BURHAN

Équations différentielles

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/equations-differentielles/cours

Chapitre	Semestre
Équations différentielles	Semestre 2

Une équation dont l'inconnue est une fonction

Tu laisses la pâte du batbout lever au chaud. Plus il y a de levure active, plus elle se multiplie vite. On fait l'hypothèse que la vitesse de croissance est proportionnelle à la quantité elle-même.

En langage mathématique, on cherche une fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout réel x :

$$f'(x) = 3\,f(x).$$

L'inconnue n'est plus un nombre : c'est une fonction.

Devine : L'allure d'une solution

Soit f une telle fonction, strictement positive, avec $f(0) = 1$. Selon toi, à quoi ressemble sa courbe sur $[0, +\infty[$?

A. Une droite qui monte.

Faux.
Sur une droite, la pente est fixe. Ici, la pente $f'(x) = 3f(x)$ grandit avec $f(x)$.

B. Une courbe qui monte puis se stabilise.

Faux.
Pour se stabiliser, il faudrait une pente proche de 0. Or la pente $3f(x)$ grandit quand f grandit.

C. Une courbe qui monte de plus en plus vite.

Juste.
Juste : plus $f(x)$ est grand, plus la pente $3f(x)$ est forte.

D. Une courbe qui monte, puis redescend.

Faux.
Pour descendre, il faudrait $f'(x) < 0$. Or $f'(x) = 3f(x) > 0$.

Correction
Comme $f(x) > 0$ pour tout réel x, la pente $f'(x) = 3f(x)$ est strictement positive : f est strictement croissante.

Plus $f(x)$ grandit, plus la pente grandit : la courbe monte de plus en plus vite.

La fonction $x \mapsto e^{3x}$ a exactement ce comportement. Elle vaut 1 en 0, et sa dérivée est $x \mapsto 3\,e^{3x}$.

Dans ce chapitre, tu vas résoudre ces équations, c'est-à-dire trouver **toutes** leurs solutions. Tu commenceras par $y' = ay + b$, puis tu passeras à $y'' + ay' + by = 0$.

Au premier ordre, tu sauras aussi **démontrer** la forme des solutions, et rédiger chaque étape comme une preuve. Au second ordre, la forme générale des solutions sera admise.

Enfin, tu modéliseras l'évolution d'une température et une oscillation.

L'équation y′ = ay

Une dérivée qui ressemble à la fonction

Petit rappel. Soit a un réel. La fonction $x \mapsto e^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto a\,e^{ax}$.

Plus généralement, si u est dérivable sur un intervalle I, alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée :

$$x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}.$$

Ce rappel est l'outil de tout le chapitre.

Vérifie : Dériver une exponentielle

Soit $g : x \mapsto 5\,e^{-2x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(x)$?

A. $g'(x) = 5\,e^{-2x}$

Faux.
La dérivée de $x \mapsto e^{-2x}$ n'est pas $x \mapsto e^{-2x}$: il manque le facteur $u'(x) = -2$.

B. $g'(x) = -10\,e^{-2x}$

Juste.
Juste : $g'(x) = 5 \times (-2)\,e^{-2x}$.

C. $g'(x) = -2\,e^{-2x}$

Faux.
Le facteur 5 reste devant : la dérivée de $5v$ est $5v'$.

D. $g'(x) = 10\,e^{-2x}$

Faux.
Le signe vient de $u'(x) = -2$: il est négatif.

Correction
On pose $u(x) = -2x$, donc $u'(x) = -2$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5 \times (-2)\,e^{-2x} \\ &= -10\,e^{-2x}. \end{aligned}$$

Remarque. Pour tout réel x, $g'(x) = -2\,g(x)$. La dérivée de g s'exprime à l'aide de g elle-même : c'est une **équation différentielle**.

Ce qu'est une solution

Définition : Équation y′ = ay + b et solution sur un intervalle

Soit a et b deux réels et I un intervalle.

Une fonction f est **une solution sur** I de l'équation différentielle $y' = ay + b$ lorsque f est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = a\,f(x) + b$.

Plus généralement, pour une équation différentielle qui relie y' et y, comme $y' = 3y - y^2$, une solution sur I est une fonction f dérivable sur I qui vérifie l'égalité pour tout $x \in I$, lorsque l'on remplace y par $f(x)$ et y' par $f'(x)$.

Résoudre cette équation sur I, c'est déterminer **toutes** ses solutions sur I.

Vérifie : Laquelle convient ?

Laquelle de ces fonctions est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = -2y + 6$?

A. $x \mapsto 3 + x\,e^{-2x}$

Faux.
Sa dérivée vaut $(1 - 2x)\,e^{-2x}$, alors que $-2f(x) + 6 = -2x\,e^{-2x}$. Il reste e^{-2x}, qui n'est jamais nul.

B. $x \mapsto 6 + 5\,e^{-2x}$

Faux.
Ici $-2f(x) + 6 = -6 - 10\,e^{-2x}$, alors que $f'(x) = -10\,e^{-2x}$: l'écart vaut -6.

