BURHAN

Équations différentielles : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Niveau examen	5

Exercice 1 6 pts

Un second membre exponentiel, puis l'étude de la solution

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 4e^{-x}$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y' + 3y = 0$.

1. a) 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $g'(x)$, puis remplace dans le membre de gauche de (E).

CORRIGÉ

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -2e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g'(x) + 3g(x) \\ &= -2e^{-x} + 6e^{-x} \\ &= 4e^{-x}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. b) 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$. Calcule $z'(x) + 3z(x)$ en utilisant la question 1. a).

CORRIGÉ

La fonction $z = f - g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1. a), $g'(x) + 3g(x) = 4e^{-x}$, donc :

$$\begin{aligned} &z'(x) + 3z(x) \\ &= \big(f'(x) + 3f(x)\big) \\ &\quad - \big(g'(x) + 3g(x)\big) \\ &= f'(x) + 3f(x) - 4e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc $z'(x) + 3z(x) = 0$ si, et seulement si, $f'(x) + 3f(x) = 4e^{-x}$.

Conclusion. Cette équivalence vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

1. c) 0,75 pts

En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

L'équation (E_0) s'écrit $y' = -3y$: applique F02 (solutions de l'équation $y' = ay$). Reviens ensuite à $f = g + (f - g)$.

CORRIGÉ

Équation homogène. L'équation (E_0) équivaut à $y' = -3y$. D'après F02 (solutions de l'équation $y' = ay$), ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-3x}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Retour à (E). D'après la question 1. b), une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - 2e^{-x} = k\,e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto 2e^{-x} + k\,e^{-3x},\ k \in \mathbb{R}.$$

2. 0,75 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ avec la forme de la question 1. c). Pour l'unicité, applique F04 (solution vérifiant une condition initiale) à $f - g$, solution de (E_0).

CORRIGÉ

Valeur de k. D'après la question 1. c), il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2e^{-x} + k\,e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 2 + k$, donc $f(0) = 1$ si, et seulement si, $k = -1$.

Unicité. D'après la question 1. b), f est solution de (E) avec $f(0) = 1$ si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0) avec $(f - g)(0) = 1 - 2 = -1$. D'après F04 (solution vérifiant une condition initiale), une telle fonction $f - g$ existe et est unique.

Conclusion. La solution cherchée est unique : c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2e^{-x} - e^{-3x}.$$

3. a) 0,75 pts

Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

INDICE

En $-\infty$, $2e^{-x}$ tend vers $+\infty$ et $-e^{-3x}$ vers $-\infty$: forme indéterminée. Factorise $f(x)$ par e^{-3x}.

CORRIGÉ

En $+\infty$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

En $-\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x}\left(2e^{2x} - 1\right)$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-3x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2e^{2x} - 1\right) = -1$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-3x}\left(3 - 2e^{2x}\right)$, puis étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 2e^{2x}$. Résous $3 - 2e^{2x} > 0$ à l'aide du logarithme : la fonction exponentielle est strictement croissante.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-x} + 3e^{-3x} \\ &= e^{-3x}\left(3 - 2e^{2x}\right). \end{aligned}$$

Signe. Comme $e^{-3x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $3 - 2e^{2x}$. Notons $x_1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & 3 - 2e^{2x} > 0 \\ \iff\ & e^{2x} < \frac{3}{2} \\ \iff\ & 2x < \ln\frac{3}{2} \\ \iff\ & x < x_1. \end{aligned}$$

Donc $f'(x) > 0$ pour $x < x_1$, $f'(x_1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > x_1$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]-\infty, x_1]$ et strictement décroissante sur $[x_1, +\infty[$.

3. c) 0,5 pts

Montrer que f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$.

INDICE

D'après la question 3. b), le maximum est atteint en x_1. Calcule d'abord $e^{-x_1} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

CORRIGÉ

Le maximum. D'après la question 3. b), f admet un maximum sur $\mathbb{R}$, atteint en x_1.

