BURHAN

Équations différentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Un second membre exponentiel, puis l'étude de la solution

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 4e^{-x}$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y' + 3y = 0$.

1. a) 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $g'(x)$, puis remplace dans le membre de gauche de (E).

1. b) 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$. Calcule $z'(x) + 3z(x)$ en utilisant la question 1. a).

1. c) 0,75 pts

En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

L'équation (E_0) s'écrit $y' = -3y$: applique F02 (solutions de l'équation $y' = ay$). Reviens ensuite à $f = g + (f - g)$.

2. 0,75 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ avec la forme de la question 1. c). Pour l'unicité, applique F04 (solution vérifiant une condition initiale) à $f - g$, solution de (E_0).

3. a) 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

INDICE

En $-\infty$, $2e^{-x}$ tend vers $+\infty$ et $-e^{-3x}$ vers $-\infty$: forme indéterminée. Factorise $f(x)$ par e^{-3x}.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-3x}\left(3 - 2e^{2x}\right)$, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2e^{2x}$. Résous $3 - 2e^{2x} > 0$ à l'aide du logarithme : la fonction exponentielle est strictement croissante.

3. c) 0,5 pts

Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

INDICE

D'après la question 3. b), le maximum est atteint en x_1. Calcule d'abord $e^{-x_1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

4. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Reprends la factorisation $f(x) = e^{-3x}\left(2e^{2x} - 1\right)$: le premier facteur ne s'annule jamais.

Exercice 2 6,5 pts

Second ordre, second membre affine et asymptote oblique

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - y = 2x - 5$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $2y'' + y' - y = 0$.

1. 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 - 2x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une fonction affine est dérivable deux fois : calcule $g'(x)$ et $g''(x)$, puis remplace dans (E).

2. 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$: exprime z' et z'', puis calcule $2z''(x) + z'(x) - z(x)$ grâce à la question 1.

3. 1 pts

Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise (E_0) par 2 pour obtenir la forme $y'' + ay' + by = 0$. Calcule le discriminant de l'équation caractéristique, puis ses racines.

4. 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ et $f'(0)$ avec la forme de la question 3 : tu obtiens un système en α et β. Pour l'unicité, applique F09 (solution vérifiant deux conditions initiales) à $f - g$.

5. a) 0,75 pts

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Regarde séparément la limite de e^{-x} et celle de $3 - 2x$: ici, aucune forme indéterminée.

5. b) 0,75 pts

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3 - 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, puis dire de quel côté de $\mathcal{D}$ se trouve cette courbe.

INDICE

Calcule la différence $f(x) - (3 - 2x)$, puis sa limite en $+\infty$ et son signe.

5. c) 0,5 pts

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$: c'est une somme de deux termes de même signe.

6. 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}$, que $1{,}5 < \lambda < 1{,}7$, et que $e^{-\lambda} = 2\lambda - 3$.

INDICE

Utilise la continuité, la stricte décroissance et les limites de f. Pour l'encadrement, ne cherche pas de valeur approchée : $f(1{,}5)$ s'écrit $e^{-1{,}5}$, et pour $f(1{,}7)$ compare $e^{-1{,}7}$ à e^{-1}, puis e^{-1} à $0{,}4$ (tu sais que $e > 2{,}5$).

Exercice 3 5,5 pts

Modéliser la charge d'un condensateur

On charge un condensateur sous une tension de 10 volts. On note $f(t)$ la tension à ses bornes, en volts, t millisecondes après la fermeture du circuit. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$.

Dans ce modèle simplifié, pour tout $t \geq 0$: $4f'(t) + f(t) = 10$.

1. 0,5 pts

Montrer que f est une solution sur $[0, +\infty[$ d'une équation $y' = ay + b$, et préciser a et b.

INDICE

Isole $f'(t)$: passe $f(t)$ dans l'autre membre, puis divise par 4.

2. 1 pts

Exprimer $f(t)$ en fonction de t, pour tout $t \geq 0$.

INDICE

Applique F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$) sur l'intervalle $[0, +\infty[$: calcule $-\dfrac{b}{a}$. Utilise ensuite $f(0) = 0$ pour trouver k.

3. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq f(t) < 10$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et étudie son signe. Pour la majoration, pense au signe de $e^{-\frac{t}{4}}$.

4. 0,5 pts

Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

Que devient $e^{-\frac{t}{4}}$ quand t tend vers $+\infty$? Compare la limite avec la tension de charge.

