BURHAN

Équations différentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Application	8

Exercice 1

Vérifier une solution, puis démasquer une fausse solution

On considère l'équation différentielle (E) : $4y' + 3y = 24$, sur $\mathbb{R}$, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 8 - 5e^{-\frac{3}{4}x}.$$

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Pour un réel m, la fonction $x \mapsto e^{mx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto m\,e^{mx}$. Applique-la avec $m = -\dfrac{3}{4}$.

2.

Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Remplace y' par $f'(x)$ et y par $f(x)$ dans le membre de gauche de (E). Développe, puis regroupe les termes en $e^{-\frac{3}{4}x}$.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 8 + 5e^{\frac{3}{4}x}$. Montrer que g n'est pas une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Être solution, c'est vérifier une égalité pour **tout** réel x. Pour la mettre en défaut, un seul réel suffit : calcule $4g'(0) + 3g(0)$.

Exercice 2

Résoudre une équation y′ = ay et décaler la variable

On considère l'équation différentielle (E) : $5y' + 2y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y' = ay$, en précisant le réel a.

INDICE

Passe $2y$ dans l'autre membre, puis divise par le coefficient de y'. Vérifie que ce coefficient n'est pas nul.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise F02 (solutions de l'équation $y' = ay$) avec la valeur de a trouvée. Résoudre, c'est donner **toutes** les solutions.

3.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, $f(x + 5\ln 2) = \dfrac{1}{4} f(x)$.

INDICE

D'après la question 2, $f(x) = k\, e^{-\frac{2}{5}x}$ pour un certain réel k. Remplace x par $x + 5\ln 2$, puis utilise $e^{u+v} = e^u e^v$.

Exercice 3

Lire a et b après avoir isolé y′

On considère l'équation différentielle (E) : $4y' - 3 = 10y$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y' = ay + b$, puis donner a et b.

INDICE

Isole d'abord $4y'$ dans un membre, puis divise chaque terme par 4.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $a \neq 0$: c'est le premier cas de F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Calcule $-\dfrac{b}{a}$ avec soin, signe compris.

3.

Une élève propose la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{\frac{5}{2}x} + \dfrac{3}{10}$. Montrer par un calcul que u n'est pas une solution de (E), et dire d'où vient l'erreur.

INDICE

Calcule séparément $4u'(0) - 3$ et $10u(0)$, puis compare. Pour l'erreur, regarde la constante dans la réponse de la question 2.

4.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E') : $5y' + 3 = 0$.

INDICE

Isole y' : la fonction y figure-t-elle dans le second membre ? Que vaut alors a ?

Exercice 4

Imposer une valeur en $x_0 = 3$

On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 18$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 3 pour obtenir la forme $y' = ay + b$, lis a et b, puis applique F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$).

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 13$.

INDICE

Écris $f(3)$ à l'aide de la forme générale : tu obtiens une équation d'inconnue k. Le nombre e^{-1} n'est pas nul.

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) < 18$.

INDICE

Quel est le signe d'une exponentielle ? Pars de l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 2.

Exercice 5

Discriminant positif : deux exponentielles

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + 3y' - 2y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E) et calculer son discriminant Δ.

INDICE

F05 (équation caractéristique) porte sur une équation de la forme $y'' + ay' + by = 0$: divise d'abord tous les termes par 2.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $\Delta > 0$: calcule les deux racines réelles $\dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$, puis lis la ligne correspondante de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

3.

Sans utiliser la question 2, vérifier par le calcul que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{\frac{x}{2}} - e^{-2x}$ est une solution de (E).

INDICE

Calcule $f'(x)$, puis $f''(x)$. Dans $2f''(x) + 3f'(x) - 2f(x)$, regroupe les termes en $e^{\frac{x}{2}}$ d'une part, en e^{-2x} d'autre part.

Exercice 6

Racine double : le facteur x compte

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' - 12y' + 9y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E) et calculer son discriminant.

INDICE

Mets d'abord (E) sous la forme $y'' + ay' + by = 0$ en divisant par 4, puis calcule $\Delta = a^2 - 4b$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $\Delta = 0$: la racine double vaut $r_0 = -\dfrac{a}{2}$. Lis ensuite la ligne « racine double » de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

3.

Un élève affirme que les solutions de (E) sont seulement les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\, e^{\frac{3}{2}x}$. Vérifier par le calcul que g est solution de (E), puis montrer que g n'est pas de la forme proposée.

INDICE

Dérive g comme un produit, deux fois, en factorisant à chaque fois par $e^{\frac{3}{2}x}$. Pour la seconde partie, suppose $g(x) = \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$ pour tout x et teste deux valeurs de x.

Exercice 7

Racines complexes conjuguées : lire p et q

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' + 37y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E), calculer son discriminant et donner ses racines sous la forme $p \pm iq$, avec $q > 0$.

INDICE

Après division par 4, calcule Δ. S'il est négatif, les racines sont $\dfrac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise la ligne $\Delta < 0$ de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$). Le nombre qui multiplie x dans le cosinus est q, et non Δ ni $\sqrt{-\Delta}$.

3.

Vérifier par le calcul que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\sin(3x)$ est une solution de (E).

INDICE

Écris $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,v(x)$ avec $v(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(3x) + 3\cos(3x)$. Pour f'', dérive à nouveau ce produit, puis regroupe les termes en $\sin(3x)$ et en $\cos(3x)$.

Exercice 8

Position et pente imposées en 0

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' - 3y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 4, écris l'équation caractéristique, calcule Δ et ses racines, puis lis F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

INDICE

Écris $f(x) = \alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + \beta\, e^{\frac{1}{2}x}$, calcule $f'(x)$, puis traduis les deux conditions en un système d'inconnues α et β.