C. $x \mapsto 3 + 5\,e^{2x}$

Faux.
Sa dérivée vaut $10\,e^{2x}$, alors que $-2f(x) + 6 = -10\,e^{2x}$: les signes s'opposent.

D. $x \mapsto 3 + 5\,e^{-2x}$

Juste.
Juste : $f'(x) = -10\,e^{-2x}$ et $-2f(x) + 6 = -6 - 10\,e^{-2x} + 6 = -10\,e^{-2x}$.

Indice 1
Pour chaque fonction f, calcule $f'(x)$, puis $-2f(x) + 6$, et compare.

Correction
Soit $f : x \mapsto 3 + 5\,e^{-2x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = -10\,e^{-2x}$.

D'autre part, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2f(x) + 6 &= -6 - 10\,e^{-2x} + 6 \\ &= -10\,e^{-2x}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux membres sont égaux pour tout réel x : f est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -2y + 6$.

Exemple **: Exemple guidé : montrer qu'une fonction est solution**

En clair. Une solution est une fonction dérivable sur tout l'intervalle, qui vérifie l'égalité en **chaque** point de cet intervalle.

Énoncé. Montre que $f : x \mapsto 1 - 4\,e^{\frac{x}{2}}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : 2y' = y - 1$, c'est-à-dire $y' = \dfrac{1}{2}\,y - \dfrac{1}{2}$.

Dérivabilité. La fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f aussi.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = -4 \times \dfrac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}} = -2\,e^{\frac{x}{2}}$, donc :

$$2f'(x) = -4\,e^{\frac{x}{2}} = f(x) - 1.$$

Conclusion. Pour tout réel x, $2f'(x) = f(x) - 1$: f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

Toutes les solutions de y′ = ay

Pour tout réel k, la fonction $x \mapsto k\,e^{ax}$ est une solution de $y' = ay$: sa dérivée est $x \mapsto k\,a\,e^{ax}$. Cela fait déjà une infinité de solutions.

Existe-t-il d'autres solutions ? Teste une idée avec $x \mapsto 7\,e^{ax}$: pour tout réel x, le produit $7\,e^{ax} \times e^{-ax}$ vaut 7.

Pourquoi est-ce vrai que, pour toute solution f, le produit $f(x)\,e^{-ax}$ reste constant ? La preuve répond.

Théorème **: Solutions de l'équation y′ = ay**

Soit a un réel et I un intervalle.

Les solutions sur I de l'équation différentielle $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1. Soit k un réel et $f(x) = k\,e^{ax}$. La fonction f est dérivable sur I (dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = ax$) et $f'(x) = k\,a\,e^{ax} = a\,f(x)$: f est une solution sur I (FO1).

Étape 2. Réciproquement, soit f une solution sur I. On pose $g(x) = f(x)\,e^{-ax}$ pour $x \in I$. La fonction g est dérivable sur I et

$$g'(x) = f'(x)\,e^{-ax} - a\,f(x)\,e^{-ax} = \big(f'(x) - a\,f(x)\big)\,e^{-ax} = 0.$$

Étape 3. Or une fonction dérivable sur un **intervalle**, de dérivée nulle sur cet intervalle, y est constante (signe de la dérivée et variations). Il existe donc un réel k tel que $g(x) = k$ pour tout $x \in I$. Comme $e^{-ax}\,e^{ax} = 1$, on obtient $f(x) = g(x)\,e^{ax} = k\,e^{ax}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour montrer qu'une solution f a la forme annoncée, on étudie la **fonction auxiliaire** $g : x \mapsto f(x)\, e^{-ax}$.

L'équation donne sa dérivée : elle est nulle. Sur un **intervalle**, une fonction de dérivée nulle est constante.

Ce geste resservira pour l'équation $y' = ay + b$.

Vérifie : L'argument décisif

Dans la preuve, quel résultat fait passer de « $g'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ » à « g est constante sur I » ?

A. Le fait que e^{-ax} ne s'annule pour aucun réel x.
Faux.
Ce fait ne sert pas à ce passage, qui porte sur g' et non sur e^{-ax}.

B. La règle de dérivation d'un produit de deux fonctions.
Faux.
Elle sert à calculer $g'(x)$, à l'étape 2. Elle ne dit rien d'une fonction de dérivée nulle.

C. Une dérivée nulle sur un intervalle donne une constante.
Juste.
Juste : ce résultat vient du chapitre de la dérivation, et il exige un intervalle.

D. L'hypothèse que f vérifie $f'(x) = a\, f(x)$ sur tout I.
Faux.
Elle sert à obtenir $g'(x) = 0$. Le passage à « constante » demande un autre argument.

Correction
L'étape 2 calcule $g'(x)$ par la dérivée d'un produit. Elle utilise ensuite l'égalité $f'(x) = a\, f(x)$, vraie pour tout $x \in I$, pour obtenir $g'(x) = 0$.

L'étape 3 invoque la propriété : « une fonction dérivable sur un **intervalle**, de dérivée nulle, y est constante ».

Sans intervalle, ce passage tombe. L'exemple suivant le montre.

