BURHAN

Résumé : Équations différentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/resume

Chapitre	Semestre
Équations différentielles	Semestre 2

Ce qu'est une solution

> **À retenir**
>
> Dans une équation différentielle, l'inconnue y est une **fonction**. Être solution, c'est vérifier l'égalité en **tout** point d'un intervalle nommé. Une seule valeur de x ne prouve rien.

Définition : Équation y′ = ay + b et solution sur un intervalle

Soit a et b deux réels et I un intervalle.

Une fonction f est **une solution sur** I de l'équation différentielle $y' = ay + b$ lorsque f est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = a\,f(x) + b$.

Plus généralement, pour une équation différentielle qui relie y' et y, comme $y' = 3y - y^2$, une solution sur I est une fonction f dérivable sur I qui vérifie l'égalité pour tout $x \in I$, lorsque l'on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$.

Résoudre cette équation sur I, c'est déterminer **toutes** ses solutions sur I.

Exponentielle, a réel

$$(k\,e^{ax})' = k\,a\,e^{ax}$$

Racine double r_0

$$\big((\alpha x + \beta)\,e^{r_0 x}\big)' = (r_0\alpha x + \alpha + r_0\beta)\,e^{r_0 x}$$

Cosinus amorti

$$\big(e^{px}\cos(qx)\big)' = e^{px}\big(p\cos(qx) - q\sin(qx)\big)$$

Sinus amorti

$$\big(e^{px}\sin(qx)\big)' = e^{px}\big(p\sin(qx) + q\cos(qx)\big)$$

Méthode : montrer que f est solution

1. Justifie que f est dérivable sur l'intervalle I (deux fois au second ordre).
2. Calcule $f'(x)$, et $f''(x)$ si besoin, pour un x quelconque de I.
3. Calcule séparément chaque membre de l'équation, puis compare-les.
4. Conclus : « donc f est **une** solution de (E) sur I ».

Remplace y par $f(x)$, y' par $f'(x)$ et y'' par $f''(x)$, jamais y' par $f(x)$.

Exemple

Montrons que $f : x \mapsto 7\,e^{\frac{x}{2}} + 6$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $2y' = y - 6$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \dfrac{7}{2}\,e^{\frac{x}{2}}$, donc :

$$2f'(x) = 7\,e^{\frac{x}{2}} = f(x) - 6.$$

Cette égalité vaut pour tout réel x : f est une solution sur $\mathbb{R}$.

Attention : Une solution parmi d'autres

Une équation $y' = ay + b$ a une **infinité** de solutions, une par valeur de la constante k. Dis « les solutions » ou « une solution ». L'article « la » ne convient qu'avec une condition initiale.

Résoudre y′ = ay et y′ = ay + b

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay

Soit a un réel et I un intervalle.

Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay + b

Soit a et b deux réels et I un intervalle.

- Si $a \neq 0$, les solutions sur I de $y' = ay + b$ sont exactement les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où k décrit $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, les solutions sur I de $y' = b$ sont exactement les fonctions $x \mapsto bx + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

À retenir

Pour $a \neq 0$, la constante $-\dfrac{b}{a}$ est la seule solution constante : elle annule $ay + b$.

Toutes les autres solutions s'en écartent selon $k\,e^{ax}$. Si $a < 0$, elles tendent vers $-\dfrac{b}{a}$ en $+\infty$.

Méthode : résoudre une équation du premier ordre

1. Divise par le coefficient de y' et isole y' : tu obtiens $y' = ay + b$.

2. Lis a et b, signes compris.
3. Si $a \neq 0$, applique le théorème des solutions de $y' = ay + b$ (F03) : $x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Si $a = 0$, les solutions sont $x \mapsto bx + k$.
4. Rédige : « les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto \ldots$, où k décrit $\mathbb{R}$ ».

Exemple

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $3y' + 4y = 10$. En divisant par 3, elle s'écrit :

$$y' = -\frac{4}{3}\,y + \frac{10}{3}.$$

Donc $a = -\dfrac{4}{3}$ et $b = \dfrac{10}{3}$, puis $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{4}{3}x} + \dfrac{5}{2}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Attention : La forme d'abord

Les coefficients a et b se lisent seulement sur la forme $y' = ay + b$. Dans $3y' + 4y = 10$, a ne vaut pas 4 : il vaut $-\dfrac{4}{3}$. Passe toujours $4y$ de l'autre côté, puis divise par 3.