Calculs. On a $e^{2x_1} = \dfrac{3}{2}$, donc :

$$e^{-x_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} e^{-3x_1} &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3 \\ &= \frac{6\sqrt{6}}{27} = \frac{2\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

Valeur. Comme $f(x_1) = 2e^{-x_1} - e^{-3x_1}$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{9} \\ &= \frac{6\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{9} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à $\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$, atteint en x_1.

4. 0,75 pts

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

INDICE

Reprends la factorisation $f(x) = e^{-3x}\left(2e^{2x} - 1\right)$: le premier facteur ne s'annule jamais.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x}\left(2e^{2x} - 1\right)$ et $e^{-3x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $2e^{2x} - 1$.

Équation. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \iff\ & e^{2x} = \frac{1}{2} \\ \iff\ & 2x = -\ln 2 \\ \iff\ & x = -\frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Signe. La fonction exponentielle étant strictement croissante, $2e^{2x} - 1 > 0$ si, et seulement si, $x > -\dfrac{\ln 2}{2}$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $-\dfrac{\ln 2}{2}$. De plus, $f(x) < 0$ pour $x < -\dfrac{\ln 2}{2}$ et $f(x) > 0$ pour $x > -\dfrac{\ln 2}{2}$.

Exercice 2 6,5 pts

Second ordre, second membre affine et asymptote oblique

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - y = 2x - 5$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $2y'' + y' - y = 0$.

1. 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 - 2x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Une fonction affine est dérivable deux fois : calcule $g'(x)$ et $g''(x)$, puis remplace dans (E).

CORRIGÉ

La fonction g est affine : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = -2$, et g' est dérivable, avec $g''(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &2g''(x) + g'(x) - g(x) \\ &= 0 - 2 - (3 - 2x) \\ &= 2x - 5. \end{aligned}$$

Conclusion. g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$: exprime z' et z'', puis calcule $2z''(x) + z'(x) - z(x)$ grâce à la question 1.

CORRIGÉ

La fonction $z = f - g$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, avec $z' = f' - g'$ et $z'' = f'' - g''$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, $2g''(x) + g'(x) - g(x) = 2x - 5$, donc :

$$\begin{aligned} &2z''(x) + z'(x) - z(x) \\ &= \big(2f''(x) + f'(x) - f(x)\big) \\ &\quad - (2x - 5). \end{aligned}$$

Donc $2z''(x) + z'(x) - z(x) = 0$ si, et seulement si, $2f''(x) + f'(x) - f(x) = 2x - 5$.

Conclusion. Cette équivalence vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

3. 1 pts

Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise (E_0) par 2 pour obtenir la forme $y'' + ay' + by = 0$. Calcule le discriminant de l'équation caractéristique, puis ses racines.

CORRIGÉ

Équation homogène. Comme $2 \neq 0$, (E_0) équivaut à $y'' + \dfrac{1}{2}y' - \dfrac{1}{2}y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{2} = 0$, de discriminant :

$$\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0.$$

Donc $\sqrt{\Delta} = \dfrac{3}{2}$, et les racines sont :

$$r_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1,$$
$$r_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta > 0$), les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{\frac{x}{2}}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Conclusion. D'après la question 2, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{\frac{x}{2}} + 3 - 2x,$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

4. 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ et $f'(0)$ avec la forme de la question 3 : tu obtiens un système en α et β. Pour l'unicité, applique F09 (solution vérifiant deux conditions initiales) à $f - g$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{\frac{x}{2}} + 3 - 2x$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\alpha\, e^{-x} + \frac{\beta}{2} e^{\frac{x}{2}} - 2.$$

Système. Les conditions $f(0) = 4$ et $f'(0) = -3$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \dfrac{\beta}{2} = -1. \end{cases}$$

En ajoutant les deux équations, on obtient $\dfrac{3}{2}\beta = 0$, d'où $\beta = 0$, puis $\alpha = 1$.