Sans intervalle

Exemple : Contre-exemple : une réunion de deux intervalles

Sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, on définit f par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{si } x < 0 \\ -2\,e^{3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \in D$, $f'(x) = 3f(x)$: f est une solution de $y' = 3y$ sur D.

Pourtant $f(x)\,e^{-3x}$ vaut 1 sur $]-\infty, 0[$ et -2 sur $]0, +\infty[$. Aucun réel k ne vérifie $f(x) = k\,e^{3x}$ pour tout $x \in D$.

En clair. Sur un **intervalle** I, les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax}$, et elles seules.

À toi : Rédige ta première résolution

Rédige la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $3y' + 2y = 0$.

Indice 1
Commence par mettre (E) sous la forme $y' = ay$: divise par 3.
Indice 2
Lis la valeur de a, puis applique le théorème sur les solutions de $y' = ay$.
Indice 3
Point délicat : le signe de a. Termine par une phrase qui donne toutes les solutions et l'intervalle.

Réponse
« Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, l'égalité $3f'(x) + 2f(x) = 0$ équivaut à $f'(x) = -\dfrac{2}{3}\,f(x)$. L'équation (E) s'écrit donc $y' = -\dfrac{2}{3}\,y$, avec $a = -\dfrac{2}{3}$.

D'après le théorème sur les solutions de $y' = ay$, appliqué sur l'intervalle $\mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{2}{3}x}$, où k décrit $\mathbb{R}$. »

L'équation y′ = ay + b

Une solution qui ne bouge pas

Devine : Une solution constante

Une fonction constante $x \mapsto c$ a une dérivée nulle. Pour quelle valeur de c est-elle une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -3y + 12$?

A. $c = -4$
Faux.
Avec $c = -4$, $-3c + 12 = 24$, et non 0. Attention au signe.

B. $c = 12$
Faux.
Avec $c = 12$, $-3c + 12 = -24$: la dérivée nulle ne convient pas.

C. $c = 4$
Juste.

Juste : $-3 \times 4 + 12 = 0$, comme la dérivée d'une constante.

D. $c = \dfrac{1}{4}$

Faux.

Avec $c = \dfrac{1}{4}$, $-3c + 12 = \dfrac{45}{4}$: ce n'est pas 0.

Correction

La fonction constante $x \mapsto c$ est une solution si, et seulement si, $0 = -3c + 12$, soit $c = 4$.

En général, si $a \neq 0$, la seule solution constante de $y' = ay + b$ est $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$: c'est la **valeur d'équilibre**.

Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -3y + 12$. Regarde l'écart à l'équilibre, $z = f - 4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} z'(x) &= f'(x) \\ &= -3f(x) + 12 \\ &= -3\big(f(x) - 4\big) \\ &= -3z(x). \end{aligned}$$

L'écart vérifie donc $y' = -3y$, que tu sais résoudre.

Pourquoi est-ce vrai pour toute équation $y' = ay + b$? La preuve suit la même idée, dans les deux sens.

Toutes les solutions de y′ = ay + b

Théorème : Solutions de l'équation y′ = ay + b

Soit a et b deux réels et I un intervalle.

- Si $a \neq 0$, les solutions sur I de $y' = ay + b$ sont exactement les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où k décrit $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, les solutions sur I de $y' = b$ sont exactement les fonctions $x \mapsto bx + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Démonstration

Étape 1 ($a \neq 0$). Soit f une fonction dérivable sur I. On pose $g(x) = f(x) + \dfrac{b}{a}$. Alors g est dérivable sur I, $g' = f'$ et $a\,g(x) = a\,f(x) + b$. Donc $f'(x) = a\,f(x) + b$ pour tout $x \in I$ si, et seulement si, $g'(x) = a\,g(x)$ pour tout $x \in I$.

Étape 2. D'après F02, g est une solution de $y' = ay$ sur I si, et seulement si, il existe un réel k tel que $g(x) = k\,e^{ax}$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire $f(x) = k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Étape 3 ($a = 0$). Soit f dérivable sur I et $h(x) = f(x) - bx$. Alors $f' = b$ sur I si, et seulement si, $h' = 0$ sur I. Une fonction dérivable sur un **intervalle** y est de dérivée nulle si, et seulement si, elle y est constante (signe de la dérivée et variations). Donc f est solution si, et seulement si, il existe un réel k tel que $f(x) = bx + k$ pour tout $x \in I$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On **translate l'inconnue** : avec $g = f + \dfrac{b}{a}$, l'équation $y' = ay + b$ devient $y' = ay$.

L'équivalence est établie dans les deux sens : on obtient donc **toutes** les solutions.

Le cas $a = 0$ se traite à part : l'équation $y' = b$ revient à chercher les fonctions dont la dérivée est la constante b.

Vérifie : Pourquoi deux cas ?

Pourquoi la preuve traite-t-elle à part le cas $a = 0$?

A. Parce que $\dfrac{b}{a}$ n'a pas de sens lorsque $a = 0$.

Juste.

Juste : la translation par $\dfrac{b}{a}$ demande $a \neq 0$.

B. Parce que $x \mapsto e^{0x}$ n'est pas dérivable.

Faux.

Elle est dérivable : c'est la fonction constante égale à 1.

