BURHAN

Équations différentielles : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Entraînement	7

Exercice 1

Un second membre polynomial au premier ordre

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 6x^2 - 2x + 7$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation homogène associée (E_0) : $y' + 3y = 0$.

1.

Déterminer trois réels A, B et C tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ soit une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $g'(x) + 3g(x)$ et ordonne-le suivant les puissances de x. Deux polynômes égaux pour tout réel x ont les mêmes coefficients : identifie terme à terme avec $6x^2 - 2x + 7$.

CORRIGÉ

Calcul. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2Ax + B$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g'(x) + 3g(x) \\ &= 3Ax^2 + (2A + 3B)x \\ &\quad + (B + 3C). \end{aligned}$$

Identification. Si g est solution, ce polynôme est égal à $6x^2 - 2x + 7$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Deux polynômes égaux pour tout réel x ont les mêmes coefficients :

$$\begin{cases} 3A = 6 \\ 2A + 3B = -2 \\ B + 3C = 7. \end{cases}$$

La première équation donne $A = 2$, la deuxième $B = -2$, puis la troisième $C = 3$.

Réciproque. Avec $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g'(x) + 3g(x) \\ &= (4x - 2) \\ &\quad + (6x^2 - 6x + 9) \\ &= 6x^2 - 2x + 7. \end{aligned}$$

Conclusion. $A = 2$, $B = -2$ et $C = 3$: la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E_0).

INDICE

Pose $z=f-g$ et calcule $z'(x)+3z(x)$ en utilisant $g'(x)+3g(x)=6x^2-2x+7$ (question 1).

CORRIGÉ

Dérivabilité. Posons $z=f-g$: z est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme différence de deux fonctions dérivables.

Calcul. Soit $x\in\mathbb{R}$. D'après la question 1, $g'(x)+3g(x)=6x^2-2x+7$, donc :

$$\begin{aligned} &z'(x)+3z(x)\\ &=\big(f'(x)+3f(x)\big)\\ &\quad-\big(g'(x)+3g(x)\big)\\ &=f'(x)+3f(x)\\ &\quad-(6x^2-2x+7). \end{aligned}$$

Équivalence. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $z'(x)+3z(x)=0$ si, et seulement si, $f'(x)+3f(x)=6x^2-2x+7$. Cette seule égalité donne les deux sens.

Conclusion. f est solution de (E) si, et seulement si, $f-g$ est solution de (E_0). C'est la propriété F10 (solution particulière et équation homogène associée).

3.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

(E_0) s'écrit $y'=-3y$: résous-la par F02 (solutions de l'équation $y'=ay$). Puis écris $f=g+z$.

CORRIGÉ

Équation homogène. L'équation (E_0) s'écrit $y'=-3y$. D'après F02 (solutions de l'équation $y'=ay$), ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x\mapsto k\,e^{-3x}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Retour à (E). D'après la question 2, f est solution de (E) si, et seulement si, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)-g(x)=k\,e^{-3x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x\mapsto 2x^2-2x+3+k\,e^{-3x},$$

où k décrit $\mathbb{R}$.

4.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, et justifier qu'elle est unique.

INDICE

Écris $f(0)$ à partir de la question 3 pour trouver k. Pour l'unicité, regarde la fonction $f - g$: quelle équation vérifie-t-elle, et quelle est sa valeur en 0 ?

CORRIGÉ

Existence. D'après la question 3, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2x^2 - 2x + 3 + k\,e^{-3x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 3 + k$, donc $f(0) = 1$ si, et seulement si, $k = -2$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 3 - 2e^{-3x}$$

est donc une solution de (E) telle que $f(0) = 1$.

Unicité. Soit f_1 une solution de (E) telle que $f_1(0) = 1$. D'après la question 2, $f_1 - g$ est solution de (E_0), et $(f_1 - g)(0) = 1 - 3 = -2$. De même, $f - g$ est solution de (E_0) et vaut -2 en 0.

D'après F04 (solution vérifiant une condition initiale) appliquée à (E_0), une seule solution de (E_0) vaut -2 en 0. Donc $f_1 - g = f - g$, c'est-à-dire $f_1 = f$.