5. a) 0,75 pts

On donne $\ln 2 \approx 0{,}69$. Montrer que la tension atteint 5 volts à un unique instant t_1, et que $t_1 = 4\ln 2$. Donner une valeur approchée de t_1 au dixième.

INDICE

Résous $f(t) = 5$ en isolant $e^{-\frac{t}{4}}$, puis applique le logarithme. Pour l'unicité, utilise la question 3.

5. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $10 - f(t + t_1) = \dfrac{10 - f(t)}{2}$. Interpréter ce résultat.

INDICE

Écris $10 - f(t) = 10\,e^{-\frac{t}{4}}$, puis remplace t par $t + 4\ln 2$ et utilise $e^{u+v} = e^u e^v$.

5. c) 0,5 pts

On donne $\ln 10 \approx 2{,}30$. Déterminer l'instant t_2 à partir duquel la tension dépasse 9 volts. Donner sa valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

Résous l'inéquation $f(t) > 9$ comme à la question 5. a), en gardant le sens des inégalités.

6. 0,75 pts

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0. Montrer que T coupe la droite d'équation $y = 10$ au point d'abscisse 4.

INDICE

La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)\,t + f(0)$. Calcule $f'(0)$ avec la question 3.

Exercice 4 5 pts

Racines complexes, second membre affine et asymptote

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 5x + 2$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. 0,5 pts

Vérifier que la fonction $g : x \mapsto x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Les dérivées g' et g'' sont immédiates : remplace-les dans le membre de gauche de (E).

2. 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$ et calcule $z''(x) + 2z'(x) + 5z(x)$ grâce à la question 1.

3. 1 pts

Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 5 = 0$: calcule Δ, puis lis p et q sur les racines complexes.

4. 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 3$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

La fonction $f - g$ est solution de (E_0) : traduis les deux conditions sur $f - g$, dérive la forme de la question 3, puis résous le système en α et β.

5. a) 0,75 pts

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

INDICE

Étudie la différence $f(x) - x$ et encadre-la à l'aide de $|\sin(2x)| \leq 1$.

5. b) 0,75 pts

Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de $\mathcal{D}$ sur $[0, +\infty[$. Préciser ensuite la position de la courbe par rapport à $\mathcal{D}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

INDICE

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\sin(2x)$. Rappelle-toi que $\sin X = 0$ si, et seulement si, $X = m\pi$ avec m entier.

Exercice 5 — 6 pts

Racine double, second membre exponentiel et une inégalité

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 4e^{x}$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

1. — 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $g' = g$ et $g'' = g$: le membre de gauche de (E) se calcule en une ligne.

2. — 1 pts

Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris l'équation caractéristique de (E_0) et calcule son discriminant : tu dois reconnaître un carré. Choisis ensuite la bonne ligne de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

3. — 0,75 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0). En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $z = f - g$ et soustrais l'égalité de la question 1 : les deux membres $4e^{x}$ se compensent. Reviens ensuite à $f = g + z$ avec la question 2.

4. — 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, et justifier qu'elle est unique. Que traduisent ces deux conditions pour la courbe de f ?

INDICE

Dérive la forme de la question 3 : la dérivée de $x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$ s'obtient par la dérivée d'un produit. Pour l'unicité, applique F09 (solution vérifiant deux conditions initiales) à $f - g$.

5. a) — 0,75 pts

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

En $-\infty$, regarde le signe et la limite de chacun des facteurs $-(2x + 1)$ et e^{-x}. En $+\infty$, écris $(2x + 1)\, e^{-x} = 2x\, e^{-x} + e^{-x}$ et utilise $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^{-x} = 0$.

5. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\,u(x)$, où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{2x} + 2x - 1$.

INDICE

Reprends l'expression de $f'(x)$ obtenue à la question 4 avec $\alpha = -2$ et $\beta = -1$, puis écris $e^{x} = e^{-x} \times e^{2x}$.

5. c) 0,75 pts

Étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Montre que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calcule $u(0)$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$, car $e^{-x} > 0$.

6. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) \geq 0$, puis que $e^{2x} \geq 2x + 1$. Pour quelles valeurs de x cette inégalité est-elle une égalité ?

INDICE

D'après la question 5. c), f admet un minimum en 0 : compare $f(x)$ à $f(0)$. Pour passer à la seconde inégalité, multiplie $f(x) \geq 0$ par e^{x}, qui est strictement positif.