BURHAN

Équations différentielles : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Équations différentielles	Application	8

Exercice 1

Vérifier une solution, puis démasquer une fausse solution

On considère l'équation différentielle (E) : $4y' + 3y = 24$, sur $\mathbb{R}$, et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 8 - 5e^{-\frac{3}{4}x}.$$

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

Pour un réel m, la fonction $x \mapsto e^{mx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto m\,e^{mx}$. Applique-la avec $m = -\dfrac{3}{4}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{4}x$ est affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$, la fonction $x \mapsto e^{-\frac{3}{4}x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto -\dfrac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}x}$.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une constante et d'un multiple de cette fonction.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 \times \left(-\frac{3}{4}\right) e^{-\frac{3}{4}x} \\ &= \frac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}x}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{15}{4}e^{-\frac{3}{4}x}$.

2.

Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Remplace y' par $f'(x)$ et y par $f(x)$ dans le membre de gauche de (E). Développe, puis regroupe les termes en $e^{-\frac{3}{4}x}$.

CORRIGÉ

Ce que l'on veut montrer. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (question 1). Il reste à établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$4f'(x) + 3f(x) = 24.$$

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1 :

$$4f'(x) = 15e^{-\frac{3}{4}x},$$
$$3f(x) = 24 - 15e^{-\frac{3}{4}x}.$$

En additionnant ces deux égalités, les termes en $e^{-\frac{3}{4}x}$ s'éliminent :

$$4f'(x) + 3f(x) = 24.$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $4f'(x) + 3f(x) = 24$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après F01 (définition d'une solution sur un intervalle), f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 8 + 5e^{\frac{3}{4}x}$. Montrer que g n'est pas une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Être solution, c'est vérifier une égalité pour **tout** réel x. Pour la mettre en défaut, un seul réel suffit : calcule $4g'(0) + 3g(0)$.

CORRIGÉ

Idée. Être solution, c'est vérifier l'égalité pour **tout** réel x. Un seul réel où elle est fausse suffit donc à conclure.

Dérivée de g. Comme à la question 1, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{15}{4}e^{\frac{3}{4}x}$.

Test en $x = 0$. On a $g'(0) = \dfrac{15}{4}$ et $g(0) = 8 + 5 = 13$, donc :

$$\begin{aligned} 4g'(0) + 3g(0) &= 15 + 39 \\ &= 54 \neq 24. \end{aligned}$$

Conclusion. L'égalité $4g'(x) + 3g(x) = 24$ est fausse pour $x = 0$: g n'est pas une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Résoudre une équation y′ = ay et décaler la variable

On considère l'équation différentielle (E) : $5y' + 2y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y' = ay$, en précisant le réel a.

INDICE

Passe $2y$ dans l'autre membre, puis divise par le coefficient de y'. Vérifie que ce coefficient n'est pas nul.

CORRIGÉ

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $5 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 5f'(x) + 2f(x) = 0 \\ \iff\ & 5f'(x) = -2f(x) \\ \iff\ & f'(x) = -\frac{2}{5}f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. (E) s'écrit $y' = ay$, avec $a = -\dfrac{2}{5}$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise F02 (solutions de l'équation $y' = ay$) avec la valeur de a trouvée. Résoudre, c'est donner **toutes** les solutions.

CORRIGÉ

D'après la question 1, (E) équivaut à $y' = ay$ avec $a = -\dfrac{2}{5}$. D'après F02 (solutions de l'équation $y' = ay$), sur l'intervalle $\mathbb{R}$, ses solutions sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Conclusion. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto k\,e^{-\frac{2}{5}x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.

Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x, $f(x+5\ln 2)=\dfrac{1}{4}f(x)$.

INDICE

D'après la question 2, $f(x)=k\,e^{-\frac{2}{5}x}$ pour un certain réel k. Remplace x par $x+5\ln 2$, puis utilise $e^{u+v}=e^u e^v$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=k\,e^{-\frac{2}{5}x}$.

Une valeur utile. On a $e^{-2\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^{-2}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

Calcul. Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $-\dfrac{2}{5}\times 5\ln 2=-2\ln 2$:

$$\begin{aligned} f(x+5\ln 2) &= k\,e^{-\frac{2}{5}x-2\ln 2} \\ &= f(x)\times e^{-2\ln 2} \\ &= \frac{1}{4}f(x). \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+5\ln 2)=\dfrac{1}{4}f(x)$.

Exercice 3

Lire a et b après avoir isolé y′

On considère l'équation différentielle (E) : $4y' - 3 = 10y$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire (E) sous la forme $y' = ay + b$, puis donner a et b.