Conclusion. La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ est unique : c'est la fonction $x \mapsto 2x^2 - 2x + 3 - 2e^{-3x}$.

Exercice 2

Second ordre avec un second membre trigonométrique

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' - 12y = 25\cos x - 15\sin x$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer deux réels A et B tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = A\cos x + B\sin x$ soit une solution de (E).

INDICE

Calcule g' et g'', puis écris $g''(x) - g'(x) - 12g(x)$ sous la forme $P\cos x + Q\sin x$. Si g est solution, l'égalité vaut en particulier pour $x = 0$ et pour $x = \dfrac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Dérivées. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = -A\sin x + B\cos x$, et g' est dérivable, avec $g''(x) = -A\cos x - B\sin x$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &g''(x) - g'(x) - 12g(x) \\ &= (-13A - B)\cos x \\ &\quad + (A - 13B)\sin x. \end{aligned}$$

Analyse. Si g est solution de (E), l'égalité en $x = 0$ donne $-13A - B = 25$, et l'égalité en $x = \dfrac{\pi}{2}$ donne $A - 13B = -15$. Alors $A = 13B - 15$, puis $-13(13B - 15) - B = 25$, soit $-170B = -170$. Donc $B = 1$ et $A = -2$.

Synthèse. Avec $A = -2$ et $B = 1$, on a $-13A - B = 25$ et $A - 13B = -15$. Donc $g''(x) - g'(x) - 12g(x) = 25\cos x - 15\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion. $A = -2$ et $B = 1$: la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2\cos x + \sin x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

D'après F10 (solution particulière et équation homogène associée), les solutions sont les $g + z$, où z est solution de l'équation homogène $y'' - y' - 12y = 0$. Écris son équation caractéristique.

CORRIGÉ

Équation homogène. L'équation homogène associée est (E_0) : $y'' - y' - 12y = 0$. Son équation caractéristique $r^2 - r - 12 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$, et $\sqrt{\Delta} = 7$. Ses racines sont :

$$r_1 = \frac{1 - 7}{2} = -3,$$
$$r_2 = \frac{1 + 7}{2} = 4.$$

D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta > 0$), les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{4x} + \beta\, e^{-3x}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Conclusion. D'après F10 (solution particulière et équation homogène associée) et la question 1, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, e^{4x} + \beta\, e^{-3x} - 2\cos x + \sin x,$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

3.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -1$ et $f'(0) = 5$, et justifier son unicité.

INDICE

Calcule $f'(x)$ à partir de la forme de la question 2, puis écris le système en α et β. Pour l'unicité, regarde les valeurs de $f - g$ et de $(f - g)'$ en 0.

CORRIGÉ

D'après la question 2, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha\, e^{4x} + \beta\, e^{-3x} - 2\cos x + \sin x$.

Dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4\alpha\, e^{4x} - 3\beta\, e^{-3x} + 2\sin x + \cos x.$$

Système. On a $f(0) = \alpha + \beta - 2$ et $f'(0) = 4\alpha - 3\beta + 1$. Les conditions $f(0) = -1$ et $f'(0) = 5$ s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha - 3\beta = 4. \end{cases}$$

Avec $\alpha = 1 - \beta$, on obtient $4 - 7\beta = 4$, donc $\beta = 0$ et $\alpha = 1$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x} - 2\cos x + \sin x$ convient.

Unicité. Soit f_1 une solution de (E) vérifiant ces deux conditions. D'après F10 (solution particulière et équation homogène associée), $f_1 - g$ est solution de (E_0), avec $(f_1 - g)(0) = -1 + 2 = 1$ et $(f_1 - g)'(0) = 5 - 1 = 4$. Il en va de même pour $f - g$.

D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales), une seule solution de (E_0) vérifie ces deux conditions. Donc $f_1 - g = f - g$, et $f_1 = f$.