Unicité. f convient si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0) avec $(f-g)(0) = 1$ et $(f-g)'(0) = -1$. D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales), une telle fonction $f - g$ est unique.

Conclusion. La solution cherchée est unique : c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x} + 3 - 2x.$$

5. a) 0,75 pts

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Regarde séparément la limite de e^{-x} et celle de $3 - 2x$: ici, aucune forme indéterminée.

CORRIGÉ

En $-\infty$. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (3 - 2x) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2x) = -\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

5. b) 0,75 pts

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3 - 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, puis dire de quel côté de $\mathcal{D}$ se trouve cette courbe.

INDICE

Calcule la différence $f(x) - (3 - 2x)$, puis sa limite en $+\infty$ et son signe.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (3 - 2x) = e^{-x}$.

Asymptote. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, cette différence tend vers 0 en $+\infty$.

Position. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Conclusion. La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et la courbe de f est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$.

5. c) 0,5 pts

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$: c'est une somme de deux termes de même signe.

CORRIGÉ

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} - 2$. Comme $e^{-x} > 0$, on a $f'(x) < -2 < 0$.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

6. 1 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}$, que $1{,}5 < \lambda < 1{,}7$, et que $e^{-\lambda} = 2\lambda - 3$.

INDICE

Utilise la continuité, la stricte décroissance et les limites de f. Pour l'encadrement, ne cherche pas de valeur approchée : $f(1{,}5)$ s'écrit $e^{-1{,}5}$, et pour $f(1{,}7)$ compare $e^{-1{,}7}$ à e^{-1}, puis e^{-1} à $0{,}4$ (tu sais que $e > 2{,}5$).

CORRIGÉ

Existence et unicité. La fonction f est dérivable, donc continue, sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle y est strictement décroissante (question 5. c)), avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction continue et strictement monotone, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}$.

Signe de $f(1{,}5)$. On a $f(1{,}5) = e^{-1{,}5} + 3 - 3 = e^{-1{,}5} > 0$.

Signe de $f(1{,}7)$. On a $f(1{,}7) = e^{-1{,}7} - 0{,}4$. L'exponentielle étant strictement croissante, $-1{,}7 < -1$ donne $e^{-1{,}7} < e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. De plus, $e > 2{,}5$ donne $\dfrac{1}{e} < 0{,}4$. Donc $f(1{,}7) < 0$.

Encadrement. Comme f est strictement décroissante et que $f(1{,}5) > f(\lambda) = 0 > f(1{,}7)$, on obtient $1{,}5 < \lambda < 1{,}7$.

Relation. L'égalité $f(\lambda) = 0$ s'écrit $e^{-\lambda} + 3 - 2\lambda = 0$, c'est-à-dire $e^{-\lambda} = 2\lambda - 3$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution λ dans $\mathbb{R}$; elle vérifie $1{,}5 < \lambda < 1{,}7$ et $e^{-\lambda} = 2\lambda - 3$.

Exercice 3 5,5 pts

Modéliser la charge d'un condensateur

On charge un condensateur sous une tension de 10 volts. On note $f(t)$ la tension à ses bornes, en volts, t millisecondes après la fermeture du circuit. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 0$.

Dans ce modèle simplifié, pour tout $t \geq 0$: $4f'(t) + f(t) = 10$.

1. 0,5 pts

Montrer que f est une solution sur $[0, +\infty[$ d'une équation $y' = ay + b$, et préciser a et b.

INDICE

Isole $f'(t)$: passe $f(t)$ dans l'autre membre, puis divise par 4.

CORRIGÉ

Soit $t \geq 0$. Comme $4 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 4f'(t) + f(t) = 10 \\ \iff\ & f'(t) = -\frac{1}{4}f(t) + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est une solution sur $[0, +\infty[$ de $y' = ay + b$, avec $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = \dfrac{5}{2}$.