INDICE

Isole d'abord $4y'$ dans un membre, puis divise chaque terme par 4.

CORRIGÉ

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $4 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 4f'(x) - 3 = 10f(x) \\ \iff\ & 4f'(x) = 10f(x) + 3 \\ \iff\ & f'(x) = \frac{5}{2}f(x) + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. (E) s'écrit $y' = \dfrac{5}{2}y + \dfrac{3}{4}$, donc $a = \dfrac{5}{2}$ et $b = \dfrac{3}{4}$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $a \neq 0$: c'est le premier cas de F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$). Calcule $-\dfrac{b}{a}$ avec soin, signe compris.

CORRIGÉ

On a $a = \dfrac{5}{2} \neq 0$ et :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}.$$

Conclusion. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$, cas $a \neq 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto k\, e^{\frac{5}{2}x} - \frac{3}{10}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3.

Une élève propose la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = e^{\frac{5}{2}x} + \dfrac{3}{10}$. Montrer par un calcul que u n'est pas une solution de (E), et dire d'où vient l'erreur.

INDICE

Calcule séparément $4u'(0) - 3$ et $10u(0)$, puis compare. Pour l'erreur, regarde la constante dans la réponse de la question 2.

CORRIGÉ

Dérivée de u. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = \dfrac{5}{2}e^{\frac{5}{2}x}$.

Test en $x = 0$. D'une part :

$$4u'(0) - 3 = 10 - 3 = 7.$$

D'autre part :

$$10u(0) = 10\left(1 + \frac{3}{10}\right) = 13.$$

Comme $7 \neq 13$, l'égalité de (E) est fausse en $x = 0$.

Origine de l'erreur. D'après la question 2, la constante vaut $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{10}$, et non $+\dfrac{3}{10}$.

Conclusion. u n'est pas une solution de (E) sur $\mathbb{R}$: l'erreur porte sur le signe de la constante.

4.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E') : $5y' + 3 = 0$.

INDICE

Isole y' : la fonction y figure-t-elle dans le second membre ? Que vaut alors a ?

CORRIGÉ

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $5 \neq 0$:

$$\begin{aligned} & 5f'(x) + 3 = 0 \\ \iff\ & f'(x) = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Donc (E') s'écrit $y' = -\dfrac{3}{5}$. C'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = 0$ et $b = -\dfrac{3}{5}$: la fonction y ne figure pas dans le second membre.

Conclusion. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$, cas $a = 0$), les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto -\frac{3}{5}x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

Imposer une valeur en $x_0 = 3$

On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 18$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 3 pour obtenir la forme $y' = ay + b$, lis a et b, puis applique F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$).

CORRIGÉ

Comme $3 \neq 0$, (E) équivaut à $y' = -\dfrac{1}{3}y + 6$. Donc $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 6$, et comme $a \neq 0$:

$$-\frac{b}{a} = -6 \times (-3) = 18.$$

Conclusion. D'après F03 (solutions de l'équation $y' = ay + b$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto k\,e^{-\frac{x}{3}} + 18, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 13$.

INDICE

Écris $f(3)$ à l'aide de la forme générale : tu obtiens une équation d'inconnue k. Le nombre e^{-1} n'est pas nul.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k\,e^{-\frac{x}{3}} + 18$.

Calcul de k. Comme $e^{-1} \neq 0$:

$$\begin{aligned} & f(3) = 13 \\ \iff\ & k\,e^{-1} + 18 = 13 \\ \iff\ & k = -5e. \end{aligned}$$

Expression de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-5e \times e^{-\frac{x}{3}} = -5e^{1-\frac{x}{3}}$.

Conclusion. D'après F04 (solution vérifiant une condition initiale), la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(3) = 13$ existe et est unique. C'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 18 - 5e^{1-\frac{x}{3}}.$$

3.

Montrer que, pour tout réel x, $f(x) < 18$.

INDICE

Quel est le signe d'une exponentielle ? Pars de l'expression de $f(x)$ trouvée à la question 2.

CORRIGÉ

Soit $x \in \mathbb{R}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $5e^{1-\frac{x}{3}} > 0$, puis :

$$f(x) = 18 - 5e^{1-\frac{x}{3}} < 18.$$

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 18$.

Exercice 5

Discriminant positif : deux exponentielles

On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' + 3y' - 2y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E) et calculer son discriminant Δ.

INDICE

FO5 (équation caractéristique) porte sur une équation de la forme $y'' + ay' + by = 0$: divise d'abord tous les termes par 2.