C. Parce que $y' = b$ n'a alors aucune solution.

Faux.

Les fonctions $x \mapsto bx + k$ en sont des solutions.

D. Parce que les solutions sont alors constantes.

Faux.

Seulement si $b = 0$: sinon $x \mapsto bx + k$ n'est pas constante.

Correction

L'étape 1 ajoute à l'inconnue la constante $\dfrac{b}{a}$: ce quotient exige $a \neq 0$.

Si $a = 0$, l'équation s'écrit $y' = b$. Ses solutions sur I sont les fonctions $x \mapsto bx + k$, $k \in \mathbb{R}$, dont la dérivée est la constante b.

La rédaction attendue

Méthode : résoudre une équation y′ = ay + b

1. **Mettre l'équation sous la forme** $y' = ay + b$: diviser par le coefficient de y', puis lire a et b.
2. **Appliquer le théorème** : si $a \neq 0$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$; si $a = 0$, ce sont les fonctions $x \mapsto bx + k$.
3. **Conclure** par une phrase qui donne toutes les solutions et l'intervalle.
4. **Contrôler** : lorsque $a \neq 0$, la solution constante $-\dfrac{b}{a}$ annule $ay + b$.

Exemple : Exemple guidé : une équation à remettre en forme

Énoncé. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $4y' = 2y - 7$.

Forme. On divise par 4 : (E) s'écrit

$$y' = \frac{1}{2}\,y - \frac{7}{4}.$$

Donc $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{7}{4}$.

Théorème. On a $a \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{7}{4} \times 2 = \dfrac{7}{2}$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{\frac{x}{2}} + \dfrac{7}{2}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Contrôle. La constante $\dfrac{7}{2}$ convient : $4 \times 0 = 2 \times \dfrac{7}{2} - 7$.

Deux pièges de lecture

Attention : lire a et b sur la bonne forme

✗ « Dans $5y' + 10y = 3$, on a $a = 10$ et $b = 3$. »

✓ On divise d'abord par 5, puis on isole y' : $y' = -2y + \dfrac{3}{5}$. Donc $a = -2$ et $b = \dfrac{3}{5}$. Les coefficients se lisent seulement sur la forme $y' = ay + b$.

Attention : le signe de la constante

✗ « Les solutions de $y' = 2y + 6$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x} + 3$. »

✓ La constante est $-\dfrac{b}{a} = -3$: les solutions sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x} - 3$.

Pour contrôler, une solution constante doit annuler $ay + b$: $2 \times (-3) + 6 = 0$, alors que $2 \times 3 + 6 = 12$.

À toi

À toi : Rédige une résolution complète

Rédige la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : 2y' + 3y = 1$.

Indice 1

Mets (E) sous la forme $y' = ay + b$: isole $2y'$, puis divise par 2.

Indice 2

Lis a et b, puis calcule $-\dfrac{b}{a}$.

Indice 3

Point délicat : le signe de $-\dfrac{b}{a}$. Contrôle avec la solution constante, puis conclus.

Réponse

« L'équation (E) s'écrit $y' = -\dfrac{3}{2}\,y + \dfrac{1}{2}$, donc $a = -\dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$.

On a $a \neq 0$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{3}{2}x} + \dfrac{1}{3}$, où k décrit $\mathbb{R}$. »

Contrôle. La constante $\dfrac{1}{3}$ vérifie $2 \times 0 + 3 \times \dfrac{1}{3} = 1$.

Vérifie : Quand a est nul

Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $2y' - 7 = 0$?

A. Les fonctions $x \mapsto k\,e^{\frac{7}{2}x}$, k réel.

Faux.

Ici y n'apparaît pas : l'équation est $y' = \dfrac{7}{2}$, avec $a = 0$.

B. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{7}{2}\,x + k$, k réel.

Juste.

Juste : leur dérivée vaut $\dfrac{7}{2}$.

C. La seule fonction constante $x \mapsto \dfrac{7}{2}$.

Faux.

Sa dérivée est nulle, pas égale à $\dfrac{7}{2}$.

D. La seule fonction $x \mapsto \dfrac{7}{2}\,x$.

Faux.

Elle convient, mais elle n'est pas seule : ajoute une constante, la dérivée ne change pas.

Correction

L'équation s'écrit $y' = \dfrac{7}{2}$: c'est le cas $a = 0$, avec $b = \dfrac{7}{2}$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{7}{2}\,x + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Une condition initiale fixe la solution

Une seule courbe par un point

Devine : Par le point A

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = -\dfrac{1}{2}\,y + 1$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-\frac{x}{2}} + 2$, k réel. D'après toi, combien de ces courbes passent par le point $A(0, 3)$?

A. Aucune de ces courbes.

Faux.

Il suffit de choisir k : l'équation $k + 2 = 3$ a une solution.

B. Une seule courbe.

Juste.

Juste : la condition impose $k = 1$.

C. Exactement deux courbes.

Faux.

L'équation en k est du premier degré : une seule solution.