2. 1 pts

Exprimer $f(t)$ en fonction de t, pour tout $t \geq 0$.

INDICE

Applique F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$) sur l'intervalle $[0, +\infty[$: calcule $-\dfrac{b}{a}$. Utilise ensuite $f(0) = 0$ pour trouver k.

CORRIGÉ

Forme générale. On a $a = -\dfrac{1}{4} \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2} \times 4 = 10$. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$), appliqué sur l'intervalle $[0, +\infty[$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = k\,e^{-\frac{t}{4}} + 10$ pour tout $t \geq 0$.

Condition initiale. On a $f(0) = k + 10$, donc $f(0) = 0$ si, et seulement si, $k = -10$. D'après F04 (solution vérifiant une condition initiale), c'est l'unique solution qui vérifie $f(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t) &= 10 - 10\,e^{-\frac{t}{4}} \\ &= 10\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right). \end{aligned}$$

3. 0,75 pts

Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq f(t) < 10$.

INDICE

Calcule $f'(t)$ et étudie son signe. Pour la majoration, pense au signe de $e^{-\frac{t}{4}}$.

CORRIGÉ

Variations. Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{10}{4} e^{-\frac{t}{4}} \\ &= \frac{5}{2} e^{-\frac{t}{4}} > 0. \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Encadrement. Soit $t \geq 0$. Par croissance, $f(t) \geq f(0) = 0$. De plus $e^{-\frac{t}{4}} > 0$, donc $f(t) = 10 - 10\, e^{-\frac{t}{4}} < 10$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq f(t) < 10$.

4. 0,5 pts

Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

Que devient $e^{-\frac{t}{4}}$ quand t tend vers $+\infty$? Compare la limite avec la tension de charge.

CORRIGÉ

On a $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(-\frac{t}{4}\right) = -\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{4}} = 0$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 10$.

Conclusion. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 10$: la tension aux bornes du condensateur se rapproche de 10 volts, sans jamais l'atteindre d'après la question 3.

5. a) 0,75 pts

On donne $\ln 2 \approx 0{,}69$. Montrer que la tension atteint 5 volts à un unique instant t_1, et que $t_1 = 4\ln 2$. Donner une valeur approchée de t_1 au dixième.

INDICE

Résous $f(t) = 5$ en isolant $e^{-\frac{t}{4}}$, puis applique le logarithme. Pour l'unicité, utilise la question 3.

CORRIGÉ

Au plus une fois. D'après la question 3, f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$: elle prend au plus une fois la valeur 5.

Résolution. Soit $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & f(t) = 5 \\ \iff\ & e^{-\frac{t}{4}} = \frac{1}{2} \\ \iff\ & -\frac{t}{4} = -\ln 2 \\ \iff\ & t = 4\ln 2. \end{aligned}$$

Comme $4\ln 2 \geq 0$, cet instant existe.

Valeur approchée. Avec la valeur donnée, $4 \times 0{,}69 = 2{,}76$.

Conclusion. La tension atteint 5 volts à l'unique instant $t_1 = 4\ln 2 \approx 2{,}8$ millisecondes.

5. b) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $10 - f(t + t_1) = \dfrac{10 - f(t)}{2}$. Interpréter ce résultat.

INDICE

Écris $10 - f(t) = 10\,e^{-\frac{t}{4}}$, puis remplace t par $t + 4\ln 2$ et utilise $e^{u+v} = e^u e^v$.

CORRIGÉ

Pour tout $t \geq 0$, $10 - f(t) = 10\,e^{-\frac{t}{4}}$. Soit $t \geq 0$. Comme $t_1 = 4\ln 2$, on a $\dfrac{t + t_1}{4} = \dfrac{t}{4} + \ln 2$, donc :

$$\begin{aligned} & 10 - f(t + t_1) \\ & = 10\,e^{-\frac{t}{4} - \ln 2} \\ & = 10\,e^{-\frac{t}{4}} \times e^{-\ln 2} \\ & = \frac{10 - f(t)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$, $10 - f(t + t_1) = \dfrac{10 - f(t)}{2}$: quel que soit l'instant de départ, l'écart entre la tension et 10 volts est divisé par 2 toutes les $t_1 = 4\ln 2$ millisecondes.