Attention : Le signe de −b/a

La constante ajoutée est $-\dfrac{b}{a}$, avec un signe moins. Contrôle-la : la fonction constante doit annuler $ay + b$. Avec $a = -\dfrac{4}{3}$ et $b = \dfrac{10}{3}$, on a bien $-\dfrac{4}{3} \times \dfrac{5}{2} + \dfrac{10}{3} = 0$.

Attention : Un intervalle, pas une réunion

Sur une réunion d'intervalles, le théorème des solutions de $y' = ay$ (F02) ne s'applique plus.

La fonction f égale à e^{-x} sur $]-\infty, 0[$ et à $4\,e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$ vérifie $f' = -f$ sur chaque morceau. Pourtant, aucune constante k ne donne f sous la forme $x \mapsto k\,e^{-x}$.

La solution qui passe par un point

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale

Soit a et b deux réels, I un intervalle, x_0 un élément de I et y_0 un réel.

L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une **unique** solution f sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

Méthode : imposer une condition initiale

1. Écris toutes les solutions sur I, avec la constante k.
2. Vérifie que x_0 appartient à I.
3. Traduis $f(x_0) = y_0$ en une équation d'inconnue k ; résous-la.
4. Conclus par l'unicité (F04) : « la solution de (E) sur I qui vérifie $f(x_0) = y_0$ est la fonction… ».

Exemple

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = \dfrac{3}{4}\,y - 3$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{\frac{3}{4}x} + 4$, k réel. Imposons la valeur 5 en 4 :

$$k\,e^{3} + 4 = 5 \iff k = e^{-3}.$$

La solution sur $\mathbb{R}$ qui vaut 5 en 4 est donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{3}{4}x-3} + 4$.

Attention : Une condition, une seule solution

Le point x_0 doit appartenir à l'intervalle de résolution. Sans condition initiale, n'écris jamais « la solution » : il en reste une infinité.

Une fois k trouvé, cite la propriété d'unicité (F04) pour justifier l'article « la ».

Modéliser une évolution

Méthode : de la situation à l'équation

1. Nomme la variable (par exemple le temps t) et la fonction inconnue.
2. Traduis la phrase de l'énoncé : « varie proportionnellement à… » donne $y' = ay$; un apport constant ajoute b.
3. Résous, puis impose la condition initiale.
4. Interprète : limite en $+\infty$, instant où une valeur est atteinte, par le logarithme.

Exemple

Une perfusion apporte 2 milligrammes par heure ; le corps l'élimine à une vitesse égale au quart de la quantité présente, par heure. Sur $[0, +\infty[$, la quantité vérifie $y' = -\dfrac{1}{4}\,y + 2$, avec la valeur 0 en $t = 0$.

Les solutions sont les fonctions $t \mapsto k\,e^{-\frac{t}{4}} + 8$, k réel. La condition donne $k + 8 = 0$, donc la quantité est la fonction $t \mapsto 8 - 8\,e^{-\frac{t}{4}}$.

Elle tend vers 8 en $+\infty$. Elle atteint 6 quand $e^{-\frac{t}{4}} = \dfrac{1}{4}$, soit $t = 4\ln 4 = 8\ln 2$, environ $5{,}5$ heures.

À retenir

Une réponse de modélisation se termine par une phrase dans le langage de la situation : une quantité, une durée, une unité. Donne d'abord la valeur exacte, comme $8\ln 2$, puis une valeur approchée.

Second ordre : l'équation caractéristique

Définition : Équation y″ + ay′ + by = 0 et équation caractéristique

Soit a et b deux réels.

Une fonction f est **une solution sur** $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = 0$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r, est **l'équation caractéristique** de cette équation différentielle ; son discriminant est $\Delta = a^2 - 4b$.

Propriété : Solutions de la forme x ↦ e^(rx)

Soit a, b et r trois réels.

La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ si, et seulement si, r est une solution de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Propriété : Combinaisons linéaires de solutions

Soit a et b deux réels. Si f_1 et f_2 sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$, alors, pour tous réels α et β, la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

À retenir

Pour écrire l'équation caractéristique, remplace y'' par r^2, y' par r et y par 1. Mets d'abord l'équation sous la forme $y'' + ay' + by = 0$.