D. Toutes, car k est libre.

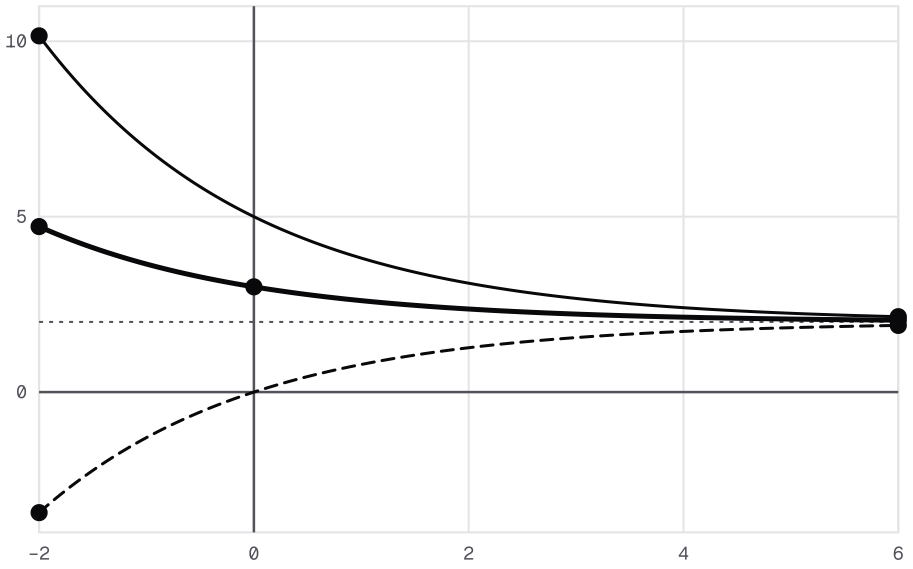
Faux.

La famille est infinie, mais la condition en 0 ne laisse qu'un choix de k.

Correction

La courbe passe par A si, et seulement si, $k\,e^{0} + 2 = 3$, soit $k = 1$.

Une seule fonction convient : $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} + 2$. La figure suivante la montre, avec deux autres solutions.



Trois solutions sur $\mathbb{R}$ de y′ = −y/2 + 1, pour k = 3, k = 1 et k = −2. Seule la courbe obtenue pour k = 1 passe par A(0, 3). Toutes s'approchent de la droite d'équation y = 2.

Sur la figure, une seule courbe de la famille passe par A.

Pourquoi est-ce vrai pour toute équation $y' = ay + b$ et tout point de départ ? Imposer $f(x_0) = y_0$ donne une équation d'inconnue k. La question devient : cette équation a-t-elle toujours une solution, et une seule ?

Existence et unicité

Propriété : Solution vérifiant une condition initiale

Soit a et b deux réels, I un intervalle, x_0 un élément de I et y_0 un réel.

L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une **unique** solution f sur I telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Étape 1 ($a \neq 0$). D'après F03, les solutions sur I sont les fonctions $f_k : x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.
Comme $e^{ax_0} > 0$,

$$f_k(x_0) = y_0 \iff k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-ax_0}.$$

Étape 2 ($a = 0$). D'après F03, les solutions sont les fonctions $f_k : x \mapsto bx + k$, et $f_k(x_0) = y_0 \iff k = y_0 - b\,x_0$.

Étape 3. Dans les deux cas, exactement une valeur de k convient. Il existe donc une solution qui vérifie $f(x_0) = y_0$; et deux solutions qui la vérifient ont la même constante k, donc sont égales.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La condition $f(x_0) = y_0$ devient une équation du **premier degré** en k.

Comme $e^{ax_0} \neq 0$, elle a exactement une solution : l'existence et l'unicité viennent d'un seul calcul.

Pour l'unicité, on dit que deux solutions qui vérifient la condition ont la même constante k : elles sont donc égales.

Vérifie : Diviser sans risque

À l'étape 1, quel fait permet d'isoler k dans l'égalité $k\,e^{ax_0} - \dfrac{b}{a} = y_0$?

A. Le réel a est non nul, donc on peut diviser par a.

Faux.

On divise par a pour écrire $\dfrac{b}{a}$, mais isoler k demande de diviser par e^{ax_0}.

B. Le réel y_0 est positif, donc l'égalité a un sens.

Faux.

Aucune hypothèse ne porte sur le signe de y_0 : il est quelconque.

C. Le réel e^{ax_0} est non nul, donc on peut diviser par lui.

Juste.

Juste : une exponentielle est strictement positive.

D. Le réel x_0 est dans I, donc f est définie en x_0.

Faux.

C'est nécessaire pour écrire $f(x_0)$, mais ce n'est pas ce qui permet d'isoler k.

Correction

L'égalité s'écrit $k\,e^{ax_0} = y_0 + \dfrac{b}{a}$. Comme $e^{ax_0} > 0$, on peut diviser par ce réel :

$$k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{-ax_0}.$$

Une seule valeur de k convient.

Exemple : Contre-exemple : sans intervalle, plus d'unicité

Sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, soit $f_1 : x \mapsto e^{3x}$ et f_2 définie par :

$$f_2(x) = \begin{cases} e^{3x} & \text{si } x > 0 \\ 2\,e^{3x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont des solutions de $y' = 3y$ sur D, et $f_1(1) = f_2(1) = e^3$.

