s'il existe des réels $\alpha$, $\beta$ tels que $x = \alpha$, $y = -\alpha + \beta$ et $z = 2\alpha + \beta$.

Les deux premières égalités imposent $\alpha = x$ et $\beta = x + y$. La troisième devient $z = 2x + x + y = 3x + y$. Réciproquement, si $z = 3x + y$, ces valeurs de $\alpha$ et $\beta$ conviennent. Donc :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vect}(u, v)\\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3x + y\}.\end{aligned}$$

## Un sous-espace, le plus petit

Une combinaison de combinaisons de $u$ et $v$ est encore une combinaison de $u$ et $v$.

**Pourquoi** $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est-il un sous-espace, et le plus petit qui contient ces vecteurs ? La preuve regroupe les coefficients. Elle raisonne ensuite par récurrence sur le nombre de termes.

**Propriété : Le sous-espace engendré par une famille**

Soit $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel $E$. Alors :

- $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient chacun des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ ;
- tout sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $u_1, \dots, u_p$ contient $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

On dit que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ est le **sous-espace vectoriel engendré** par $u_1, \dots, u_p$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** On note $V = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On a $0_E = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_p \in V$ (F02). Si $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ et $v = \sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k$ sont dans $V$ et si $\alpha$, $\beta$ sont réels, les axiomes de F01 donnent $\alpha u + \beta v = \sum_{k=1}^{p} (\alpha\lambda_k + \beta\mu_k) u_k \in V$. Par F07, $V$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Étape 2.** Pour $j$ fixé, $u_j$ est la combinaison de coefficient $1$ devant $u_j$ et $0$ devant les autres vecteurs (F02) : $u_j \in V$.

**Étape 3.** Soit $G$ un sous-espace vectoriel contenant $u_1, \dots, u_p$. Montrons par récurrence sur $m \in \{1, \dots, p\}$ que $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \in G$ pour tous réels $\alpha_k$. Pour $m = 1$ : $\alpha_1 u_1 = \alpha_1 u_1 + 0 \cdot u_1 \in G$ (F07). Si c'est vrai au rang $m < p$, alors $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k u_k = 1 \cdot \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k + \alpha_{m+1} u_{m+1} \in G$ (F07). Au rang $p$ : $V \subset G$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour montrer qu'un ensemble de combinaisons est un sous-espace, on **regroupe les coefficients**. Si $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k$ et $v = \sum_{k=1}^{p} \mu_k u_k$, alors :

$$\alpha u + \beta v = \sum_{k=1}^{p} (\alpha \lambda_k + \beta \mu_k) u_k.$$

Pour le second point, soit $G$ un sous-espace qui contient $u_1, \dots, u_p$. La récurrence part d'un seul terme, $\alpha_1 u_1$, qui est dans $G$. Elle ajoute ensuite un terme à la fois : on combine la somme déjà obtenue, qui est dans $G$, avec $\alpha_{m+1} u_{m+1}$.

**Vérifie : Pourquoi une récurrence**

Dans l'étape 3 de la preuve, pourquoi raisonne-t-on par récurrence sur $m$ ?

**A.** Parce que la famille peut contenir une infinité de vecteurs.

**Faux.**
La famille a $p$ vecteurs, avec $p$ entier : elle est finie.

**B.** Parce que la caractérisation ne combine que deux vecteurs à la fois.

**Juste.**
Juste : on ajoute un terme à chaque rang, en combinant deux vecteurs de $G$.

**C.** Pour prouver que le vecteur nul appartient à $G$.

**Faux.**
C'est vrai d'emblée : $G$ est un sous-espace, il contient $0_E$.

**D.** Parce que les coefficients $\alpha_k$ sont des réels.

**Faux.**
La nature des coefficients ne demande aucune récurrence.

**Correction**
La caractérisation dit seulement : $\alpha u + \beta v \in G$ pour deux vecteurs $u, v$ de $G$. Une somme de $p$ termes se construit donc terme après terme.

Au rang $m + 1$, on combine la somme des $m$ premiers termes, qui est dans $G$, avec $\alpha_{m+1} u_{m+1}$.

**Exemple : Contre-exemple : il faut un sous-espace**

Le second point parle de sous-espaces, pas de parties quelconques. La partie $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$ contient $u = (1, -1, 2)$ et $v = (0, 1, 1)$. Elle est même stable pour $+$.

Pourtant, $-u = (-1, 1, -2)$ est dans $\mathrm{Vect}(u, v)$, mais pas dans $P$. Donc $P$ ne contient pas $\mathrm{Vect}(u, v)$ : ce n'est pas un sous-espace.

## Écrire un sous-espace comme un Vect

**Méthode : écrire un sous-espace sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$**

1. **Paramétrer** : exprimer un élément quelconque de $F$ à l'aide de réels libres $a$, $b$, ..., puis l'écrire $au_1 + bu_2 + \dots$
2. **Vérifier la réciproque** : toute combinaison de $u_1, u_2, \dots$ appartient à $F$.
3. **Conclure** : $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots)$. C'est un sous-espace vectoriel, et $(u_1, u_2, \dots)$ l'engendre.

**Rédaction attendue.** « Soit $w \in E$. On a $w \in F$ si et seulement s'il existe des réels $a$, $b$ tels que $w = au_1 + bu_2$. Donc $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. C'est un sous-espace vectoriel de $E$, engendré par $(u_1, u_2)$. »

**Exemple : Exemple guidé : un plan écrit comme un Vect**

**Énoncé.** Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.

**Paramétrer.** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $x = 2y - z$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (2y - z, y, z) \\ &= y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1).\end{aligned}$$

**Réciproque.** Pour tous réels $a, b$ : $a(2, 1, 0) + b(-1, 0, 1) = (2a - b, a, b)$, et $(2a - b) - 2a + b = 0$. Ce vecteur est donc dans $F$.

**Conclure.** $F = \mathrm{Vect}\big((2, 1, 0), (-1, 0, 1)\big)$ : c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**À toi : Rédige : reconnaître un Vect**

Soit $G = \{(a - b, 2a, a + 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Rédige la preuve que $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, en l'écrivant sous la forme $\mathrm{Vect}(\dots)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Sépare ce qui dépend de $a$ et ce qui dépend de $b$.
**Indice 2**
$(a - b, 2a, a + 3b) = a(\dots) + b(\dots)$ : complète les deux triplets.
**Indice 3**
Point délicat : cite le résultat qui dit qu'un sous-espace engendré est un sous-espace.

**Réponse**
« Pour tous réels $a$, $b$ :

$$\begin{aligned}(a-b, 2a, a+3b) \\ = a(1,2,1) \\ + b(-1,0,3).\end{aligned}$$

Donc $G$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1,2,1)$ et $(-1,0,3)$ : $G = \mathrm{Vect}\big((1,2,1),(-1,0,3)\big)$.

Un sous-espace engendré est un sous-espace vectoriel : $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. »

## Familles génératrices, libres, liées

## Un vecteur de trop

**Devine : Une relation cachée**

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (2,1,0)$, $v = (0,1,-1)$ et $w = (2,-2,3)$. Quels réels $(\alpha, \beta, \gamma)$, non tous nuls, donnent $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$ ?

**A.** $(1,3,-1)$
**Faux.**
$u + 3v - w = (0,6,-6)$ : ce n'est pas le vecteur nul.

**B.** $(1,-3,-1)$
**Juste.**
Juste : $u - 3v = (2,-2,3) = w$, donc $u - 3v - w = (0,0,0)$.

**C.** $(1,-3,1)$
**Faux.**
$u - 3v + w = (4,-4,6)$ : le signe devant $w$ est faux.

**D.** $(0,0,0)$
**Faux.**
Ces coefficients conviennent toujours, mais ils sont tous nuls : ils ne disent rien.

**Correction**
$u - 3v = (2, 1-3, 0+3) = (2,-2,3)$ : c'est $w$. Donc $u - 3v - w = (0,0,0)$, avec des coefficients non tous nuls.

Le vecteur $w$ est **redondant** : il n'apporte rien que $u$ et $v$ ne donnent déjà. On dira que la famille $(u,v,w)$ est **liée**.

**Définition : Famille génératrice, famille libre, famille liée**

Soit $E$ un espace vectoriel réel et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de $E$.

- La famille est **génératrice** de $E$ si $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = E$, c'est-à-dire si tout vecteur de $E$ est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_p$. On dit aussi que $u_1, \dots, u_p$ **engendrent** $E$.
- La famille est **libre** si, pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ :

  $$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0.$$

  On dit aussi que $u_1, \dots, u_p$ sont **linéairement indépendants**.
- La famille est **liée** si elle n'est pas libre : il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, **non tous nuls**, tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$. Une telle égalité s'appelle une **relation de dépendance linéaire**.