5. c) `0,5 pts`

On donne $\ln 10 \approx 2{,}30$. Déterminer l'instant t_2 à partir duquel la tension dépasse 9 volts. Donner sa valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième.

INDICE

Résous l'inéquation $f(t) > 9$ comme à la question 5. a), en gardant le sens des inégalités.

CORRIGÉ

Soit $t \geq 0$. Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant strictement croissantes :

$$\begin{aligned} & f(t) > 9 \\ \iff\ & e^{-\frac{t}{4}} < \frac{1}{10} \\ \iff\ & -\frac{t}{4} < -\ln 10 \\ \iff\ & t > 4\ln 10. \end{aligned}$$

Valeur approchée. Avec la valeur donnée, $4 \times 2{,}30 = 9{,}2$.

Conclusion. La tension dépasse 9 volts exactement pour $t > t_2$, avec $t_2 = 4\ln 10 \approx 9{,}2$ millisecondes.

6. 0,75 pts

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0. Montrer que T coupe la droite d'équation $y = 10$ au point d'abscisse 4.

INDICE

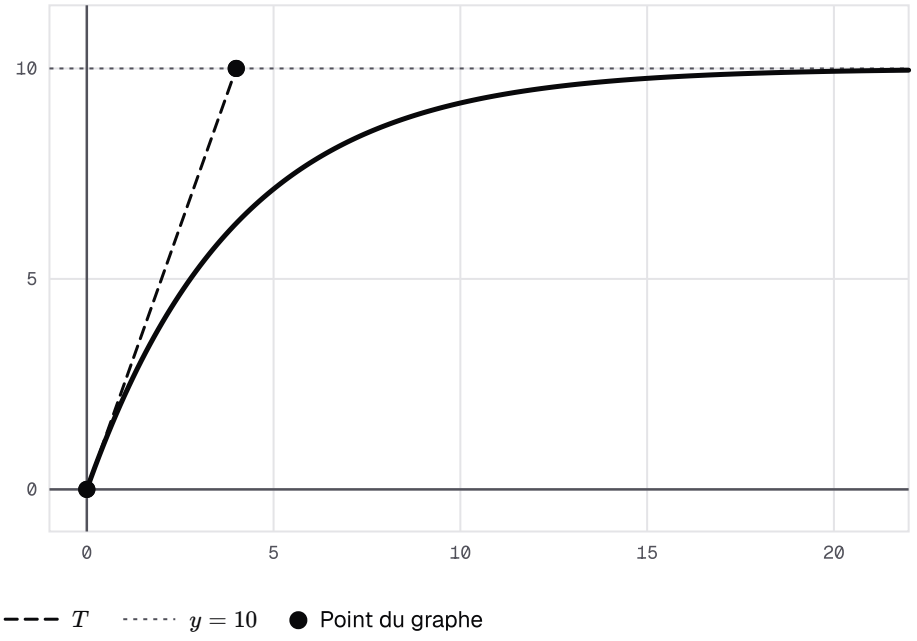
La tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)\,t + f(0)$. Calcule $f'(0)$ avec la question 3.

CORRIGÉ

Tangente. D'après la question 3, $f'(0) = \dfrac{5}{2}$; de plus $f(0) = 0$. La tangente T en 0 a pour équation $y = f'(0)\,t + f(0)$, soit $y = \dfrac{5}{2}t$.

Intersection. T coupe la droite d'équation $y = 10$ lorsque $\dfrac{5}{2}t = 10$, c'est-à-dire pour $t = 4$.