Conclusion. La solution cherchée est unique : c'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{4x} - 2\cos x + \sin x.$$

Exercice 3

Changer d'inconnue avec l'inverse d'une fonction positive

On cherche les fonctions f dérivables et strictement positives sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : 2y' = 5y - 4y^2$. Pour une telle fonction f, on pose $z = \dfrac{1}{f}$.

1.

Soit f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Justifier que z est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et exprimer $z'(x)$ à l'aide de $f(x)$ et de $f'(x)$.

INDICE

f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: utilise la dérivée de $\dfrac{1}{u}$.

CORRIGÉ

Comme $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée de $\dfrac{1}{u}$, la fonction $z = \dfrac{1}{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement positive, comme inverse d'une fonction strictement positive.

Conclusion. z est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$z'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

2.

Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E') : y' = -\dfrac{5}{2}y + 2$.

INDICE

Divise les deux membres de $2f'(x) = 5f(x) - 4f(x)^2$ par $2f(x)^2$, qui n'est pas nul. Fais apparaître $z(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $z'(x)$ (question 1).

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $2f(x)^2 \neq 0$, diviser par ce réel donne une équivalence. On utilise ensuite $z(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ et $z'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$ (question 1). L'égalité $2f'(x) = 5f(x) - 4f(x)^2$ équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} & \frac{f'(x)}{f(x)^2} = \frac{5}{2f(x)} - 2 \\ \iff & -z'(x) = \frac{5}{2}z(x) - 2 \\ \iff & z'(x) = -\frac{5}{2}z(x) + 2. \end{aligned}$$

Conclusion. Ces équivalences valent pour tout $x \in \mathbb{R}$, et f et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (E').

3.

En déduire toutes les solutions de (E) strictement positives sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E') par F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Puis cherche pour quelles valeurs de k la fonction z obtenue reste strictement positive sur $\mathbb{R}$: distingue $k \geq 0$ et $k < 0$.

CORRIGÉ

Résolution de (E'). Pour (E'), $a = -\dfrac{5}{2} \neq 0$ et $b = 2$, donc $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{5}$. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$), ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{5}{2}x} + \dfrac{4}{5}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Solutions strictement positives. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $z : x \mapsto k\,e^{-\frac{5}{2}x} + \dfrac{4}{5}$.

- Si $k \geq 0$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k\,e^{-\frac{5}{2}x} \geq 0$, donc $z(x) \geq \dfrac{4}{5} > 0$.
- Si $k < 0$: le réel $x_1 = -\dfrac{2}{5}\ln\left(-\dfrac{8}{5k}\right)$ est défini, car $-\dfrac{8}{5k} > 0$. On a $e^{-\frac{5}{2}x_1} = -\dfrac{8}{5k}$, donc $z(x_1) = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{4}{5} = -\dfrac{4}{5} < 0$.

Ainsi z est strictement positive sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $k \geq 0$.

Les deux sens. Sens direct : si f est une solution de (E) strictement positive, alors $z = \dfrac{1}{f}$ est une solution de (E') strictement positive (questions 1 et 2), donc de la forme ci-dessus avec $k \geq 0$.

Réciproquement, soit $k \geq 0$ et $z : x \mapsto k\,e^{-\frac{5}{2}x} + \dfrac{4}{5}$. La fonction z est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $f = \dfrac{1}{z}$ l'est aussi, et $\dfrac{1}{f} = z$. La question 2, appliquée à cette fonction f, montre que f est une solution de (E).

Conclusion. Les solutions de (E) strictement positives sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \frac{5}{5k\,e^{-\frac{5}{2}x} + 4}, \quad k \in [0, +\infty[\,.$$

4.

Déterminer la solution f strictement positive de (E) telle que $f(0) = \dfrac{1}{2}$, puis sa limite en $+\infty$.

INDICE

La condition $f(0) = \dfrac{1}{2}$ se traduit sur z par $z(0) = 2$. Pour la limite, regarde $e^{-\frac{5}{2}x}$ quand x tend vers $+\infty$.