**Exemple : une famille génératrice de $\mathbb{R}^{2}$**

Montrons que $\big((1,1),(1,2)\big)$ engendre $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche des réels $\alpha$, $\beta$ tels que $\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (x,y)$, c'est-à-dire $\alpha + \beta = x$ et $\alpha + 2\beta = y$.

La différence donne $\beta = y - x$, puis $\alpha = 2x - y$.

Ces réels existent pour tout $(x,y)$ : la famille est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

## Libre ou liée

**Méthode : montrer qu'une famille est libre ou liée**

1. **Écrire** $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$, avec des réels inconnus.
2. **Traduire** en un système d'équations : une équation par composante ou par coefficient, ou, pour des fonctions, une équation par valeur de $x$ choisie.
3. **Résoudre** par substitution ou par combinaison des équations.
4. **Conclure** : seule solution nulle, la famille est libre ; une solution non nulle, elle est liée.

**Rédaction attendue.** « Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des réels tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$. Alors … donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. La famille est libre. » Pour une famille liée : « $2u_1 - u_2 + u_3 = 0_E$ est une relation de dépendance linéaire, à coefficients non tous nuls : la famille est liée. »

**Exemple : Exemple guidé : une famille libre de $\mathbb{R}^{3}$**

**Énoncé.** Montre que $\big((1,0,2),(1,1,0),(0,1,1)\big)$ est libre.

**Relation.** Soit $\alpha, \beta, \gamma$ réels tels que $\alpha(1,0,2) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$. Composante par composante : $\alpha + \beta = 0$, $\beta + \gamma = 0$ et $2\alpha + \gamma = 0$.

**Résolution.** Les deux premières donnent $\beta = -\alpha$ et $\gamma = -\beta = \alpha$. La troisième devient $2\alpha + \alpha = 3\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$, puis $\beta = \gamma = 0$.

**Conclusion.** La seule solution est nulle : la famille est libre.

Exemple **: Exemple guidé : libre ou liée selon un paramètre**

**Énoncé.** Soit $m$ un réel, $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (2, 1, m)$. Étudie la famille $(u, v, w)$.

**Système.** Soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ réels tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$. Composante par composante : $\alpha + 2\gamma = 0$, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\beta + m\gamma = 0$.

Donc $\alpha = -2\gamma$, puis $\beta = -\alpha - \gamma = \gamma$. La dernière devient $(1 + m)\gamma = 0$.

**Si $m \neq -1$.** $\gamma = 0$, puis $\alpha = \beta = 0$ : la famille est libre.

**Si $m = -1$.** Le choix $\gamma = 1$ donne $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ : $-2u + v + w = (0, 0, 0)$. La famille est liée.

Attention **: deux à deux non colinéaires ne suffit pas**

Avec $m = -1$, aucun des vecteurs $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ et $(2, 1, -1)$ n'est multiple d'un autre. Pourtant, la famille est liée.

Vérifier les vecteurs deux par deux ne suffit donc pas, dès qu'il y en a trois ou plus. Seule la relation $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$, résolue, permet de conclure.

## Des familles de fonctions

Exemple **: Exemple guidé : la liberté de deux fonctions**

**Énoncé.** Soit $p_1 : x \mapsto x + 1$ et $p_2 : x \mapsto x^2 - x$. Montre que $(p_1, p_2)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Relation.** Soit $\alpha$, $\beta$ réels tels que $\alpha p_1 + \beta p_2$ soit la fonction nulle : pour tout réel $x$, $\alpha(x + 1) + \beta(x^2 - x) = 0$.

La fonction nulle vaut $0$ en chaque point : on choisit des valeurs de $x$.

**Valeurs choisies.** En $x = 0$ : $\alpha = 0$. En $x = -1$, qui annule $p_1$ : $2\beta = 0$, donc $\beta = 0$.

**Conclusion.** La seule solution est nulle : la famille $(p_1, p_2)$ est libre.

Une valeur comme $x = 1$, qui annule $p_2$, ne renseigne que sur $\alpha$.

**Vérifie : Trois fonctions**

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $f_1 : x \mapsto x^2 + x$, $f_2 : x \mapsto x - 1$ et $f_3 : x \mapsto x^2 + 1$. Quelle affirmation est vraie ?

**A.** $f_1 + f_2 - f_3$ est la fonction nulle.
**Faux.**

$f_1 + f_2 - f_3$ est la fonction $x \mapsto 2x - 2$, qui vaut 2 en $x = 2$.

**B.** La famille $(f_1, f_2, f_3)$ est libre.

**Faux.**

Calcule $f_1 - f_2$ : tu retrouves $f_3$.

**C.** $f_1 - f_2 + f_3$ est la fonction nulle.

**Faux.**

$f_1 - f_2 + f_3$ est la fonction $x \mapsto 2x^2 + 2$, qui ne s'annule jamais.

**D.** $f_1 - f_2 - f_3$ est la fonction nulle.

**Juste.**

Juste : $(x^2 + x) - (x - 1) - (x^2 + 1) = 0$ pour tout réel $x$.

**Correction**

Pour tout réel $x$ : $(x^2 + x) - (x - 1) - (x^2 + 1) = 0$. Donc $f_1 - f_2 - f_3$ est la fonction nulle.

C'est une relation de dépendance, de coefficients $1, -1, -1$ : la famille $(f_1, f_2, f_3)$ est liée.

**À toi : Rédige : deux fonctions libres**

Soit $g_1 : x \mapsto x + 2$ et $g_2 : x \mapsto x^2$. Rédige la preuve que la famille $(g_1, g_2)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec des valeurs de $x$ bien choisies. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Écris que $\alpha g_1 + \beta g_2$ est la fonction nulle : l'égalité vaut en tout réel $x$.

**Indice 2**

Choisis $x = 0$ : un seul coefficient reste.

**Indice 3**

Point délicat : la fonction nulle vaut $0$ en chaque point ; deux valeurs de $x$ suffisent ici.

**Réponse**

« Soit $\alpha$, $\beta$ réels tels que $\alpha g_1 + \beta g_2$ soit la fonction nulle : pour tout réel $x$, $\alpha(x + 2) + \beta x^2 = 0$.

En $x = 0$ : $2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$. En $x = 1$ : $3\alpha + \beta = 0$, donc $\beta = 0$.

La seule solution est nulle : la famille $(g_1, g_2)$ est libre. »

## Familles courtes, ajout et retrait d'un vecteur

## Deux vecteurs colinéaires

**Devine : Deux vecteurs**

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $(u, v)$, avec $u = (6, -4, 2)$ et $v = (-9, 6, -3)$, est-elle libre ?

**A.** Non : $v = -\dfrac{3}{2}u$, d'où une relation de dépendance.

**Juste.**

Juste : $\frac{3}{2}u + v = (0,0,0)$, avec des coefficients non tous nuls.

**B.** Oui : aucun des deux vecteurs n'est nul.

**Faux.**

Être non nuls ne suffit pas : $v$ peut être un multiple de $u$.

**C.** Oui : leurs premières composantes sont différentes.

**Faux.**

Compare plutôt les composantes deux à deux : $-9 = -\frac{3}{2} \times 6$ et $6 = -\frac{3}{2} \times (-4)$.

**D.** Non : une famille de deux vecteurs est toujours liée.

**Faux.**

Pas en général : $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ forment une famille libre.

**Correction**

Chaque composante de $v$ vaut $-\frac{3}{2}$ fois celle de $u$ : $v = -\frac{3}{2}u$. Donc $\frac{3}{2}u + v = (0,0,0)$, relation à coefficients non tous nuls.

La famille est liée : $u$ et $v$ sont **colinéaires**.

Dans l'activité, l'égalité $v = -\frac{3}{2}u$ a donné une relation de dépendance. Le chemin inverse marche aussi.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Dans une relation de dépendance, un coefficient n'est pas nul. On isole son vecteur, en divisant par ce coefficient.

## Isoler un vecteur

**Propriété : Familles d'un ou de deux vecteurs**

Soit $E$ un espace vectoriel réel.

- Toute famille de vecteurs de $E$ qui contient $0_E$ est liée.
- Pour $u \in E$, la famille $(u)$ est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
- Pour $u$ et $v$ dans $E$, la famille $(u, v)$ est liée si et seulement si l'un des deux vecteurs est le produit de l'autre par un réel : il existe un réel $\lambda$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$. On dit alors que $u$ et $v$ sont **colinéaires**.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Si $u_j = 0_E$, la combinaison de coefficient $1$ devant $u_j$ et $0$ devant les autres vecteurs vaut $0_E$ (F02) ; ses coefficients ne sont pas tous nuls : la famille est liée.

**Étape 2.** D'après F02, $\alpha u = 0_E$ équivaut à $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$. Si $u \neq 0_E$, l'égalité $\alpha u = 0_E$ entraîne donc $\alpha = 0$ : $(u)$ est libre. Si $u = 0_E$, $(u)$ est liée (étape 1).