Conclusion. T a pour équation $y = \dfrac{5}{2}t$ et coupe la droite d'équation $y = 10$ au point d'abscisse 4. Ce nombre est le coefficient de $f'(t)$ dans la loi $4f'(t) + f(t) = 10$.



La tension f(t) = 10(1 – e^(–t/4)) part de 0, croît et se rapproche de l'asymptote y = 10. Sa tangente T en 0, de pente 5/2, rencontre la droite y = 10 au point d'abscisse 4.

Exercice 4 5 pts

Racines complexes, second membre affine et asymptote

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 5x + 2$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1. 0,5 pts

Vérifier que la fonction $g : x \mapsto x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Les dérivées g' et g'' sont immédiates : remplace-les dans le membre de gauche de (E).

CORRIGÉ

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = 1$, et g' est dérivable, avec $g''(x) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) \\ &= 0 + 2 + 5x \\ &= 5x + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. 1 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$ et calcule $z''(x) + 2z'(x) + 5z(x)$ grâce à la question 1.

CORRIGÉ

La fonction $z = f - g$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, avec $z' = f' - g'$ et $z'' = f'' - g''$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1, $g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 5x + 2$, donc :

$$\begin{aligned} &z''(x) + 2z'(x) + 5z(x) \\ &= f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) \\ &\quad - (5x + 2). \end{aligned}$$

Donc $z''(x) + 2z'(x) + 5z(x) = 0$ si, et seulement si, $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 5x + 2$.

Conclusion. Cette équivalence vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

3. 1 pts

Résoudre (E_0) sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

L'équation caractéristique est $r^2+2r+5=0$: calcule Δ, puis lis p et q sur les racines complexes.

CORRIGÉ

Équation homogène. L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2+2r+5=0$, de discriminant :

$$\Delta = 4-20 = -16 < 0.$$

Ses racines sont :

$$\frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Donc $p=-1$ et $q=2$. D'après F08 (solutions de $y''+ay'+by=0$, cas $\Delta<0$), les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-x}\big(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)\big)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Conclusion. D'après la question 2, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto x + e^{-x}\big(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\big),$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

4. 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=3$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

La fonction $f-g$ est solution de (E_0) : traduis les deux conditions sur $f-g$, dérive la forme de la question 3, puis résous le système en α et β.

CORRIGÉ

Traduction. D'après la question 2, f convient si, et seulement si, $z=f-g$ est solution de (E_0) avec :

$$\begin{aligned} z(0) &= f(0)-g(0)=0,\\ z'(0) &= f'(0)-g'(0)\\ &= 3-1=2. \end{aligned}$$

Dérivée de z. D'après la question 3, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $z(x)=e^{-x}\big(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)\big)$. Par dérivation d'un produit, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &z'(x)\\ &= e^{-x}\Big((2\beta-\alpha)\cos(2x)\\ &\quad -(\beta+2\alpha)\sin(2x)\Big). \end{aligned}$$

Système. Ainsi $z(0)=\alpha$ et $z'(0)=2\beta-\alpha$. Les conditions s'écrivent $\alpha=0$ et $2\beta-\alpha=2$, donc $\alpha=0$ et $\beta=1$.

Unicité. D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales) appliquée à (E_0), une seule fonction z vérifie ces deux conditions : la solution cherchée est donc unique.

Conclusion. C'est la fonction $f=g+z$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x+e^{-x}\sin(2x).$$

5. a) 0,75 pts

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

INDICE

Étudie la différence $f(x)-x$ et encadre-la à l'aide de $|\sin(2x)|\le 1$.

CORRIGÉ

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-x=e^{-x}\sin(2x)$. Comme $-1\le\sin(2x)\le 1$ et $e^{-x}>0$:

$$-e^{-x}\le f(x)-x\le e^{-x}.$$

Limite. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=0$.