Par exemple, $2y'' - 7y' + 3y = 0$ s'écrit $y'' - \frac{7}{2}y' + \frac{3}{2}y = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - \frac{7}{2}r + \frac{3}{2} = 0$ (équivalente à $2r^2 - 7r + 3 = 0$), de racines 3 et $\frac{1}{2}$.

Attention : Seulement pour l'équation homogène

La propriété des combinaisons de solutions (F07) vaut pour une équation de second membre nul.

Pour $y'' - 2y = 6$, la constante -3 est solution, mais pas son double -6 : on trouverait 12 au lieu de 6. Une combinaison de solutions d'une équation complète n'est en général pas solution.

Les trois cas du discriminant

Théorème : Solutions de l'équation y″ + ay′ + by = 0

Soit a et b deux réels et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ sont exactement les fonctions suivantes, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Cas	Racines de l'équation caractéristique	Solutions sur $\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$x \mapsto \alpha\, e^{r_1 x} + \beta\, e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine réelle double r_0	$x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$, avec p et q réels et $q > 0$	$x \mapsto e^{px}\big(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\big)$

Remarque

Ce résultat est **admis**. Tu peux vérifier par le calcul que chaque fonction du tableau est une solution. Que ce soient les **seules** solutions, tu l'utilises sans le démontrer.

Méthode : résoudre y″ + ay′ + by = 0

1. Écris l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ et calcule $\Delta = a^2 - 4b$.
2. Selon le signe de Δ, calcule r_1 et r_2, ou r_0, ou p et $q > 0$.
3. Recopie la ligne qui correspond dans le tableau de la solution générale (F08).
4. Rédige : « les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \ldots$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$ ».

Exemple : Cas Δ > 0

Pour $y'' - 3y' - 10y = 0$, on a $\Delta = 9 + 40 = 49$. Les racines sont $\dfrac{3+7}{2} = 5$ et $\dfrac{3-7}{2} = -2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{5x} + \beta\, e^{-2x}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Exemple : Cas Δ = 0

Pour $y'' + 10y' + 25y = 0$, on a $\Delta = 100 - 100 = 0$ et la racine double vaut $r_0 = -5$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{-5x}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Exemple : Cas Δ < 0

Pour $y'' - 2y' + 5y = 0$, on a $\Delta = 4 - 20 = -16$. Les racines sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$, donc $p = 1$ et $q = 2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^x\big(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\big)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Attention : Ne perds pas le facteur x

Avec une racine double r_0, la forme $x \mapsto \alpha\, e^{r_0 x}$ est incomplète. Pour $y'' + 10y' + 25y = 0$, la fonction $x \mapsto x\, e^{-5x}$ est aussi une solution. Garde toujours le facteur $\alpha x + \beta$.

Attention : Lire p et q sans se tromper

Avec $\Delta < 0$, le nombre q vaut $\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Pour $\Delta = -16$, on a $q = 2$, et non 4 ni 16. Le facteur e^{px} reste présent dès que $p \neq 0$.

Deux conditions, une solution

Propriété : Solution vérifiant deux conditions initiales

Soit a et b deux réels, et x_0, y_0, y_1 trois réels.

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Méthode : deux conditions initiales

1. Écris la forme générale des solutions, avec α et β.
2. Dérive cette forme générale.
3. Écris le système donné par $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$; résous-le.
4. Conclus par l'unicité (F09) : « la solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie ces deux conditions est la fonction… ».

Exemple

Cherchons la solution de $y'' - 2y' + 5y = 0$ qui vaut 1 en 0 et dont la dérivée vaut 5 en 0. Elle s'écrit f : $x \mapsto e^x\big(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\big)$, avec α et β réels. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) = e^x\big(&(\alpha + 2\beta)\cos(2x) \\ &+ (\beta - 2\alpha)\sin(2x)\big). \end{aligned}$$

On obtient $f(0) = \alpha = 1$, puis $f'(0) = \alpha + 2\beta = 5$, soit $\beta = 2$. La solution cherchée est la fonction $x \mapsto e^x\big(\cos(2x) + 2\sin(2x)\big)$.

À retenir : L'oscillateur

Pour $\omega > 0$, les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$. Elles sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$. Ainsi $4y'' + 9y = 0$ donne $\omega = \dfrac{3}{2}$ et la période $\dfrac{4\pi}{3}$.