CORRIGÉ

Comme $2 \neq 0$, (E) équivaut à $y'' + \dfrac{3}{2}y' - y = 0$. Donc $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = -1$.

Conclusion. L'équation caractéristique de (E) est

$$r^2 + \frac{3}{2}r - 1 = 0,$$

et son discriminant est

$$\Delta = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}.$$

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $\Delta > 0$: calcule les deux racines réelles $\dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$, puis lis la ligne correspondante de FO8 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

CORRIGÉ

On a $\Delta = \dfrac{25}{4} > 0$ et $\sqrt{\Delta} = \dfrac{5}{2}$. Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -2,$$

$$r_2 = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. D'après FO8 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta > 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, e^{-2x} + \beta\, e^{\frac{1}{2}x},$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

3.

Sans utiliser la question 2, vérifier par le calcul que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4e^{\frac{x}{2}} - e^{-2x}$ est une solution de (E).

INDICE

Calcule $f'(x)$, puis $f''(x)$. Dans $2f''(x) + 3f'(x) - 2f(x)$, regroupe les termes en $e^{\frac{x}{2}}$ d'une part, en e^{-2x} d'autre part.

CORRIGÉ

Dérivées. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2e^{\frac{x}{2}} + 2e^{-2x}.$$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = e^{\frac{x}{2}} - 4e^{-2x}.$$

Vérification. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans $2f''(x) + 3f'(x) - 2f(x)$:

- le coefficient de $e^{\frac{x}{2}}$ est $2 + 6 - 8 = 0$;
- le coefficient de e^{-2x} est $-8 + 6 + 2 = 0$.

Donc $2f''(x) + 3f'(x) - 2f(x) = 0$.

Conclusion. f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. C'est la solution de la question 2 obtenue avec $\alpha = -1$ et $\beta = 4$.

Exercice 6

Racine double : le facteur x compte

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' - 12y' + 9y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E) et calculer son discriminant.

INDICE

Mets d'abord (E) sous la forme $y'' + ay' + by = 0$ en divisant par 4, puis calcule $\Delta = a^2 - 4b$.

CORRIGÉ

Comme $4 \neq 0$, (E) équivaut à $y'' - 3y' + \dfrac{9}{4}y = 0$. Donc $a = -3$ et $b = \dfrac{9}{4}$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + \frac{9}{4} = 0.$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times \frac{9}{4} \\ &= 9 - 9 = 0.\end{aligned}$$

Conclusion. L'équation caractéristique de (E) est $r^2 - 3r + \dfrac{9}{4} = 0$, et son discriminant est nul.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Ici $\Delta = 0$: la racine double vaut $r_0 = -\dfrac{a}{2}$. Lis ensuite la ligne « racine double » de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

CORRIGÉ

Comme $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double :

$$r_0 = -\frac{a}{2} = \frac{3}{2}.$$

Conclusion. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta = 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{\frac{3}{2}x},$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

3.

Un élève affirme que les solutions de (E) sont seulement les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\, e^{\frac{3}{2}x}$. Vérifier par le calcul que g est solution de (E), puis montrer que g n'est pas de la forme proposée.

INDICE

Dérive g comme un produit, deux fois, en factorisant à chaque fois par $e^{\frac{3}{2}x}$. Pour la seconde partie, suppose $g(x) = \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$ pour tout x et teste deux valeurs de x.

CORRIGÉ

Dérivées de g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \left(1 + \frac{3}{2}x\right) e^{\frac{3}{2}x}.$$

De même, g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}x\right) e^{\frac{3}{2}x} \\ &= \left(3 + \frac{9}{4}x\right) e^{\frac{3}{2}x}. \end{aligned}$$

g est solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On factorise $4g''(x) - 12g'(x) + 9g(x)$ par $e^{\frac{3}{2}x}$:

- le terme constant vaut $12 - 12 = 0$;
- le coefficient de x vaut $9 - 18 + 9 = 0$.

Donc $4g''(x) - 12g'(x) + 9g(x) = 0$: g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

g n'a pas la forme proposée. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En divisant par $e^{\frac{3}{2}x} > 0$, on obtient $x = \alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Avec $x = 0$ puis $x = 1$, on trouve $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$: c'est impossible.

Conclusion. g est une solution de (E) qui n'est pas de la forme $x \mapsto \alpha\, e^{\frac{3}{2}x}$. L'affirmation de l'élève oublie donc des solutions : il manque le facteur $\alpha x + \beta$.