**Étape 3.** Supposons $\alpha u + \beta v = 0_E$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Si $\alpha \neq 0$, alors $u = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) v$. Sinon $\beta \neq 0$ et $\beta v = 0_E$, donc $v = 0_E = 0 \cdot u$ (F02). Réciproquement, si $u = \lambda v$, alors $1 \cdot u + (-\lambda) v = 0_E$ (F02), relation de coefficient $1 \neq 0$ : $(u, v)$ est liée ; de même si $v = \lambda u$.

**Propriété : Famille liée et combinaison linéaire**

Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel $E$, avec $p \geq 2$. La famille est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ est une combinaison linéaire des autres.

**Démonstration**

**Étape 1.** Supposons la famille liée : $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0_E$, avec un coefficient $\alpha_j \neq 0$. On isole $u_j$ : $u_j = \sum_{k \neq j} \left(-\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right) u_k$, combinaison linéaire des autres vecteurs.

**Étape 2.** Réciproquement, si $u_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k u_k$, alors $\sum_{k \neq j} \lambda_k u_k + (-1) u_j = 0_E$ (F02). Dans cette relation, le coefficient de $u_j$ vaut $-1 \neq 0$ : la famille est liée.

**Vérifie : Le cas délicat**

Dans l'étape 3 de la preuve pour deux vecteurs, on suppose $\alpha u + \beta v = 0_E$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, puis $\alpha = 0$. Pourquoi a-t-on alors $\beta \neq 0$ ?

**A.** Parce que $v$ est un vecteur non nul.

**Faux.**

Rien ne le suppose : $v$ peut être nul, c'est même la conclusion.

**B.** Parce que le couple $(\alpha, \beta)$ n'est pas nul.

**Juste.**

Juste : si l'on avait aussi $\beta = 0$, le couple serait nul.

**C.** Parce que $u$ et $v$ sont colinéaires.

**Faux.**

C'est ce qu'on veut prouver : on ne peut pas l'utiliser.

**D.** Parce que la famille $(u)$ est libre.

**Faux.**

Cette hypothèse n'apparaît pas dans l'étape 3.

**Correction**

On a supposé $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ : l'un au moins des deux coefficients n'est pas nul. Si $\alpha = 0$, c'est donc $\beta$. Alors $\beta v = 0_E$ avec $\beta \neq 0$, et les règles de calcul donnent $v = 0_E = 0 \cdot u$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Dans une relation de dépendance, on choisit un coefficient non nul $\alpha_j$. On **isole** $u_j$ en divisant par $\alpha_j$ : $u_j$ est une combinaison des autres vecteurs.

Dans l'autre sens, une écriture $u_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k u_k$ fournit une relation où le coefficient de $u_j$ vaut $-1$.

**Exemple : « l'un au moins », pas « chacun »**

Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\big((1,0),(2,0),(0,1)\big)$ est liée, car $2(1,0)-(2,0)=(0,0)$. Le vecteur $(2,0)$ est une combinaison des autres. Mais $(0,1)$ n'en est pas une : toute combinaison $\alpha(1,0)+\beta(2,0)$ a une seconde composante nulle.

Une famille liée a donc **un** vecteur combinaison des autres, pas forcément chacun.

## Ajouter ou retirer un vecteur

Un vecteur $v$ hors de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ apporte une direction nouvelle. **Pourquoi**, ajouté à une famille libre, la garde-t-il libre ? Dans une relation, son coefficient est forcément nul. Sinon, on pourrait isoler $v$.

**Propriété : Ajouter ou retirer un vecteur**

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel réel $E$.

- Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est libre et si $v$ est un vecteur de $E$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$, alors la famille $(u_1,\dots,u_p,v)$ est libre.
- Si $p \geq 2$ et si $u_p$ est une combinaison linéaire de $u_1,\dots,u_{p-1}$, alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{p-1}) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\beta$ tels que $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_pu_p+\beta v=0_E$. Si $\beta\neq 0$, alors $v=\sum_{k=1}^{p}\left(-\dfrac{\alpha_k}{\beta}\right)u_k\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$, ce qui est exclu. Donc $\beta=0$, puis $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_pu_p=0_E$, et $\alpha_1=\dots=\alpha_p=0$ car $(u_1,\dots,u_p)$ est libre.

**Étape 2.** Toute combinaison de $u_1,\dots,u_{p-1}$ est une combinaison de $u_1,\dots,u_p$ (coefficient $0$ devant $u_p$). Réciproquement, écrivons $u_p=\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_ku_k$. Alors $\sum_{k=1}^{p}\alpha_ku_k=\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_k+\alpha_p\lambda_k)u_k$ (axiomes de F01) : c'est une combinaison de $u_1,\dots,u_{p-1}$. D'où l'égalité des deux ensembles.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Pour le premier point, on raisonne sur le **coefficient du vecteur ajouté** : s'il n'était pas nul, on isolerait $v$ dans $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$.

Pour le second, on remplace $u_p$ par son écriture et on regroupe. Retirer un vecteur combinaison des autres ne change pas le sous-espace engendré.

**À toi : Rédige : ajouter un vecteur**

On pose $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$. Rédige la preuve que $(u_1, u_2, w)$ est libre. Montre d'abord que $(u_1, u_2)$ est libre, puis que $w \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Pour $(u_1, u_2)$ : deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre.
**Indice 2**
Pour $w$ : écris $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha, 2\beta, \alpha + \beta)$ et compare à $(0, 0, 1)$.
**Indice 3**
Point délicat : conclus avec le résultat sur l'ajout d'un vecteur, en citant ses deux hypothèses.

**Réponse**
« **Liberté de** $(u_1, u_2)$**.** Si $u_2 = \lambda u_1$, la première composante donne $\lambda = 0$, puis $u_2 = (0, 0, 0)$ : impossible. Si $u_1 = \lambda u_2$, la première composante donne $1 = 0$ : impossible. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires : $(u_1, u_2)$ est libre.

**Le vecteur** $w$**.** Pour tous réels $\alpha$, $\beta$, on a $\alpha u_1 + \beta u_2 = (\alpha, 2\beta, \alpha + \beta)$. Ce vecteur vaut $(0, 0, 1)$ seulement si $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 1$, d'où $0 = 1$ : impossible. Donc $w \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

**Conclusion.** Une famille libre, complétée par un vecteur hors de son Vect, reste libre : $(u_1, u_2, w)$ est libre. »

Exemple **: Contre-exemple : les deux hypothèses servent**

**Sans le vecteur hors du Vect.** La famille $\big((1, 1, 0)\big)$ est libre. Mais $(2, 2, 0) = 2(1, 1, 0)$ est dans son Vect. Donc $\big((1, 1, 0), (2, 2, 0)\big)$ est liée.

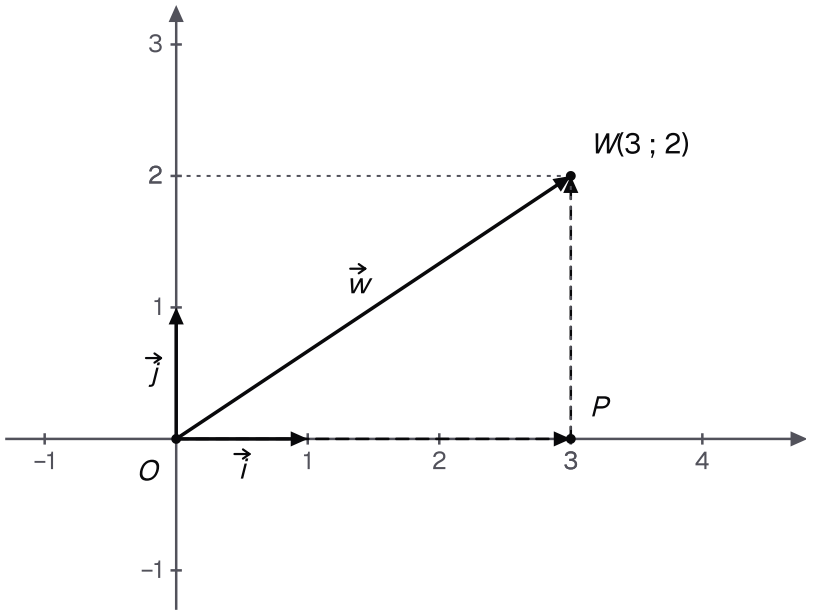
**Sans la famille libre.** La famille $\big((1, 1, 0), (2, 2, 0)\big)$ est liée. Le vecteur $(0, 0, 1)$ n'est pas dans son Vect : toute combinaison a une troisième composante nulle. Pourtant, $\big((1, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 0, 1)\big)$ reste liée.

## Base et composantes d'un vecteur

### Une écriture, ou plusieurs

Dans un repère du plan, tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit $x\vec{i} + y\vec{j}$, et d'une seule façon : $(x, y)$ sont ses coordonnées.

Deux exigences se cachent ici. Tout vecteur doit s'écrire : la famille est génératrice. Et d'une seule façon : nous allons voir que c'est la liberté.