Pourtant $f_1(-1) = e^{-3}$ et $f_2(-1) = 2\,e^{-3}$: elles sont différentes.

En clair. L'unicité exige que la condition soit posée en un point x_0 d'un **intervalle** I, sur lequel on cherche les solutions.

La méthode

Méthode : la solution qui vérifie une condition initiale

1. **Écrire** les solutions de l'équation sur l'intervalle, avec la constante k.
2. **Imposer** $f(x_0) = y_0$ et résoudre l'équation d'inconnue k.
3. **Conclure** par l'unicité : « la solution de (E) sur I qui vérifie $f(x_0) = y_0$ est la fonction… ». Ici, et ici seulement, on dit « la » solution.

Exemple : Exemple guidé : une condition en 1

Énoncé. Détermine la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' = 3y - 6$ telle que $f(1) = 5$.

Solutions. Ici $a = 3, b = -6$ et $-\dfrac{b}{a} = 2$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{3x} + 2$, k réel.

Condition. L'égalité $f(1) = 5$ s'écrit $k\,e^{3} + 2 = 5$, soit $k = 3\,e^{-3}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $3\,e^{-3}\,e^{3x} = 3\,e^{3x-3}$. D'après l'unicité, la solution cherchée est la fonction $x \mapsto 3\,e^{3x-3} + 2$.

Une ou toutes ?

Attention : « la solution » demande une condition

✗ « La solution de $y' = 3y - 6$ est $x \mapsto k\,e^{3x} + 2$. »

✓ « **Les** solutions de $y' = 3y - 6$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{3x} + 2$, k réel. » Il y en a une pour chaque valeur de k. On dit « la solution » seulement quand une condition initiale la désigne.

À toi : Rédige avec une condition en ln 2

Rédige la recherche de la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' + 4y = 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

Indice 1
Écris (E) sous la forme $y' = ay + b$, puis donne toutes ses solutions.
Indice 2
Traduis $f(\ln 2) = 1$ en une équation d'inconnue k.
Indice 3

Point délicat : $e^{-4\ln 2} = \dfrac{1}{16}$. Termine par la phrase de conclusion, avec l'unicité.

Réponse

« (E) s'écrit $y' = -4y + 2$, donc $a = -4$, $b = 2$ et $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-4x} + \dfrac{1}{2}$, k réel.

On a :

$$e^{-4\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-4} = \frac{1}{16}.$$

Ainsi, la condition $f(\ln 2) = 1$ s'écrit $\dfrac{k}{16} + \dfrac{1}{2} = 1$, donc $k = 8$.

La solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(\ln 2) = 1$ est la fonction $x \mapsto 8\,e^{-4x} + \dfrac{1}{2}$. Elle est unique. »

Modéliser une évolution

Traduire une loi en équation

Devine : La bouteille qui se réchauffe

Une bouteille d'eau sort du réfrigérateur à 4 degrés et reste dans une cuisine à 29 degrés. On note $f(t)$ la température de l'eau, en degrés, à l'instant t, en minutes. L'eau se réchauffe d'autant plus vite que l'écart avec la cuisine est grand : la vitesse vaut $\dfrac{1}{10}$ de cet écart. Quelle équation f vérifie-t-elle ?

A. $y' = -\dfrac{1}{10}\,y$

Faux.

Avec cette loi, l'eau tendrait vers 0 degré, et non vers la température de la cuisine.

B. $y' = \dfrac{1}{10}\,(y - 29)$

Faux.

L'eau est plus froide que la cuisine et se réchauffe : il faut $f'(t) > 0$ quand $f(t) < 29$.

C. $y' = -\dfrac{1}{10}\,(y - 4)$

Faux.

L'écart se mesure avec la cuisine, à 29 degrés, pas avec la température de départ.

D. $y' = -\dfrac{1}{10}\,(y - 29)$

Juste.

Juste : si $f(t) < 29$, alors $f'(t) > 0$, et la vitesse est proportionnelle à l'écart.

Correction

L'écart avec la cuisine est $29 - f(t)$, et la vitesse de variation est $f'(t)$. L'eau se réchauffe tant qu'elle est plus froide que la cuisine. Donc, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{10}\big(29 - f(t)\big) \\ &= -\frac{1}{10}\big(f(t) - 29\big). \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme $y' = ay + b$, avec $a = -\dfrac{1}{10}$ et $b = \dfrac{29}{10}$.

Méthode : modéliser par une équation différentielle

1. **Traduire** la loi : nommer l'inconnue, la variable et l'intervalle de temps. Une vitesse proportionnelle à la quantité donne $y' = ay$. Une vitesse proportionnelle à l'écart avec une valeur c donne $y' = a(y - c)$.
2. **Résoudre** l'équation, puis imposer la condition initiale.
3. **Interpréter** : limite en $+\infty$, instant où une valeur est atteinte (par le logarithme), sens de variation.