CORRIGÉ

Valeur de k. Comme $z = \dfrac{1}{f}$:

$$\begin{aligned} & f(0) = \frac{1}{2} \\ \iff\ & z(0) = 2 \\ \iff\ & k + \frac{4}{5} = 2 \\ \iff\ & k = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Solution. Comme $\dfrac{6}{5} \geq 0$, la question 3 donne la solution f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5}{6e^{-\frac{5}{2}x} + 4}.$$

Elle est unique, car z est alors la solution de (E') qui vaut 2 en 0, unique d'après F04 (solution vérifiant une condition initiale).

Limite. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{5}{2}x} = 0$, le dénominateur tend vers 4.

Conclusion. La solution cherchée est $f : x \mapsto \dfrac{5}{6e^{-\frac{5}{2}x} + 4}$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{5}{4}$.

Exercice 4

Modéliser le refroidissement d'une tasse de thé

Une tasse de thé à 82 degrés est posée dans une pièce à 22 degrés. On note $f(t)$ la température du thé, en degrés, t minutes après ; f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $f(0) = 82$.

Dans ce modèle simplifié, la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec la pièce : pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -\dfrac{1}{15}\big(f(t) - 22\big)$.

1.

Montrer que f est une solution sur $[0, +\infty[$ d'une équation $y' = ay + b$, et préciser a et b.

INDICE

Développe le membre de droite de la loi et lis le coefficient de $f(t)$, puis le terme constant.

CORRIGÉ

Soit $t \geq 0$. En développant le membre de droite de la loi :

$$f'(t) = -\frac{1}{15} f(t) + \frac{22}{15}.$$

Conclusion. Comme f est dérivable sur $[0, +\infty[$, f est une solution sur cet intervalle de $y' = ay + b$, avec $a = -\dfrac{1}{15}$ et $b = \dfrac{22}{15}$.

2.

Exprimer $f(t)$ en fonction de t.

INDICE

Calcule $-\dfrac{b}{a}$, écris la forme générale donnée par F03 (solutions de $y' = ay + b$) sur $[0, +\infty[$, puis utilise $f(0) = 82$.

CORRIGÉ

Forme générale. On a $a \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{22}{15} \times 15 = 22$. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$), appliqué sur l'intervalle $[0, +\infty[$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = k\, e^{-\frac{t}{15}} + 22$ pour tout $t \geq 0$.

Condition initiale. La condition $f(0) = 82$ donne $k + 22 = 82$, soit $k = 60$. D'après F04 (solution vérifiant une condition initiale, ici en 0), cette solution est unique.

Conclusion. Pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = 22 + 60\, e^{-\frac{t}{15}}.$$

3.

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$. Montrer que la température atteint 37 degrés à un unique instant t_1, et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée à la minute près.

INDICE

Étudie d'abord le sens de variation de f grâce au signe de $f'(t)$. Résous ensuite $f(t) = 37$ en isolant l'exponentielle, puis applique le logarithme.

CORRIGÉ

Au plus une fois. Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = -4e^{-\frac{t}{15}} < 0$: f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, donc elle prend au plus une fois la valeur 37.

Résolution. Soit $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} & f(t) = 37 \\ \iff & 60\,e^{-\frac{t}{15}} = 15 \\ \iff & e^{-\frac{t}{15}} = \frac{1}{4} \\ \iff & -\frac{t}{15} = -\ln 4 \\ \iff & t = 15 \ln 4 = 30 \ln 2. \end{aligned}$$

Comme $30 \ln 2 \geq 0$, cet instant appartient bien à $[0, +\infty[$.

Valeur approchée. Avec la valeur donnée, $30 \times 0{,}693 = 20{,}79$, donc $30 \ln 2 \approx 20{,}8$.

Conclusion. La température atteint 37 degrés à l'unique instant $t_1 = 30 \ln 2$, soit environ 21 minutes.

4.

Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$, et l'interpréter.

INDICE

Que devient $e^{-\frac{t}{15}}$ quand t tend vers $+\infty$? Compare le résultat avec la température de la pièce.

CORRIGÉ

Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{15}} = 0$, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 22$.

De plus, pour tout $t \geq 0$, $60\,e^{-\frac{t}{15}} > 0$, donc $f(t) > 22$.