**Dans le repère (O, i, j), par exemple pour W(3 ; 2) : le vecteur w = OW s'écrit 3i + 2j, et ses coordonnées 3 et 2 se lisent sur les axes.**

**Devine : Combien d'écritures**

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (3, 0)$. Comment le vecteur $(4, 1)$ s'écrit-il comme combinaison de $u$, $v$ et $w$ ?

**A.** D'une seule façon : $2u + v$.

**Faux.**

$u + w = (4, 1)$ aussi : il y a une autre écriture.

**B.** D'aucune façon.

**Faux.**

$2u + v = (2, 2) + (2, -1) = (4, 1)$ : une écriture existe.

**C.** De plusieurs façons, par exemple $2u + v$ et $u + w$.

**Juste.**

Juste : comme $w = u + v$, on peut échanger $w$ contre $u + v$.

**D.** D'une seule façon, car les trois vecteurs sont non nuls.

**Faux.**

Être non nuls ne garantit pas l'unicité : $u + w$ et $2u + v$ donnent $(4, 1)$.

**Correction**

$2u + v = (2, 2) + (2, -1) = (4, 1)$ et $u + w = (1, 1) + (3, 0) = (4, 1)$. Il y a deux écritures, car $w = u + v$ : la famille $(u, v, w)$ est liée.

Une famille génératrice mais liée ne donne pas de coordonnées uniques.

## Base

**Définition : Base d'un espace vectoriel**

Soit $E$ un espace vectoriel réel. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de $E$ est une **base** de $E$ si elle est à la fois libre et génératrice de $E$.

**Exemple : une base de $\mathbb{R}^{2}$**

Montrons que $\mathcal{B} = \big((2,1),(1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'égalité $\alpha(2,1) + \beta(1,1) = (x,y)$ équivaut à $2\alpha + \beta = x$ et $\alpha + \beta = y$. La différence donne $\alpha = x - y$, puis $\beta = 2y - x$.

- **Génératrice** : ces réels existent pour tout $(x,y)$.
- **Libre** : pour $(x,y) = (0,0)$, la seule solution est $\alpha = \beta = 0$.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Dans l'activité, la relation $w = u + v$ fabriquait une seconde écriture.

**Pourquoi** une base donne-t-elle toujours une écriture unique ? Deux écritures d'un même vecteur, soustraites, donnent une relation de dépendance. La liberté annule alors tous les coefficients. Les composantes d'une somme se liront ensuite par simple regroupement.

## Écriture unique et composantes

**Théorème : Base et écriture unique**

Soit $E$ un espace vectoriel réel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de $E$. $\mathcal{B}$ est une base de $E$ si et seulement si tout vecteur $u$ de $E$ s'écrit **de façon unique** sous la forme

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \qquad \text{avec } x_1, \dots, x_n \text{ réels.}$$

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Supposons que $\mathcal{B}$ est une base. Elle est génératrice : tout $u \in E$ s'écrit $u = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Si de plus $u = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, la différence donne $\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k = 0_E$ (F02). La famille étant libre, $x_k - y_k = 0$ pour tout $k$ : l'écriture est unique.

**Étape 2.** Réciproquement, supposons l'existence et l'unicité de l'écriture. L'existence dit que $\mathcal{B}$ est génératrice. Si $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$, comme on a aussi $0_E = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot e_k$ (F02), l'unicité de l'écriture de $0_E$ donne $\alpha_k = 0$ pour tout $k$ : $\mathcal{B}$ est libre. C'est donc une base (F14).

**Définition : Composantes d'un vecteur dans une base**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel réel $E$ et $u$ un vecteur de $E$. Les réels $x_1, \dots, x_n$ de l'écriture unique $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ (F15) s'appellent les **composantes** de $u$ dans la base $\mathcal{B}$ ; $x_k$ est la composante de $u$ selon $e_k$. Elles dépendent de la base et de l'ordre de ses vecteurs.

**Exemple : lire des composantes**

Une base transforme chaque vecteur en une liste de réels, ses composantes, dans l'ordre de la base. Dans la base $\mathcal{B}$ de l'exemple, $(5, 4) = 1 \cdot (2, 1) + 3 \cdot (1, 1)$ : ses composantes sont $(1, 3)$. De même, $(1, 0) = 1 \cdot (2, 1) - 1 \cdot (1, 1)$ : ses composantes sont $(1, -1)$.

**Propriété : Composantes d'une somme et d'un produit par un réel**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel réel $E$. Si $u$ a pour composantes $(x_1, \dots, x_n)$ et $v$ a pour composantes $(y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$, et si $\alpha$ est un réel, alors :

- $u + v$ a pour composantes $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ ;
- $\alpha u$ a pour composantes $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ ;
- $u = v$ si et seulement si $x_k = y_k$ pour tout $k$ ; en particulier, $u = 0_E$ si et seulement si toutes ses composantes sont nulles.

**Démonstration**

**Étape 1.** Par les axiomes de F01 (associativité et commutativité de $+$, distributivités) : $u + v = \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) e_k$ et $\alpha u = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k) e_k$. Par l'unicité de l'écriture (F15), ce sont les composantes de $u + v$ et de $\alpha u$.

**Étape 2.** Si $x_k = y_k$ pour tout $k$, les deux écritures sont les mêmes, donc $u = v$. Réciproquement, si $u = v$, les écritures $\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ représentent le même vecteur : elles coïncident (F15). Enfin, les composantes de $0_E$ sont toutes nulles, car $0_E = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot e_k$ (F02).

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

**Unicité et liberté.** On soustrait deux écritures du même vecteur, et la liberté annule les coefficients.

Ensuite, toute égalité de vecteurs se lit composante par composante dans une base. C'est le principe de tous les calculs dans une base.

## Sans liberté, pas de composantes

**Vérifie : L'argument décisif**

Dans la preuve sur les composantes d'une somme, quel argument montre que les réels $x_k + y_k$ sont **les** composantes de $u + v$ ?

**A.** L'unicité de l'écriture dans une base.

**Juste.**
Juste : $u + v$ s'écrit $\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)e_k$, et cette écriture est la seule.

**B.** La commutativité de l'addition dans $E$.

**Faux.**
Elle sert à regrouper les termes, mais ne dit pas que l'écriture obtenue est la seule.

**C.** Le fait que la base est génératrice.

**Faux.**
Il donne l'existence d'une écriture, pas son unicité.

**D.** La définition de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

**Faux.**
Elle dit que $u + v$ est une combinaison, sans dire laquelle.

**Correction**
Le regroupement donne une écriture $u + v = \sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k)e_k$. Pour que ce soient **les** composantes, cette écriture doit être la seule.

C'est l'unicité de l'écriture dans une base. Sans elle, $u + v$ pourrait avoir d'autres coefficients.

**Exemple : Contre-exemple : une famille génératrice mais liée**

Dans $\mathbb{C}$, la famille $(1, i, 1 + i)$ engendre $\mathbb{C}$, mais elle est liée : $1 \cdot 1 + 1 \cdot i - (1 + i) = 0$.

Alors $3 + 2i = 3 \cdot 1 + 2 \cdot i$, mais aussi $3 + 2i = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i + 2(1 + i)$. Un même vecteur reçoit deux listes de coefficients, $(3, 2, 0)$ et $(1, 0, 2)$.

Parler de ses composantes n'a pas de sens : la liberté est nécessaire.

## Calculer des composantes

**Méthode : calculer les composantes d'un vecteur dans une base**

1. **Poser** $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, avec des inconnues réelles.
2. **Traduire** en un système, puis le résoudre.
3. **Conclure** en nommant la base : la solution est unique, ce sont les composantes de $u$, dans l'ordre des vecteurs de la base.

**Rédaction attendue.** « On cherche des réels $x_1, \dots, x_n$ tels que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Le système … a pour unique solution … Donc $u$ a pour composantes $(\dots)$ dans la base $\mathcal{B}$. »

Exemple : **Exemple guidé : des composantes dans une base non canonique**

**Énoncé.** Dans la base $\mathcal{B} = \big((2,1),(1,1)\big)$, cherche les composantes de $u = (3,-4)$.

**Système.** Pour des réels $\alpha, \beta$, l'égalité $\alpha(2,1) + \beta(1,1) = (3,-4)$ équivaut à $2\alpha + \beta = 3$ et $\alpha + \beta = -4$.

**Résolution.** La différence donne $\alpha = 7$, puis $\beta = -4 - 7 = -11$. La solution est unique. Contrôle : $7(2,1) - 11(1,1) = (3,-4)$.

**Conclusion.** $u$ a pour composantes $(7,-11)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Attention : **les composantes dépendent de la base**

Le vecteur $(3,-4)$ a pour composantes $(3,-4)$ dans la base $\big((1,0),(0,1)\big)$. Il a pour composantes $(7,-11)$ dans $\mathcal{B} = \big((2,1),(1,1)\big)$.