Exercice 7

Racines complexes conjuguées : lire p et q

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' + 37y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Écrire l'équation caractéristique de (E), calculer son discriminant et donner ses racines sous la forme $p \pm iq$, avec $q > 0$.

INDICE

Après division par 4, calcule Δ. S'il est négatif, les racines sont $\dfrac{-a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

CORRIGÉ

Comme $4 \neq 0$, (E) équivaut à $y'' + y' + \dfrac{37}{4}y = 0$. Donc $a = 1$ et $b = \dfrac{37}{4}$.

L'équation caractéristique est $r^2 + r + \dfrac{37}{4} = 0$, de discriminant :

$$\Delta = 1 - 37 = -36 < 0.$$

Elle a donc deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{36}}{2} = -\frac{1}{2} \pm 3i.$$

Conclusion. $\Delta = -36$ et les racines sont $-\dfrac{1}{2} \pm 3i$: $p = -\dfrac{1}{2}$ et $q = 3 > 0$.

2.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Utilise la ligne $\Delta < 0$ de F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$). Le nombre qui multiplie x dans le cosinus est q, et non Δ ni $\sqrt{-\Delta}$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, $\Delta < 0$, avec $p = -\dfrac{1}{2}$ et $q = 3$.

Conclusion. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta < 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}\big(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\big),$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

3.

Vérifier par le calcul que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}\sin(3x)$ est une solution de (E).

INDICE

Écris $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,v(x)$ avec $v(x) = -\dfrac{1}{2}\sin(3x) + 3\cos(3x)$. Pour f'', dérive à nouveau ce produit, puis regroupe les termes en $\sin(3x)$ et en $\cos(3x)$.

CORRIGÉ

Dérivée première. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,v(x)$, où :

$$\begin{aligned} v(x) = &-\frac{1}{2}\sin(3x) \\ &+ 3\cos(3x). \end{aligned}$$

Dérivée seconde. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = -\dfrac{3}{2}\cos(3x) - 9\sin(3x)$. Par dérivation d'un produit, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f''(x) \\ &= e^{-\frac{x}{2}}\left(v'(x) - \frac{1}{2}v(x)\right). \end{aligned}$$

En regroupant, $v'(x) - \dfrac{1}{2}v(x) = -\dfrac{35}{4}\sin(3x) - 3\cos(3x)$.

Vérification. Soit $x \in \mathbb{R}$. On factorise $4f''(x) + 4f'(x) + 37f(x)$ par $e^{-\frac{x}{2}}$:

- le coefficient de $\sin(3x)$ est $-35 - 2 + 37 = 0$;
- le coefficient de $\cos(3x)$ est $-12 + 12 = 0$.

Donc $4f''(x) + 4f'(x) + 37f(x) = 0$.

Conclusion. f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$: c'est le cas $\alpha = 0$, $\beta = 1$ de la question 2.

Exercice 8

Position et pente imposées en 0

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + 4y' - 3y = 0$, sur $\mathbb{R}$.

1.

Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Divise par 4, écris l'équation caractéristique, calcule Δ et ses racines, puis lis F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$).

CORRIGÉ

Comme $4 \neq 0$, (E) équivaut à $y'' + y' - \dfrac{3}{4}y = 0$. Son équation caractéristique $r^2 + r - \dfrac{3}{4} = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 3 = 4 > 0$, et $\sqrt{\Delta} = 2$. Ses racines sont :

$$r_1 = \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2},$$
$$r_2 = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion. D'après F08 (solutions de $y'' + ay' + by = 0$, cas $\Delta > 0$), les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + \beta\, e^{\frac{1}{2}x},$$

où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

2.

Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

INDICE

Écris $f(x) = \alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + \beta\, e^{\frac{1}{2}x}$, calcule $f'(x)$, puis traduis les deux conditions en un système d'inconnues α et β.

CORRIGÉ

D'après la question 1, il existe deux réels α et β tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + \beta\, e^{\frac{1}{2}x}.$$

Dérivée. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\alpha\, e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{1}{2}\beta\, e^{\frac{1}{2}x}.$$

Système. Donc $f(0) = \alpha + \beta$ et $f'(0) = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Les conditions $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$ s'écrivent, après multiplication de la seconde par 2 :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ -3\alpha + \beta = -2. \end{cases}$$

En soustrayant la seconde équation de la première, $4\alpha = 4$: donc $\alpha = 1$, puis $\beta = 1$.

Conclusion. D'après F09 (solution vérifiant deux conditions initiales), la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$ existe et est unique. C'est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-\frac{3}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}.$$