Conclusion. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

5. b) `0,75 pts`

Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f et de $\mathcal{D}$ sur $[0, +\infty[$. Préciser ensuite la position de la courbe par rapport à $\mathcal{D}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

INDICE

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f(x) - x$ est celui de $\sin(2x)$. Rappelle-toi que $\sin X = 0$ si, et seulement si, $X = m\pi$ avec m entier.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = e^{-x}\sin(2x)$ et $e^{-x} > 0$: $f(x) - x$ a le signe de $\sin(2x)$.

Intersections. Soit $x \geq 0$, de sorte que $2x \geq 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff\ & \sin(2x) = 0 \\ \iff\ & 2x = m\pi,\ m \in \mathbb{N} \\ \iff\ & x = \frac{m\pi}{2},\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Les abscisses cherchées sont les réels $\frac{m\pi}{2}$, où m décrit $\mathbb{N}$.

Position sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, on a $0 < 2x < \pi$, donc $\sin(2x) > 0$ et $f(x) - x > 0$.

Position sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Pour $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, on a $\pi < 2x < 2\pi$, donc $\sin(2x) < 0$ et $f(x) - x < 0$.

Conclusion. La courbe de f coupe $\mathcal{D}$ sur $[0, +\infty[$ aux points d'abscisses $\frac{m\pi}{2}$, $m \in \mathbb{N}$. Elle est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et strictement en dessous sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Exercice 5 6 pts

Racine double, second membre exponentiel et une inégalité

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 4e^{x}$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.

1. 0,5 pts

Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $g' = g$ et $g'' = g$: le membre de gauche de (E) se calcule en une ligne.

CORRIGÉ

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = e^{x}$, et g' est dérivable, avec $g''(x) = e^{x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g''(x) + 2g'(x) + g(x) \\ &= e^{x} + 2e^{x} + e^{x} \\ &= 4e^{x}. \end{aligned}$$

Conclusion. g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2. 1 pts

Résoudre l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Écris l'équation caractéristique de (E_0) et calcule son discriminant : tu dois reconnaître un carré. Choisis ensuite la bonne ligne de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

CORRIGÉ

L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + 2r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 4 - 4 = 0$. Elle admet la racine double $r_0 = -\dfrac{2}{2} = -1$; en effet, $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$.

Conclusion. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta = 0$), les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{-x},$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$. Le facteur x est indispensable : les seules fonctions $x \mapsto \beta\, e^{-x}$ ne donnent pas toutes les solutions.

3. 0,75 pts

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$. Justifier que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E_0). En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $z=f-g$ et soustrais l'égalité de la question 1 : les deux membres $4e^x$ se compensent. Reviens ensuite à $f=g+z$ avec la question 2.

CORRIGÉ

Équivalence. La fonction $z=f-g$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, avec $z'=f'-g'$ et $z''=f''-g''$. Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question 1, $g''(x)+2g'(x)+g(x)=4e^x$, donc :

$$\begin{aligned} &z''(x)+2z'(x)+z(x)\\ &=f''(x)+2f'(x)+f(x)\\ &\quad -4e^x. \end{aligned}$$

Donc $z''(x)+2z'(x)+z(x)=0$ si, et seulement si, $f''(x)+2f'(x)+f(x)=4e^x$. Cette équivalence vaut pour tout $x\in\mathbb{R}$: f est solution de (E) si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E_0).

Conclusion. D'après la question 2, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x\mapsto e^x+(\alpha x+\beta)\,e^{-x},\quad \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{R}.$$

4. 1 pts

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, et justifier qu'elle est unique. Que traduisent ces deux conditions pour la courbe de f ?

INDICE

Dérive la forme de la question 3 : la dérivée de $x \mapsto (\alpha x+\beta)\,e^{-x}$ s'obtient par la dérivée d'un produit. Pour l'unicité, applique F09 (solution vérifiant deux conditions initiales) à $f-g$.

CORRIGÉ

D'après la question 3, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=e^{x}+(\alpha x+\beta)\,e^{-x}$.