Dans $\big((1,1),(2,1)\big)$, mêmes vecteurs dans l'autre ordre, ses composantes sont $(-11,7)$. Une liste de composantes sans base nommée ne veut rien dire.

**À toi : Rédige : une base de $\mathbb{R}^{2}$**

Rédige la preuve que $\big((1,2),(3,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donne ensuite les composantes de $(5,5)$ dans cette base. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Écris $\alpha(1,2) + \beta(3,1) = (x,y)$ et traduis en système.
**Indice 2**
La seconde équation donne $\beta = y - 2\alpha$ ; reporte dans la première.
**Indice 3**
Point délicat : existence **et** unicité de la solution, pour tout $(x,y)$, donnent une base par le théorème de l'écriture unique.

**Réponse**
« Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'égalité $\alpha(1,2) + \beta(3,1) = (x,y)$ équivaut à $\alpha + 3\beta = x$ et $2\alpha + \beta = y$. La seconde donne $\beta = y - 2\alpha$, puis la première $\alpha + 3y - 6\alpha = x$. Donc $\alpha = \dfrac{3y - x}{5}$ et $\beta = \dfrac{2x - y}{5}$.

Tout vecteur s'écrit donc de façon unique : $\big((1,2),(3,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Pour $(5,5)$ : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, car $2(1,2) + (3,1) = (5,5)$. Les composantes de $(5,5)$ dans cette base sont $(2,1)$. »

## Bases de référence et base d'un sous-espace

### Se décomposer soi-même

**Devine : Un triplet décomposé**

Dans $\mathbb{R}^3$, comment le triplet $(4, -2, 7)$ s'écrit-il avec $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ ?

**A.** $4(1,0,0) + 7(0,0,1)$
**Faux.**
Il manque la composante $-2$ : cette somme vaut $(4,0,7)$.

**B.** $4(1,0,0) - 2(0,1,0) + 7(0,0,1)$
**Juste.**
Juste : chaque coefficient est une composante du triplet.

**C.** $28(1,0,0) - 2(0,1,0)$
**Faux.**
Cette somme vaut $(28,-2,0)$ : ce n'est pas le triplet.

**D.** $7(1,0,0) - 2(0,1,0) + 4(0,0,1)$
**Faux.**
L'ordre compte : cette somme vaut $(7,-2,4)$.

**Correction**
$4(1,0,0) - 2(0,1,0) + 7(0,0,1) = (4,0,0) + (0,-2,0) + (0,0,7) = (4,-2,7)$.

Dans $\mathbb{R}^3$, un triplet se décompose avec ses propres composantes. C'est l'idée des bases de référence.

**Pourquoi** ces familles sont-elles des bases ?

La décomposition par ses propres composantes donne une famille génératrice. Une combinaison nulle a tous ses coefficients nuls : la famille est libre. Pour $\mathbb{C}$, on s'appuie sur l'unicité de la forme algébrique $a + ib$, vue au chapitre des nombres complexes.

### Les bases de référence

**Propriété : Bases de référence**

- Dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ forment une base $(e_1, e_2)$, appelée **base canonique** ; les composantes de $(x,y)$ y sont $(x,y)$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ forment la base canonique $(e_1, e_2, e_3)$.
- Dans $\mathbb{C}$, la famille $(1, i)$ est une base ; les composantes de $z = a + ib$, avec $a$ et $b$ réels, y sont $(a,b)$.

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, les quatre matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  forment une base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les neuf matrices qui ont un coefficient égal à $1$ et tous les autres nuls forment une base.

---

**Démonstration**

**Étape 1 ($\mathbb{R}^3$).** Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ : la famille est génératrice. Si $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = (0, 0, 0)$, alors $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ : elle est libre. C'est une base (F14). Même calcul dans $\mathbb{R}^2$, avec deux composantes.

**Étape 2 ($\mathbb{C}$).** Tout complexe s'écrit $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, avec $a$ et $b$ réels : $(1, i)$ est génératrice. Si $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$ avec $a$ et $b$ réels, l'unicité de la forme algébrique donne $a = b = 0$ : elle est libre.

**Étape 3 (matrices).** Pour tous réels $a, b, c, d$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$, et cette matrice est la matrice nulle si et seulement si $a = b = c = d = 0$ : la famille est génératrice et libre. Même raisonnement avec les neuf matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

Dans un espace de référence, la base est faite de vecteurs qui ont **un seul coefficient égal à** $1$, les autres nuls.

Tout vecteur se décompose avec ses propres composantes : la famille est génératrice. Une combinaison nulle a tous ses coefficients nuls : elle est libre. Pour $\mathbb{C}$, cette dernière étape est l'unicité de la forme algébrique.

**Vérifie : La liberté de $(1, i)$**

Dans la preuve, quel résultat montre que la famille $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ est libre ?

**A.** L'égalité $i^2 = -1$.

**Faux.**
Elle ne dit rien sur une combinaison $a \cdot 1 + b \cdot i$ nulle.

**B.** L'égalité $|i| = 1$.

**Faux.**
Le module n'intervient pas dans la preuve.

**C.** La commutativité du produit des complexes.

**Faux.**
Elle ne permet pas de conclure que $a = b = 0$.

**D.** L'unicité de la forme algébrique d'un complexe.

**Juste.**

Juste : $a + ib = 0 + i \cdot 0$, avec $a$ et $b$ réels, force $a = b = 0$.

**Correction**

Si $a \cdot 1 + b \cdot i = 0$, avec $a$ et $b$ réels, alors $a + ib = 0 + i \cdot 0$. L'unicité de la forme algébrique donne $a = 0$ et $b = 0$ : la famille $(1, i)$ est libre.

**Exemple : Contre-exemple : des coefficients réels**

Dans $\mathbb{C}$, vu comme espace vectoriel **réel**, la famille $(1, i)$ est libre.

Si l'on acceptait des coefficients complexes, on aurait $i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0$. Cette relation a des coefficients non tous nuls : la famille serait liée.

L'hypothèse « coefficients réels » est donc indispensable. C'est pourquoi on précise toujours : $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel **réel**, de base $(1, i)$.

## Une base d'un sous-espace

**Attention : libre ou génératrice ne suffit pas**

Une base exige **les deux** propriétés. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(E_{11}, E_{22})$ est libre, mais elle n'engendre pas $E_{12}$ : toute combinaison $\alpha E_{11} + \beta E_{22}$ a ses coefficients hors diagonale nuls.

Inversement, $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, I)$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Mais elle est liée, car $I = E_{11} + E_{22}$.

**Méthode : déterminer une base d'un sous-espace vectoriel**

1. **Paramétrer** les éléments du sous-espace $F$ : on obtient une famille génératrice de $F$.
2. **Prouver la liberté** de cette famille par une relation résolue. Si elle est liée, retirer un vecteur combinaison des autres, puis recommencer.
3. **Conclure** : la famille obtenue est libre et génératrice de $F$, c'est une base de $F$.

**Rédaction attendue.** « Tout élément de $F$ s'écrit $au_1 + bu_2$, avec $a, b$ réels, et toute telle combinaison est dans $F$ : $(u_1, u_2)$ engendre $F$. Si $au_1 + bu_2 = 0_E$, alors … donc $a = b = 0$ : la famille est libre. Donc $(u_1, u_2)$ est une base de $F$. »

**Exemple : Exemple guidé : une base d'un sous-espace de matrices**

**Énoncé.** Reprends le sous-espace $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \text{ et } b = 2c \right\}$ de la section des sous-espaces.

**Paramétrer.** Les conditions donnent $d = -a$ et $b = 2c$. On note $N_1$ et $N_2$ les deux matrices ci-dessous ; pour tous réels $a$, $c$ :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 2c \\ c & -a \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + c\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aN_1 + cN_2.\end{aligned}$$

Réciproquement, $aN_1 + cN_2$ vérifie les deux conditions : $(N_1, N_2)$ engendre $F$.

**Liberté.** Si $aN_1 + cN_2 = O$, ses coefficients $a$ et $c$ sont nuls.

**Conclusion.** $(N_1, N_2)$ est libre et engendre $F$ : c'est une base de $F$.

## Une base d'un sous-espace de fonctions

Exemple **: Exemple guidé : une base d'un sous-espace de fonctions**

**Énoncé.** Soit $G$ l'ensemble des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a$, $b$, $c$ réels tels que $a + b + c = 0$.

**Paramétrer.** $c = -a - b$, donc $ax^2 + bx + c = a(x^2 - 1) + b(x - 1)$ pour tout réel $x$. On pose $h_1 : x \mapsto x^2 - 1$ et $h_2 : x \mapsto x - 1$.

Réciproquement, $ah_1 + bh_2$ a des coefficients de somme $a + b - a - b = 0$. Donc $G = \mathrm{Vect}(h_1, h_2)$.

