BURHAN

Équations différentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Entraînement	7

Exercice 1

Un second membre polynomial au premier ordre

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 6x^2 - 2x + 7$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y' + 3y = 0$.

1.

Déterminer trois réels A, B et C tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $g'(x) + 3g(x)$ et ordonne-le suivant les puissances de x. Deux polynômes égaux pour tout réel x ont les mêmes coefficients : identifie terme à terme avec $6x^2 - 2x + 7$.

2.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z = f - g$ et calcule $z'(x) + 3z(x)$ en utilisant $g'(x) + 3g(x) = 6x^2 - 2x + 7$ (question 1).

3.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

(E_0) s'écrit $y' = -3y$: résous-la par F02 (solutions de l'équation $y' = ay$). Puis écris $f = g + z$.

4.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ à partir de la question 3 pour trouver k. Pour l'unicité, regarde la fonction $f - g$: quelle équation vérifie-t-elle, et quelle est sa valeur en 0 ?

Exercice 2

Second ordre avec un second membre trigonométrique

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 12y = 25\cos x - 15\sin x$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer deux réels A et B tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = A\cos x + B\sin x$ soit une solution de (E).

INDICE

Calcule g' et g'', puis écris $g''(x) - g'(x) - 12g(x)$ sous la forme $P\cos x + Q\sin x$. Si g est solution, l'égalité vaut en particulier pour $x = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

D'après F10 (solution particulière et équation homogène associée), les solutions sont les $g + z$, où z est solution de l'équation homogène $y'' - y' - 12y = 0$. Écris son équation caractéristique.

3.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 5$, et justifier son unicité.

INDICE

Calcule $f'(x)$ à partir de la forme de la question 2, puis écris le système en α et β. Pour l'unicité, regarde les valeurs de $f - g$ et de $(f - g)'$ en 0.

Exercice 3

Changer d'inconnue avec l'inverse d'une fonction positive

On cherche les fonctions f dérivables et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : 2y' = 5y - 4y^2$. Pour une telle fonction f, on pose $z = \dfrac{1}{f}$.

1.

Soit f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Justifier que z est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et exprimer $z'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et de $f'(x)$.

INDICE

f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: utilise la dérivée de $\dfrac{1}{u}$.

2.

Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E') : y' = -\dfrac{5}{2}y + 2$.

INDICE

Divise les deux membres de $2f'(x) = 5f(x) - 4f(x)^2$ par $2f(x)^2$, qui n'est pas nul. Fais apparaître $z(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $z'(x)$ (question 1).

3.

En déduire toutes les solutions de (E) strictement positives sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E') par F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Puis cherche pour quelles valeurs de k la fonction z obtenue reste strictement positive sur $\mathbb{R}$: distingue $k \geq 0$ et $k < 0$.

4.

Déterminer la solution f strictement positive de (E) telle que $f(0) = \dfrac{1}{2}$, puis sa limite en $+\infty$.

INDICE

La condition $f(0) = \dfrac{1}{2}$ se traduit sur z par $z(0) = 2$. Pour la limite, regarde $e^{-\frac{5}{2}x}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4

Modéliser le refroidissement d'une tasse de thé

Une tasse de thé à 82 degrés est posée dans une pièce à 22 degrés. On note $f(t)$ la température du thé, en degrés, t minutes après ; f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 82$.

Dans ce modèle simplifié, la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec la pièce : pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\dfrac{1}{15}\big(f(t) - 22\big)$.

1.

Montrer que f est une solution sur $[0, +\infty[$ d'une équation $y' = ay + b$, et préciser a et b.

INDICE

Développe le membre de droite de la loi et lis le coefficient de $f(t)$, puis le terme constant.

2.

Exprimer $f(t)$ en fonction de t.

INDICE

Calcule $-\dfrac{b}{a}$, écris la forme générale donnée par F03 (solutions de $y' = ay + b$) sur $[0, +\infty[$, puis utilise $f(0) = 82$.

3.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$. Montrer que la température atteint 37 degrés à un unique instant t_1, et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée à la minute près.

INDICE

Étudie d'abord le sens de variation de f grâce au signe de $f'(t)$. Résous ensuite $f(t) = 37$ en isolant l'exponentielle, puis applique le logarithme.

4.

Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

Que devient $e^{-\frac{t}{15}}$ quand t tend vers $+\infty$? Compare le résultat avec la température de la pièce.

Exercice 5

Un oscillateur : amplitude, période et premier zéro

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 25y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 4, puis résous l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$. Ici $a = 0$: que vaut p ?

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ sur la forme de la question 1, puis évalue $f(0)$ et $f'(0)$: chaque condition donne une des deux constantes.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{5}{2}x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Développe le membre de droite avec $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$; tu connais $\cos\dfrac{\pi}{3}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}$.

4.

Montrer que f est périodique de période $\dfrac{4\pi}{5}$, puis déterminer le plus petit réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$.

INDICE

Calcule $\dfrac{5}{2}\left(x + \dfrac{4\pi}{5}\right)$. Pour les zéros, $\cos X = 0$ si, et seulement si, $X = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$ avec m entier.

Exercice 6

Second membre constant : équilibre et oscillations amorties

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 6y' + 34y = 68$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer la fonction constante solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Si g est constante, que valent g' et g'' ? Remplace dans le membre de gauche de (E).

2.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$, et $z = f - 2$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (E_0) : $y'' + 6y' + 34y = 0$.

INDICE

Exprime z' et z'' à l'aide de f' et f'', puis calcule $z''(x) + 6z'(x) + 34z(x)$.

3.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E_0) avec son équation caractéristique : calcule Δ, puis p et q. Reviens ensuite à $f = z + 2$.

4.

Montrer que toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

INDICE

Majore $|\alpha \cos(5x) + \beta \sin(5x)|$ par une constante qui ne dépend pas de x, puis encadre $|f(x) - 2|$.

Exercice 7

Poser z = y′ quand y ne figure pas dans l'équation

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + 3y' = 12$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation (E') : $y' = -\frac{3}{2}y + 6$.

1.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f' est solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $z = f'$. Dire que f' est dérivable, c'est dire que z est dérivable. Divise ensuite l'égalité de (E) par 2.

2.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E') par F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Puis cherche les fonctions f dont la dérivée est la fonction obtenue : ce sont les primitives d'une même fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

Dérive la forme de la question 2 : la condition sur $f'(0)$ donne α, puis la condition sur $f(0)$ donne β.

4.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 4x - \frac{8}{3}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et préciser la position de la courbe par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Calcule $f(x) - \left(4x - \frac{8}{3}\right)$: il reste un seul terme. Étudie sa limite en $+\infty$, puis son signe.