Résoudre, puis interpréter

Exemple : Exemple guidé : la température de l'eau

Équation. Sur $[0, +\infty[$, f est la solution de $y' = -\dfrac{1}{10}\,y + \dfrac{29}{10}$ telle que $f(0) = 4$.

Solutions. Ici $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{29}{10} \times 10 = 29$. Les solutions sur $[0, +\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto k\,e^{-\frac{t}{10}} + 29$, k réel.

Condition. On a $f(0) = k + 29$, et $f(0) = 4$, donc $k = -25$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = 29 - 25\,e^{-\frac{t}{10}}.$$

Exemple : Exemple guidé : ce que dit la fonction f

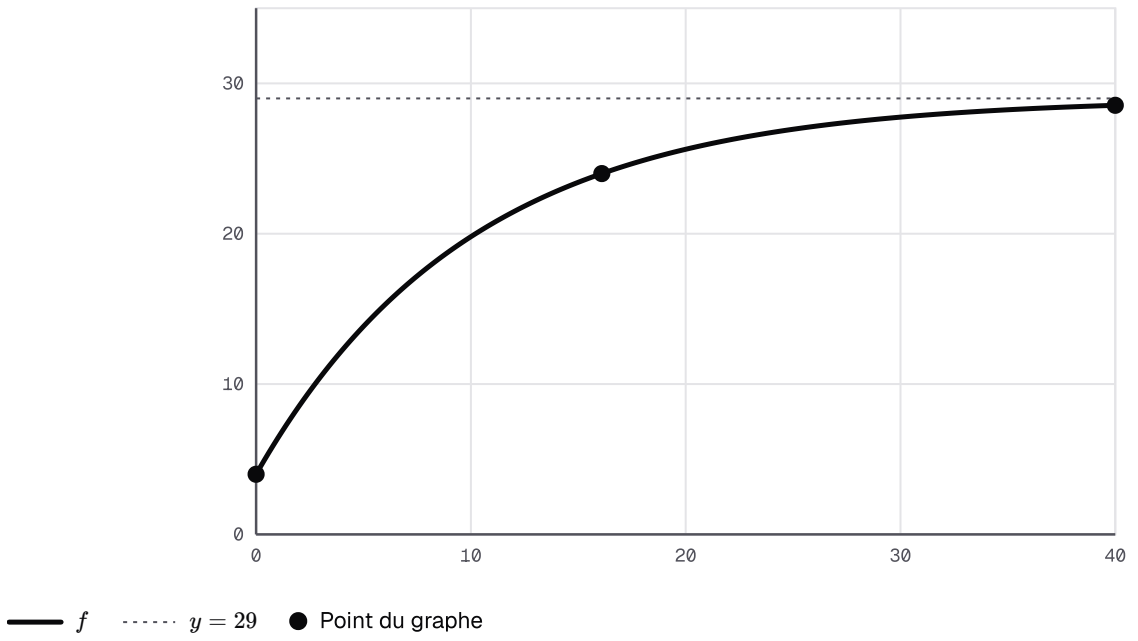
Limite. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$, on obtient :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 29.$$

L'eau tend vers la température de la cuisine.

Instant. L'eau est à 24 degrés lorsque $29 - 25\,e^{-\frac{t}{10}} = 24$, soit $e^{-\frac{t}{10}} = \dfrac{1}{5}$. Par le logarithme népérien, $-\dfrac{t}{10} = -\ln 5$, donc $t = 10 \ln 5$. C'est un peu plus de 16 minutes.

Variations. Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = \dfrac{5}{2}\,e^{-\frac{t}{10}} > 0$: la température monte sans cesse.



La température de l'eau, t ↦ 29 − 25e^(−t/10), pendant les quarante premières minutes. La courbe monte vers la droite d'équation y = 29. Le point marqué correspond à 24 degrés, atteints à l'instant 10 ln 5.

À toi d'interpréter

Vérifie : Un autre instant

Avec la même fonction f, à quel instant l'eau est-elle à 19 degrés ?

A. $t = 10 \ln \dfrac{5}{2}$

Juste.

Juste : $25\, e^{-\frac{t}{10}} = 10$ donne $e^{-\frac{t}{10}} = \dfrac{2}{5}$.

B. $t = -10 \ln \dfrac{5}{2}$

Faux.

Cet instant est négatif : il précède le début de l'expérience. Vérifie le signe en prenant le logarithme.

C. $t = 10 \ln \dfrac{2}{5}$

Faux.

Comme $\dfrac{2}{5} < 1$, ce nombre est négatif : un signe s'est perdu.

D. $t = \dfrac{1}{10} \ln \dfrac{5}{2}$

Faux.

Le coefficient $\dfrac{1}{10}$ est dans l'exposant : on multiplie par 10, on ne divise pas.

Correction

On résout $29 - 25\, e^{-\frac{t}{10}} = 19$, soit :

$$e^{-\frac{t}{10}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

Par le logarithme népérien, $-\dfrac{t}{10} = \ln\dfrac{2}{5} = -\ln\dfrac{5}{2}$, donc $t = 10\ln\dfrac{5}{2}$ minutes.