**Liberté.** Soit $\alpha$, $\beta$ réels tels que $\alpha h_1 + \beta h_2$ soit la fonction nulle. Alors la valeur en $x = 0$ donne $-\alpha - \beta = 0$. La valeur en $x = -1$ donne $-2\beta = 0$. Donc $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$.

**Conclusion.** $(h_1, h_2)$ est libre et engendre $G$ : c'est une base de $G$.

**À toi : Rédige : une base d'un plan de $\mathbb{R}^{3}$**

Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - 2z = 0\}$. Rédige la recherche d'une base de $H$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Exprime $x$ en fonction de $y$ et $z$, puis sépare $y$ et $z$.
**Indice 2**
Tu dois trouver $(x, y, z) = y(\dots) + z(\dots)$ : deux vecteurs générateurs.
**Indice 3**
Point délicat : n'oublie ni la réciproque, ni la preuve de la liberté.

**Réponse**
« Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in H$ si et seulement si $x = -3y + 2z$, c'est-à-dire $(x, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(2, 0, 1)$, avec $y$, $z$ réels. Donc $H = \mathrm{Vect}\big((-3, 1, 0), (2, 0, 1)\big)$.

Si $a(-3,1,0)+b(2,0,1)=(0,0,0)$, les deuxième et troisième composantes donnent $a=0$ et $b=0$ : la famille est libre.

Donc $\big((-3,1,0),(2,0,1)\big)$ est une base de $H$. »

## Dimension

## Trop de vecteurs

**Devine : Trois vecteurs du plan**

Dans $\mathbb{R}^2$, deux vecteurs non colinéaires engendrent déjà tout le plan. On pose $u=(1,2)$, $v=(3,-1)$ et $w=(5,3)$. Que dire de la famille $(u,v,w)$ ?

**A.** Elle est libre : aucun vecteur n'est multiple d'un autre.
**Faux.**
C'est le piège des vecteurs pris deux à deux : $2u+v=w$.

**B.** Elle est libre : aucun des trois vecteurs n'est nul.
**Faux.**
Être non nuls ne suffit pas : cherche une relation.

**C.** Elle est liée : $2u+v-w=(0,0)$.
**Juste.**
Juste : $2u+v=(2,4)+(3,-1)=(5,3)=w$.

**D.** On ne peut pas conclure sans un calcul plus avancé.
**Faux.**
Un calcul simple suffit : $2u+v=w$.

**Correction**
$2u+v=(2,4)+(3,-1)=(5,3)=w$, donc $2u+v-w=(0,0)$ : la famille est liée.

Ce n'est pas un hasard : dans $\mathbb{R}^2$, engendré par deux vecteurs, trois vecteurs sont toujours liés. Le théorème qui suit le dit en général.

**Pourquoi est-ce vrai ?** Si $n$ vecteurs engendrent $E$, chaque vecteur de $E$ est décrit par $n$ coefficients. Avec $n+1$ vecteurs, il y a une inconnue de trop : on peut éliminer et trouver une relation.

La preuve complète est une récurrence sur $n$, assez longue. Voici son idée.

## Une idée de preuve

**Théorème : Plus de n vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs**

Soit $E$ un espace vectoriel réel engendré par une famille de $n$ vecteurs, avec $n \geq 1$. Alors toute famille de $p$ vecteurs de $E$, avec $p > n$, est liée.

**Démonstration**

Idée de la preuve. Une famille qui contient une sous-famille liée est liée : il suffit de traiter $p = n + 1$. On démontre par récurrence sur $n$ : « dans tout espace engendré par $n$ vecteurs, $n + 1$ vecteurs sont liés ». Soit $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $v_1, \dots, v_{n+1}$ dans $E$. Si aucun $v_j$ ne fait intervenir $u_n$, les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont dans l'espace $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ (F09), donc liés par l'hypothèse de récurrence. Sinon, après renumérotation, $u_n$ figure dans $v_{n+1}$ avec un coefficient non nul ; on retranche à chaque $v_j$ ($j \leq n$) le multiple de $v_{n+1}$ qui fait disparaître $u_n$. Les $n$ vecteurs obtenus sont dans $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$, donc liés, d'où une relation entre $v_1, \dots, v_{n+1}$. Étapes omises : l'initialisation ($n = 1$, par F11), le calcul des multiples retranchés, et la vérification que la relation finale n'a pas tous ses coefficients nuls.

Ce qui précède est une **idée de preuve** : des étapes sont omises, et l'esquisse les nomme à la fin.

La récurrence porte sur l'énoncé « dans tout espace engendré par $n$ vecteurs, $n + 1$ vecteurs sont liés ». Le théorème est vrai ; l'esquisse montre son mécanisme, l'élimination de $u_n$. Tout ce qui suit s'appuie sur lui.

**Exemple : quatre vecteurs de $\mathbb{R}^{3}$**

L'espace $\mathbb{R}^3$ est engendré par trois vecteurs. Le théorème affirme donc que quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont toujours liés.

Avec $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (2, 2, 3)$, on trouve $u_1 + u_2 + u_3 = (2, 2, 3) = u_4$. Donc $u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = (0, 0, 0)$ : la famille est liée.

**Pourquoi** toutes les bases d'un espace ont-elles le même nombre de vecteurs ? Une base est libre et génératrice : on applique ce théorème dans les deux sens.

Pour l'existence d'une base, on part d'une famille génératrice et on garde la plus courte qui engendre encore.

## Existence et nombre de vecteurs

**Théorème : Existence d'une base**

Soit $E$ un espace vectoriel réel, avec $E \neq \{0_E\}$, engendré par une famille finie $(u_1, \dots, u_p)$. Alors on peut **extraire** de $(u_1, \dots, u_p)$ une base de $E$ : certains des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ forment une base de $E$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Parmi les sous-familles de $(u_1, \dots, u_p)$ qui engendrent $E$ (il en existe : la famille entière), on en choisit une, notée $\mathcal{G}$, dont le nombre $m$ de vecteurs est le plus petit possible (plus petit élément d'une partie non vide de $\mathbb{N}$). Si $m = 1$, $\mathcal{G} = (u)$ engendre $E \neq \{0_E\}$ ; comme $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$, $u \neq 0_E$, et $(u)$ est libre (F11).

**Étape 2.** Si $m \geq 2$, supposons $\mathcal{G}$ liée. D'après F12, l'un de ses vecteurs est une combinaison linéaire des autres ; on le place en dernier ($+$ est commutative) puis on le retire : on obtient une sous-famille de $m - 1$ vecteurs qui engendre encore $E$ (F13). C'est contraire au choix de $m$ : donc $\mathcal{G}$ est libre.

**Étape 3.** $\mathcal{G}$ est libre et génératrice de $E$ : c'est une base de $E$ (F14).

**Théorème : Toutes les bases ont le même nombre de vecteurs**

Soit $E$ un espace vectoriel réel qui possède une base de $n$ vecteurs, avec $n \geq 1$. Alors toute base de $E$ a exactement $n$ vecteurs.

**Démonstration**

**Étape 1.** Soit $\mathcal{B}$ une base de $n$ vecteurs et $\mathcal{B}'$ une base de $m$ vecteurs. La famille $\mathcal{B}$ engendre $E$ et $\mathcal{B}'$ est libre : si l'on avait $m > n$, F19 rendrait $\mathcal{B}'$ liée. Donc $m \leq n$.

**Étape 2.** Une base a au moins un vecteur (F08, F14) : $m \geq 1$. En échangeant les rôles, $\mathcal{B}'$, famille de $m \geq 1$ vecteurs, engendre $E$ et $\mathcal{B}$ est libre : F19 donne $n \leq m$. Ainsi $m = n$.

**Vérifie : Deux inégalités**

Dans la preuve que toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, comment obtient-on $m = n$ ?

**A.** En prouvant $m \leq n$, puis $n \leq m$ en échangeant les deux bases.
**Juste.**
Juste : une famille libre n'est jamais plus longue qu'une famille génératrice.

**B.** En comptant les vecteurs de chaque base un par un.
**Faux.**
On ne connaît pas les bases : on raisonne sans les écrire.

**C.** En extrayant une base de chaque famille génératrice.
**Faux.**
L'extraction sert à l'existence d'une base, pas à comparer deux bases.

**D.** En montrant que toute famille de $n$ vecteurs est libre.
**Faux.**
C'est faux en général : deux vecteurs colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment une famille liée.

**Correction**
$\mathcal{B}$ engendre $E$ et $\mathcal{B}'$ est libre : le théorème sur les familles trop longues interdit $m > n$, donc $m \leq n$. En échangeant les rôles, $\mathcal{B}'$ engendre $E$ et $\mathcal{B}$ est libre : $n \leq m$. Donc $m = n$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

**Existence** : parmi les sous-familles génératrices, on prend la plus courte. Elle est libre, sinon on pourrait encore retirer un vecteur.

**Même nombre** : une famille libre n'est jamais plus longue qu'une famille génératrice. On applique ce fait dans les deux sens.