Conclusion. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 22$: à long terme, la température du thé se rapproche de celle de la pièce, sans jamais l'atteindre.

Exercice 5

Un oscillateur : amplitude, période et premier zéro

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 25y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 4, puis résous l'équation caractéristique dans $\mathbb{C}$. Ici $a = 0$: que vaut p ?

CORRIGÉ

Comme $4 \neq 0$, (E) équivaut à $y'' + \dfrac{25}{4}y = 0$. Son équation caractéristique $r^2 + \dfrac{25}{4} = 0$ a pour discriminant $\Delta = -25 < 0$, et pour racines $\pm\dfrac{5}{2}i$. Donc $p = 0$ et $q = \dfrac{5}{2}$.

Conclusion. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta < 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{5}{2}x\right),$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$ sur la forme de la question 1, puis évalue $f(0)$ et $f'(0)$: chaque condition donne une des deux constantes.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha \cos\left(\dfrac{5}{2}x\right) + \beta \sin\left(\dfrac{5}{2}x\right)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{5}{2}\alpha \sin\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{5}{2}\beta \cos\left(\frac{5}{2}x\right).$$

Constantes. Donc $f(0) = \alpha$ et $f'(0) = \dfrac{5}{2}\beta$. Les conditions donnent $\alpha = 1$ et $\dfrac{5}{2}\beta = -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, soit $\beta = -\sqrt{3}$.

Conclusion. D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales), la solution cherchée existe et est unique. C'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos\left(\frac{5}{2}x\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{2}x\right).$$

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Développe le membre de droite avec $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$; tu connais $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique $\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u \sin v$, avec $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} & 2\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5}{2}x\right) \\ &\quad - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{5}{2}x\right) \\ &= \cos\left(\frac{5}{2}x\right) \\ &\quad - \sqrt{3}\sin\left(\frac{5}{2}x\right) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$.

4.

Montrer que f est périodique de période $\frac{4\pi}{5}$, puis déterminer le plus petit réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$.

INDICE

Calcule $\frac{5}{2}\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$. Pour les zéros, $\cos X = 0$ si, et seulement si, $X = \frac{\pi}{2} + m\pi$ avec m entier.

CORRIGÉ

Période. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}&\frac{5}{2}\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) + \frac{\pi}{3}\\ &= \frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3} + 2\pi.\end{aligned}$$

Le cosinus étant 2π-périodique, $f\left(x + \frac{4\pi}{5}\right) = f(x)$: f est périodique de période $\frac{4\pi}{5}$.

Zéros. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 3, $f(x) = 0$ si, et seulement si, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + m\pi.$$

Cette égalité équivaut à $\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{6} + m\pi$, soit :

$$x = \frac{\pi}{15} + \frac{2m\pi}{5}.$$

Plus petit zéro positif. Pour $m \geq 0$, ce réel est strictement positif. Pour $m \leq -1$, il est inférieur ou égal à $\frac{\pi}{15} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{\pi}{3} < 0$. Le plus petit zéro strictement positif est donc obtenu pour $m = 0$.

Conclusion. f est périodique de période $\frac{4\pi}{5}$, et le plus petit réel $x > 0$ tel que $f(x) = 0$ est $\frac{\pi}{15}$.

Exercice 6

Second membre constant : équilibre et oscillations amorties

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 6y' + 34y = 68$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Déterminer la fonction constante solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Si g est constante, que valent g' et g'' ? Remplace dans le membre de gauche de (E).

CORRIGÉ

Soit $c \in \mathbb{R}$ et g la fonction constante égale à c sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable deux fois, et g' et g'' sont la fonction nulle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) + 6g'(x) + 34g(x) = 34c$. Donc g est solution de (E) si, et seulement si, $34c = 68$, c'est-à-dire $c = 2$.

Conclusion. La seule fonction constante solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante égale à 2.

2.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$, et $z = f - 2$. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (E_0) : $y'' + 6y' + 34y = 0$.