Attention : Dériver avant de remplacer

La condition sur $f'(x_0)$ se traduit avec la dérivée de **toute** la forme générale. Dans l'exemple, $f'(0)$ vaut $\alpha + 2\beta$, et non 2β : le facteur e^x se dérive aussi.

Se ramener à une équation de référence

Propriété : Solution particulière et équation homogène associée

Soit a et b deux réels et h une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Une fonction f est **une solution sur** $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$ lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = a\,f(x) + h(x)$ pour tout réel x. De même, f est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$ lorsque f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = h(x)$ pour tout réel x.

- Soit g une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$. Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$ si, et seulement si, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.
- Soit g une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$. Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$ si, et seulement si, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$.

Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $g + z$, où z décrit les solutions de l'équation homogène associée.

Méthode : solution particulière

1. Vérifie que la fonction g donnée est solution de l'équation complète, ou trouve-la sous la forme indiquée.
2. Rédige l'équivalence de la propriété de la solution particulière (F10) : f est solution si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation homogène.
3. Résous l'équation homogène.
4. Conclus : « les solutions de (E) sont les fonctions $g + z$ », en écrivant z.
5. Avec une condition initiale, traduis-la sur $f - g$: $z(x_0) = y_0 - g(x_0)$, et au second ordre $z'(x_0) = y_1 - g'(x_0)$. Cite ensuite la propriété d'unicité, F04 ou F09, appliquée à l'équation homogène.

Exemple : Premier ordre, second membre affine

Cherchons une solution de $y' = 3y - 6x + 1$ sous la forme $g : x \mapsto Ax + B$, avec A et B réels. Pour tout réel x, $g'(x) = A$ et $3g(x) - 6x + 1 = (3A - 6)x + 3B + 1$.

L'égalité doit valoir pour tout réel x : l'identification donne $3A - 6 = 0$ et $A = 3B + 1$, donc $A = 2$ et $B = \dfrac{1}{3}$.

Les solutions sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{3x} + 2x + \dfrac{1}{3}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Exemple : Second ordre, second membre constant

Pour $y'' - 3y' - 10y = 20$, une solution constante c vérifie $-10c = 20$, donc $c = -2$. L'équation homogène a été résolue plus haut. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\,e^{5x} + \beta\,e^{-2x} - 2$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Méthode : changement d'inconnue

1. Pose la nouvelle inconnue indiquée par l'énoncé, avec sa condition : y ne s'annule pas pour $z = \dfrac{1}{y}$.
2. Exprime y' à l'aide de z et z'.
3. Établis l'équivalence **dans les deux sens** : « y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (E') ».
4. Résous (E'), reviens à y et vérifie la condition du changement.

Exemple : Changement d'inconnue z = 1/y

Cherchons les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de $y' = 4y - 2y^2$. Pour $y > 0$ dérivable, on pose $z = \dfrac{1}{y}$; alors $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$. En divisant par $-y^2 \neq 0$, l'équation équivaut à $z' = -4z + 2$.

Donc $z : x \mapsto k\,e^{-4x} + \dfrac{1}{2}$, avec k réel. Elle reste strictement positive sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $k \geq 0$.

Les solutions cherchées sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{1 + 2k\,e^{-4x}}$, où $k \geq 0$.

Attention : L'équivalence dans les deux sens

Montrer que « si y est solution, alors z l'est » ne donne que des candidats. Pour obtenir **toutes** les solutions, rédige aussi la réciproque. Vérifie enfin la condition du changement : dans l'exemple, $k < 0$ ferait s'annuler z.

Les formes de questions

> **À retenir : Coin examen**

> Dans un problème, ce chapitre se présente sous forme de questions enchaînées. D'abord « vérifier que g est une solution ». Puis « en déduire les solutions de (E) ». Puis « déterminer la solution qui vérifie… ». Enfin, l'étude de cette solution : variations, limites, équation. Chaque étape a sa méthode dans ce résumé.

Rédige chaque résolution comme une preuve courte. Nomme l'intervalle au premier ordre ; travaille sur $\mathbb{R}$ au second ordre. Donne **toutes** les solutions, avec leurs constantes. Réserve « la solution » aux conditions initiales. Termine par un contrôle : remplace ta réponse dans l'équation en un point simple.

Remarque

Le chapitre suivant, le calcul intégral, réutilise les primitives et l'exponentielle. Les réflexes de rédaction de ce chapitre y restent utiles : hypothèses nommées, équivalences justifiées, conclusion écrite.