**Exemple : Contre-exemple : l'espace réduit au vecteur nul**

Le théorème d'existence suppose $E \neq \{0_E\}$, et cette hypothèse est nécessaire. L'espace $\{0_E\}$ est engendré par la famille $(0_E)$. Mais cette famille est liée, car $1 \cdot 0_E = 0_E$.

Toute famille de vecteurs de $\{0_E\}$ contient $0_E$ : aucune n'est libre, et cet espace n'a pas de base. C'est pourquoi on convient que sa dimension vaut $0$.

## La dimension

**Définition : Dimension d'un espace vectoriel**

Un espace vectoriel réel $E$ est **de dimension finie** s'il est engendré par une famille finie de vecteurs.

- Si $E \neq \{0_E\}$, $E$ possède une base (F20) et toutes ses bases ont le même nombre $n$ de vecteurs (F21) : ce nombre s'appelle la **dimension** de $E$ et se note $\dim E$.
- Par convention, $\dim\{0_E\} = 0$.

D'après F18 : $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{C} = 2$, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$.

**Exemple : des dimensions à connaître**

Les bases de référence donnent $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{C} = 2$, $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ et $\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = 9$.

Pour un sous-espace, on **exhibe une base** et on compte ses vecteurs. Le sous-espace $F$ de matrices, de base $(N_1, N_2)$, a pour dimension $2$. De même, le sous-espace $G$ de fonctions, de base $(h_1, h_2)$, a pour dimension $2$.

**À toi : Rédige : une dimension**

Soit $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Rédige la preuve que $K$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension $2$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**

Écris $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ comme combinaison de $I$ et d'une matrice élémentaire.

**Indice 2**

Tu obtiens $K = \mathrm{Vect}(I, E_{12})$ : c'est un sous-espace.

**Indice 3**

Point délicat : la dimension se prouve par une base exhibée ; prouve la liberté de $(I, E_{12})$.

**Réponse**

« Pour tous réels $a, b$ : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bE_{12}$. Donc $K = \mathrm{Vect}(I, E_{12})$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Si $aI + bE_{12} = O$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = O$, donc $a = b = 0$ : $(I, E_{12})$ est libre.

C'est une base de $K$, formée de deux matrices. Donc $\dim K = 2$. »

## Utiliser la dimension

## Compter avant de calculer

**Devine : Cinq matrices**

On sait que $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$. Une famille de cinq matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut-elle être libre ?

**A.** Oui, si les matrices sont bien choisies.

**Faux.**

Aucun choix ne marche : cinq vecteurs dans un espace engendré par quatre sont liés.

**B.** Non, jamais : elle est toujours liée.

**Juste.**

Juste : ici, une famille libre a au plus $4$ vecteurs.

**C.** Oui, si aucune des matrices n'est nulle.

**Faux.**

Être non nulles ne suffit pas : le nombre de vecteurs l'interdit.

**D.** On ne peut le savoir qu'en résolvant un système.

**Faux.**

Ici, compter suffit : $5 > 4$.

**Correction**

> $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est engendré par les quatre matrices élémentaires. Une famille de cinq matrices a plus de vecteurs que cette famille génératrice : elle est liée.
>
> Compter les vecteurs permet donc parfois de conclure sans aucun calcul.

**Pourquoi est-ce vrai ?** En dimension $n$, une famille libre a au plus $n$ vecteurs, et une famille génératrice au moins $n$. Avec **exactement** $n$ vecteurs, une seule des deux propriétés entraîne l'autre.

La preuve combine les théorèmes de la section précédente, sans nouveau calcul.

## Familles en dimension n

**Propriété : Familles libres et génératrices en dimension n**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.

- Toute famille libre de vecteurs de $E$ a au plus $n$ vecteurs.
- Toute famille génératrice de $E$ a au moins $n$ vecteurs.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** $E$ possède une base de $n$ vecteurs (F22), qui engendre $E$. D'après F19, toute famille de plus de $n$ vecteurs de $E$ est liée : une famille libre a donc au plus $n$ vecteurs.

**Étape 2.** Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de $E$. Comme $\dim E = n \geq 1$, on a $E \neq \{0_E\}$ (F22) ; on en extrait une base de $E$ (F20), qui a au plus $p$ vecteurs ; or toute base de $E$ a $n$ vecteurs (F21). Donc $n \leq p$.

**Théorème : Familles de n vecteurs en dimension n**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$.

- Si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, c'est une base de $E$.
- Si $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice de $E$, c'est une base de $E$.

---

**Démonstration**

**Étape 1.** Supposons la famille libre. Si elle n'engendrait pas $E$, il existerait un vecteur $w$ de $E$ hors de $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$, et la famille $(v_1, \dots, v_n, w)$ serait libre (F13) : une famille libre de $n+1$ vecteurs, contraire à F23. Donc elle est génératrice, et c'est une base (F14).

**Étape 2.** Supposons la famille génératrice. Comme $\dim E = n \geq 1$, $E \neq \{0_E\}$ (F22) ; on extrait de $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $E$ (F20), en gardant certains des indices $1, \dots, n$. Cette base a $n$ vecteurs (F21) : tous les indices sont gardés, et la base extraite est la famille $(v_1, \dots, v_n)$ elle-même.

**Vérifie : La contradiction**

Dans l'étape 1 de la preuve sur les familles de $n$ vecteurs, on suppose la famille libre mais non génératrice. Quel résultat donne la contradiction ?

**A.** Une famille génératrice a au moins $n$ vecteurs.

**Faux.**
Cette partie sert à l'étape 2, pas à l'étape 1.

**B.** Une famille libre a au plus $n$ vecteurs.

**Juste.**
Juste : la famille $(v_1, \dots, v_n, w)$ serait libre, avec $n+1$ vecteurs.

**C.** Une famille qui contient $0_E$ est liée.

**Faux.**
Le vecteur ajouté n'est pas nul : il est hors du sous-espace engendré.

**D.** Toute base a exactement $n$ vecteurs.

**Faux.**
Ce résultat sert à l'étape 2, pour la famille génératrice.

**Correction**
Si la famille libre $(v_1, \dots, v_n)$ n'engendrait pas $E$, un vecteur $w$ serait hors de $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$. Ajouté à la famille, il la garderait libre : on aurait $n+1$ vecteurs libres. Or une famille libre a au plus $n$ vecteurs en dimension $n$ : contradiction.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

En dimension $n$, on **compte** d'abord. Moins de $n$ vecteurs : jamais génératrice. Plus de $n$ : jamais libre. Exactement $n$ : une seule des deux propriétés suffit.

Pour une famille libre, on raisonne par l'absurde : un vecteur de plus, ajouté, la garderait libre. Pour une famille génératrice, on en extrait une base ; elle a $n$ vecteurs, donc elle garde tous les indices : c'est la famille entière.

## Une base en dimension connue

**Méthode : montrer qu'une famille est une base quand la dimension est connue**

1. **Citer** la dimension $n$ de l'espace : espace de référence, ou base déjà trouvée.
2. **Compter** : la famille doit avoir exactement $n$ vecteurs.
3. **Prouver une seule propriété** : en général, la liberté.
4. **Conclure** par le théorème des familles de $n$ vecteurs en dimension $n$.

**Rédaction attendue.** « $(v_1, v_2, v_3)$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Donc $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. »

Exemple **: Exemple guidé : trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^{3}$**

**Énoncé.** Montre que $\big((1,2,0),(0,1,3),(1,0,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**Liberté.** Soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ réels tels que $\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,3)+\gamma(1,0,1)=(0,0,0)$. Alors $\alpha+\gamma=0$, $2\alpha+\beta=0$ et $3\beta+\gamma=0$.

Donc $\gamma=-\alpha$ et $\beta=-2\alpha$. La troisième devient $-6\alpha-\alpha=-7\alpha=0$. Ainsi $\alpha=\beta=\gamma=0$.

**Conclusion.** C'est une famille libre de trois vecteurs, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. D'après le théorème des familles de $n$ vecteurs en dimension $n$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Sans la liberté, compter ne suffirait pas.

Attention **: compter ne suffit pas**

Avoir $n$ vecteurs en dimension $n$ ne suffit pas. Dans $\mathbb{C}$, de dimension 2, la famille $(2-i, -4+2i)$ a deux vecteurs. Pourtant $-4+2i=-2(2-i)$ : elle est liée, ce n'est pas une base.

Le nombre de vecteurs ouvre la porte ; la liberté, ou le caractère générateur, la franchit.

**À toi : Complète : une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

On pose $Q_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $Q_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $Q_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ et $Q_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Complète la rédaction de la preuve que $(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Compter.** La famille a … matrices, et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dots$

**Liberté.** Soit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ réels tels que $\alpha Q_1+\beta Q_2+\gamma Q_3+\delta Q_4=O$. Cette matrice vaut $\begin{pmatrix}\dots&\dots\\\dots&\dots\end{pmatrix}$. Ses coefficients sont nuls, donc …

**Conclusion.** Quatre matrices libres en dimension $4$ : d'après le théorème des familles de $n$ vecteurs en dimension $n$, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Complète les pointillés avant de dévoiler la correction.