INDICE

Exprime z' et z'' à l'aide de f' et f'', puis calcule $z''(x) + 6z'(x) + 34z(x)$.

CORRIGÉ

La fonction $z = f - 2$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, avec $z' = f'$ et $z'' = f''$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &z''(x) + 6z'(x) + 34z(x) \\ &= f''(x) + 6f'(x) \\ &\quad + 34f(x) - 68. \end{aligned}$$

Donc $z''(x) + 6z'(x) + 34z(x) = 0$ si, et seulement si, $f''(x) + 6f'(x) + 34f(x) = 68$.

Conclusion. Cette équivalence vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de (E_0).

3.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E_0) avec son équation caractéristique : calcule Δ, puis p et q. Reviens ensuite à $f = z + 2$.

CORRIGÉ

Équation homogène. L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + 6r + 34 = 0$, de discriminant $\Delta = 36 - 136 = -100 < 0$. Ses racines sont :

$$\frac{-6 \pm 10i}{2} = -3 \pm 5i.$$

Donc $p = -3$ et $q = 5$. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta < 0$), les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-3x}\big(\alpha\cos(5x) + \beta\sin(5x)\big)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Retour à (E). D'après la question 2, f est solution de (E) si, et seulement si, $f - 2$ est solution de (E_0).

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$\begin{aligned} x \mapsto\ & 2 \\ & + e^{-3x}\big(\alpha\cos(5x) \\ & + \beta\sin(5x)\big), \end{aligned}$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

4.

Montrer que toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

INDICE

Majore $|\alpha\cos(5x) + \beta\sin(5x)|$ par une constante qui ne dépend pas de x, puis encadre $|f(x) - 2|$.

CORRIGÉ

Soit f une solution de (E). D'après la question 3, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2 = e^{-3x}\big(\alpha\cos(5x) + \beta\sin(5x)\big)$. Posons $M = |\alpha| + |\beta|$.

Majoration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $|\cos(5x)| \leq 1$ et $|\sin(5x)| \leq 1$, l'inégalité triangulaire donne $|\alpha\cos(5x) + \beta\sin(5x)| \leq M$. Comme $e^{-3x} > 0$, on en déduit :

$$0 \leq |f(x) - 2| \leq M\, e^{-3x}.$$

Passage à la limite. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-3x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x) - 2| = 0$.

Conclusion. Pour toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exercice 7

Poser z = y′ quand y ne figure pas dans l'équation

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + 3y' = 12$, sur $\mathbb{R}$, et l'équation (E') : $y' = -\dfrac{3}{2}y + 6$.

1.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f' est solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Pose $z = f'$. Dire que f' est dérivable, c'est dire que z est dérivable. Divise ensuite l'égalité de (E) par 2.

CORRIGÉ

Posons $z = f'$. Être solution de (E) demande que f' soit dérivable ; être solution de (E') demande que z le soit : c'est la même condition. Sous cette condition, $z' = f''$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 2f''(x) + 3f'(x) = 12 \\ \iff\ & z'(x) = -\frac{3}{2}z(x) + 6. \end{aligned}$$

Conclusion. f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f' est solution de (E') sur $\mathbb{R}$.

2.

En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Résous (E') par F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Puis cherche les fonctions f dont la dérivée est la fonction obtenue : ce sont les primitives d'une même fonction sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ

Résolution de (E'). Pour (E'), $a = -\dfrac{3}{2} \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$), ses solutions sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{3}{2}x} + 4$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Primitives. D'après la question 1, f est solution de (E) si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x} + 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto -\dfrac{2k}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + 4x$ en est une primitive sur $\mathbb{R}$.