Dérivée. Par dérivation d'un produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x}+\alpha\,e^{-x} \\ &\quad -(\alpha x+\beta)\,e^{-x} \\ &= e^{x}+(\alpha-\beta-\alpha x)\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Système. Donc $f(0)=1+\beta$ et $f'(0)=1+\alpha-\beta$. Les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ s'écrivent :

$$\begin{cases} 1+\beta=0 \\ 1+\alpha-\beta=0, \end{cases}$$

d'où $\beta=-1$, puis $\alpha=\beta-1=-2$.

Unicité. f convient si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E_0) avec $(f-g)(0)=0-1=-1$ et $(f-g)'(0)=0-1=-1$. D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales), une telle fonction $f-g$ est unique.

Conclusion. La solution cherchée est unique : c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=e^{x}-(2x+1)\,e^{-x}.$$

Les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ signifient que la courbe de f passe par l'origine O du repère et y admet une tangente horizontale : l'axe des abscisses.

5. a) 0,75 pts

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

INDICE

En $-\infty$, regarde le signe et la limite de chacun des facteurs $-(2x+1)$ et e^{-x}. En $+\infty$, écris $(2x+1)\,e^{-x} = 2x\,e^{-x} + e^{-x}$ et utilise $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$.

CORRIGÉ

En $-\infty$. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \big(-(2x+1)\big) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Par produit puis par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x} - 2x\,e^{-x} - e^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = 0$; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

5. b) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\,u(x)$, où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{2x} + 2x - 1$.

INDICE

Reprends l'expression de $f'(x)$ obtenue à la question 4 avec $\alpha = -2$ et $\beta = -1$, puis écris $e^{x} = e^{-x} \times e^{2x}$.

CORRIGÉ

D'après la question 4, avec $\alpha = -2$ et $\beta = -1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x} + (-2 + 1 + 2x)\,e^{-x} \\ &= e^{x} + (2x - 1)\,e^{-x}. \end{aligned}$$

Comme $e^{x} = e^{-x} \times e^{2x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x}\big(e^{2x} + 2x - 1\big) \\ &= e^{-x}\,u(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}\,u(x)$.

5. c) 0,75 pts

Étudier le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Montre que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calcule $u(0)$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $u(x)$, car $e^{-x} > 0$.

CORRIGÉ

Signe de $u(x)$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2e^{2x} + 2 > 0$. Donc u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $u(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, on a $u(x) < 0$ pour $x < 0$ et $u(x) > 0$ pour $x > 0$.

Variations de f. Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $u(x)$: $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

Conclusion. $u(x)$ est strictement négatif pour $x < 0$, nul en 0 et strictement positif pour $x > 0$. La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

6. 0,75 pts

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) \geq 0$, puis que $e^{2x} \geq 2x + 1$. Pour quelles valeurs de x cette inégalité est-elle une égalité ?

INDICE

D'après la question 5. c), f admet un minimum en 0 : compare $f(x)$ à $f(0)$. Pour passer à la seconde inégalité, multiplie $f(x) \geq 0$ par e^{x}, qui est strictement positif.

CORRIGÉ

Minimum. D'après la question 5. c), f admet en 0 un minimum, égal à $f(0) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f(x) > 0$ pour $x \neq 0$ par stricte monotonie.

Inégalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^{x} > 0$, et puisque $e^{x} \times e^{x} = e^{2x}$ et $e^{x} \times e^{-x} = 1$:

$$\begin{aligned} & f(x) \geq 0 \\ \iff\ & e^{x} \times f(x) \geq 0 \\ \iff\ & e^{2x} - (2x + 1) \geq 0 \\ \iff\ & e^{2x} \geq 2x + 1. \end{aligned}$$

Cas d'égalité. L'égalité $e^{2x} = 2x + 1$ équivaut à $f(x) = 0$, c'est-à-dire à $x = 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $e^{2x} \geq 2x + 1$; $x = 0$ est la seule valeur pour laquelle cette inégalité est une égalité.