**Indice 1**
Les quatre matrices élémentaires forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ : elles donnent la dimension.
**Indice 2**
Additionne coefficient par coefficient : le coefficient en haut à gauche ne fait intervenir que $\alpha$.
**Indice 3**
Point délicat : lis les coefficients dans le bon ordre ; chacun donne la valeur du coefficient suivant.

**Réponse**
« La famille a quatre matrices, et $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels tels que $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 + \delta Q_4 = O$. Cette matrice vaut $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \beta+\gamma & \gamma+\delta \end{pmatrix}$.

Ses coefficients sont nuls : $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$, puis $\gamma = 0$, puis $\delta = 0$. La famille est libre.

Elle compte autant de matrices que la dimension : par le théorème des familles de $n$ vecteurs en dimension $n$, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. »

## La dimension d'un sous-espace

Un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ peut-il être de dimension $4$ ? **Pourquoi** la réponse est-elle non ?

Dans $F$, on prend une famille libre la plus longue possible. Elle a au plus $n$ vecteurs. Et elle engendre $F$, sinon on pourrait encore l'allonger.

**Propriété : Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ est de dimension finie et $\dim F \leq n$. De plus, $\dim F = n$ si et seulement si $F = E$.

**Démonstration**

**Étape 1.** Si $F = \{0_E\}$, alors $F = \mathrm{Vect}(0_E)$, $\dim F = 0 < n$ et $F \neq E$, car $E \neq \{0_E\}$ (F22). Sinon, $F$ contient un vecteur $u \neq 0_E$, et $(u)$ est libre (F11). Les familles libres de vecteurs de $F$ ont au plus $n$ vecteurs (F23) : on en choisit une, $(v_1, \ldots, v_p)$, dont le nombre $p$ de vecteurs est le plus grand possible (partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$), avec $1 \leq p \leq n$.

**Étape 2.** Soit $w \in F$. Si $w$ n'était pas dans $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$, la famille $(v_1, \ldots, v_p, w)$ de vecteurs de $F$ serait libre (F13), contraire au choix de $p$. Donc $F \subset \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$ ; l'inclusion inverse vient de F09. Ainsi $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de $F$ (F14) et $\dim F = p \leq n$ (F22).

**Étape 3.** Si $F = E$, $\dim F = n$. Si $\dim F = n$, $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille libre de $n$ vecteurs de $E$, donc une base de $E$ (F24) : $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) = F$.

**À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve**

On choisit dans $F$ une famille libre **de longueur maximale** : la dimension de $E$ borne cette longueur. Un vecteur de $F$ hors de son Vect permettrait de l'allonger : elle engendre donc $F$.

Si les dimensions sont égales, cette famille est une base de $E$, donc $F = E$.

**Vérifie : Quatre matrices libres**

Un sous-espace $F$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ contient quatre matrices formant une famille libre. Que peut-on conclure ?

**A.** $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Juste.**

Juste : $\dim F \geq 4$ et $\dim F \leq 4$, donc $\dim F = 4$ et $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**B.** $\dim F = 3$, car $F$ est plus petit que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Faux.**

Rien n'impose $F \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ : la famille libre force $\dim F \geq 4$.

**C.** Rien : il faudrait connaître les quatre matrices.

**Faux.**

Les dimensions suffisent à conclure.

**D.** $\dim F \geq 5$.

**Faux.**

Impossible : $\dim F \leq \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

**Correction**

$F$ est de dimension finie $d$, avec $d \leq 4$. Les quatre matrices forment une famille libre de $F$ : en dimension $d$, elle a au plus $d$ vecteurs, donc $4 \leq d$.

Ainsi $\dim F = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exemple : la dimension d'un sous-espace, et l'hypothèse nécessaire**

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $x = y - 2z$, soit $(x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$. Donc $F = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (-2, 0, 1)\big)$.

Si $a(1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$, les deux dernières composantes donnent $a = b = 0$. C'est une base de $F$, donc $\dim F = 2$. Comme $2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, on a $F \neq \mathbb{R}^3$.

L'hypothèse « sous-espace » est nécessaire. La partie $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$ contient la famille libre $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\big)$. Pourtant elle n'est pas $\mathbb{R}^3$, car $(0, 0, -1)$ n'y est pas.

## Coin examen : quelques questions dans l'exercice de structures

**Devine : La première ligne**

Une question demande : « Montrer que $S$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ». Par quoi commence la rédaction ?

**A.** Par la vérification de tous les axiomes d'un espace vectoriel.

**Faux.**

C'est inutile : la caractérisation remplace tous les axiomes.

**B.** Par la recherche d'une base de $S$.

**Faux.**

La base vient après, à la question suivante.

**C.** Par $S \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $O \in S$.

**Juste.**

Juste : c'est la première condition de la caractérisation.

**D.** Par le calcul de la dimension de $S$.

**Faux.**

La dimension se déduit d'une base : elle vient en dernier.

**Correction**

On applique la caractérisation : d'abord l'inclusion et le vecteur nul, $O \in S$.

Ensuite, on combine deux éléments de $S$ avec deux réels. La base et la dimension viennent aux questions suivantes.

**Remarque : Coin examen : la forme des questions**

La forme observée est la suivante. Les espaces vectoriels n'ont pas d'exercice à part : ce sont quelques questions de l'exercice de structures algébriques. Parmi les sujets de 2017-2022 et de 2024-2025, on les rencontre dans 5 des 16 sujets consultés.

On donne un ensemble de matrices paramétré par deux réels. On demande de « montrer que c'est un sous-espace vectoriel » de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Puis on demande une base de deux matrices, et d'« en déduire la dimension ».

Chaque question vaut, à titre indicatif, de $0{,}25$ à $0{,}75$ point.

**Exemple : Rédaction modèle (1) : le sous-espace**

**Énoncé (exemple neuf).** Pour $a, b$ réels, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ et $S = \{M(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $S$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$. **Barème indicatif** : $0{,}5$ point.

**Rédaction.** « $S \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $O = M(0,0) \in S$. Soit $M(a,b)$ et $M(c,d)$ dans $S$, $\alpha$ et $\beta$ réels. Posons $a' = \alpha a + \beta c$ et $b' = \alpha b + \beta d$. Coefficient par coefficient, la matrice $\alpha M(a,b) + \beta M(c,d)$ vaut :

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & b' \\ 0 & \alpha(a+b) + \beta(c+d) & 0 \\ b' & 0 & a' \end{pmatrix}.$$

Or $\alpha(a+b) + \beta(c+d) = a' + b'$. Donc $\alpha M(a,b) + \beta M(c,d) = M(a', b') \in S$.

D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, $S$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . »

Exemple **: Rédaction modèle (2) : base et dimension**

**Question.** Montrer que $(I, J)$, avec $J = M(0,1)$, est une base de $S$, puis en déduire $\dim S$. **Barème indicatif** : $0{,}75$ point.

**Rédaction.** « Pour tous réels $a, b$ : $M(a,b) = aI + bJ$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $(I, J)$ engendre $S$.

Si $aI + bJ = O$, alors $M(a,b) = O$. Le coefficient de la ligne $1$ et de la colonne $1$ donne $a = 0$ ; celui de la ligne $1$ et de la colonne $3$ donne $b = 0$. Donc $(I, J)$ est libre.

C'est une base de $S$, formée de deux matrices. Donc $\dim S = 2$. »

**Et ensuite ?** Dans la forme observée, l'exercice se poursuit avec une loi sur le même ensemble. Ici, $J^2 = I$, donc $M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + bd, ad + bc)$ : $S$ est stable pour le produit des matrices.

Les questions suivantes l'étudient avec les outils des structures algébriques : partie stable, morphisme, groupe ou corps. Retiens les trois phrases clés : la caractérisation, la base exhibée, le nombre de vecteurs.

## Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Un **sous-espace** se prouve par la caractérisation : vecteur nul, puis $\alpha u + \beta v$.
- Une famille est **libre** quand sa seule relation $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E$ est à coefficients nuls. On le prouve par un système résolu.
- Une **base** est libre et génératrice. Elle donne à chaque vecteur des composantes uniques, dans une base nommée.
- La **dimension** est le nombre de vecteurs d'une base : on l'obtient en exhibant une base.
- En dimension $n$, une famille libre de $n$ vecteurs est une base.

**Le mot du prof.** Couples, matrices, fonctions, complexes : tu sais maintenant les traiter avec un seul langage.

Tu sais prouver qu'une partie est un sous-espace, puis trouver une base et une dimension. Ces rédactions courtes se refont presque à l'identique d'un ensemble à l'autre. Garde-les précises : chaque mot y compte.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Espaces vectoriels réels » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)