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. Donc f est solution de (E) si, et seulement si, il existe deux réels k et β tels que $f(x) = -\dfrac{2k}{3}e^{-\frac{3}{2}x} + 4x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Changement de constante. Quand k décrit $\mathbb{R}$, $\alpha = -\dfrac{2k}{3}$ décrit aussi $\mathbb{R}$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\,e^{-\frac{3}{2}x} + 4x + \beta,$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Remarque. On retrouve ainsi, pour cette équation et sans utiliser F08, la forme que donnent F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$) et F10 (solution particulière et équation homogène associée). L'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{3}{2}r = 0$ a pour racines 0 et $-\dfrac{3}{2}$, d'où les solutions $x \mapsto \alpha\,e^{-\frac{3}{2}x} + \beta$ de $y'' + \dfrac{3}{2}y' = 0$; il s'y ajoute la solution particulière $x \mapsto 4x$. Ce calcul ne démontre pas F08 en général : ce résultat reste admis.

3.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

INDICE

Dérive la forme de la question 2 : la condition sur $f'(0)$ donne α, puis la condition sur $f(0)$ donne β.

CORRIGÉ

D'après la question 2, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + 4x + \beta$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + 4.$$

Condition sur $f'(0)$.

$$\begin{aligned} & f'(0) = 0 \\ \iff & -\frac{3}{2}\alpha + 4 = 0 \\ \iff & \alpha = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Condition sur $f(0)$. Avec $\alpha = \dfrac{8}{3}$:

$$\begin{aligned} & f(0) = 0 \\ \iff & \frac{8}{3} + \beta = 0 \\ \iff & \beta = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Ces deux valeurs sont imposées : la solution cherchée est unique. C'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{8}{3}\left(e^{-\frac{3}{2}x} - 1\right) + 4x.$$

4.

Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 4x - \dfrac{8}{3}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et préciser la position de la courbe par rapport à $\mathcal{D}$.

INDICE

Calcule $f(x) - \left(4x - \dfrac{8}{3}\right)$: il reste un seul terme. Étudie sa limite en $+\infty$, puis son signe.

CORRIGÉ

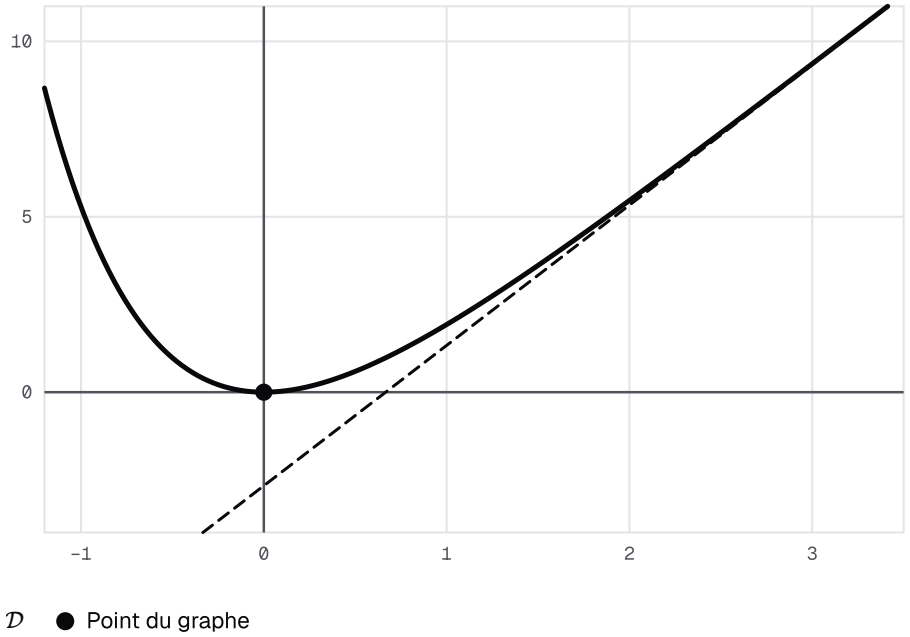
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question 3 :

$$f(x) - \left(4x - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Asymptote. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{3}{2}x} = 0$, cette différence tend vers 0 en $+\infty$.

Position. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{8}{3}e^{-\frac{3}{2}x} > 0$.

Conclusion. $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et la courbe de f est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$.



La courbe de f et la droite D d'équation y = 4x − 8/3 : la courbe reste au-dessus de D et s'en rapproche vers la droite de la figure, où D est son asymptote.