À toi : Rédige une modélisation

Un médicament est éliminé du sang à une vitesse proportionnelle à la quantité présente, de coefficient $\dfrac{1}{5}$, le temps étant en heures. À l'instant 0, la quantité vaut 40 milligrammes. Rédige la recherche de la quantité $f(t)$, puis de l'instant où elle a diminué de moitié.

Indice 1

Traduis la loi : la quantité diminue, donc $f'(t) = -\dfrac{1}{5}\,f(t)$ sur $[0, +\infty[$.

Indice 2

Résous $y' = -\dfrac{1}{5}\,y$, puis impose $f(0) = 40$.

Indice 3

Point délicat : « diminué de moitié » se traduit par $f(t) = 20$. Le logarithme isole t.

Réponse

« Sur $[0, +\infty[$, f est la solution de $y' = -\dfrac{1}{5}\,y$ telle que $f(0) = 40$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto k\,e^{-\frac{t}{5}}$, k réel, et $f(0) = k = 40$. Donc, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 40\,e^{-\frac{t}{5}}$.

La quantité vaut 20 lorsque $e^{-\frac{t}{5}} = \dfrac{1}{2}$, soit $-\dfrac{t}{5} = -\ln 2$, donc $t = 5\ln 2$ heures. »

Remarque : Coin examen : la forme des questions

Quand une équation différentielle figure dans un problème, les questions peuvent prendre cette forme :

- « Vérifier que la fonction g est une solution de (E) » : dériver, remplacer, conclure ;
- « En déduire les solutions de (E) » : appliquer le théorème, sur l'intervalle donné ;
- « Déterminer la solution de (E) qui vérifie $f(0) = y_0$ » : calculer la constante ;
- puis étudier cette solution : variations, limite en $+\infty$, instant où une valeur est atteinte.

L'équation y″ + ay′ + by = 0 et son équation caractéristique

Le second degré, dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Petit rappel. Soit a et b deux réels. L'équation $r^2 + ar + b = 0$ a pour discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

- Si $\Delta > 0$, elle a deux racines réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, elle a une racine double, $-\dfrac{a}{2}$.

- Si $\Delta < 0$, elle a deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $\dfrac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Au second ordre, l'équation fait aussi intervenir y'', la dérivée de y'.

Vérifie : Racines complexes

Dans $\mathbb{C}$, quelles sont les racines de $r^2 + 2r + 5 = 0$?

A. $1 + 2i$ et $1 - 2i$

Faux.

La somme des racines vaut -2 : leur partie réelle est -1.

B. $-1 + 4i$ et $-1 - 4i$

Faux.

$\sqrt{-\Delta} = 4$ se divise encore par 2 : la partie imaginaire est ± 2.

C. Aucune, car $\Delta < 0$.

Faux.

Dans $\mathbb{R}$, oui ; dans $\mathbb{C}$, il y a deux racines conjuguées.

D. $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$

Juste.

Juste : $\Delta = -16$, et $\dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

Correction

Le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16$, et $\Delta < 0$. Les racines sont $\dfrac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

On les note $p \pm iq$, avec $p = -1$ et $q = 2 > 0$.

Une équation du second degré associée

Définition : Équation y″ + ay′ + by = 0 et équation caractéristique

Soit a et b deux réels.

Une fonction f est **une solution sur** $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = 0$.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r, est **l'équation caractéristique** de cette équation différentielle ; son discriminant est $\Delta = a^2 - 4b$.

Vérifie : Écrire l'équation caractéristique

On considère (E) : $y'' - 5y = 2y'$. Quelle est son équation caractéristique ?

A. $r^2 - 5 = 0$

Faux.

Le terme $2y'$ du second membre a été oublié : il faut d'abord tout ramener à gauche.

B. $r^2 - 2r - 5 = 0$

Juste.

Juste : (E) s'écrit $y'' - 2y' - 5y = 0$, donc $a = -2$ et $b = -5$.

C. $r^2 + 2r - 5 = 0$

Faux.

En passant à gauche, $2y'$ devient $-2y'$: $a = -2$.

D. $r^2 - 5r - 2 = 0$

Faux.

Les coefficients sont mal placés : r^2 remplace y'', r remplace y' et 1 remplace y.

Correction

On ramène tout à gauche : (E) s'écrit $y'' - 2y' - 5y = 0$. Donc $a = -2$, $b = -5$, et l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 5 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 20 = 24$.

Des exponentielles solutions

Au premier ordre, les solutions étaient des exponentielles. Essaie $f : x \mapsto e^{rx}$ dans $y'' - y' - 6y = 0$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f''(x) - f'(x) - 6f(x) \\ &\quad = \left(r^2 - r - 6\right) e^{rx}. \end{aligned}$$

Cette expression est nulle pour tout x lorsque $r = 3$ ou $r = -2$, les racines de $r^2 - r - 6 = 0$.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Et pourquoi peut-on ensuite combiner deux solutions ? Les deux preuves suivantes répondent.

Propriété : Solutions de la forme x ↦ e^(rx)

Soit a, b et r trois réels.

La fonction $x \mapsto e^{rx}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ si, et seulement si, r est une solution de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Démonstration

Étape 1. Soit $g(x) = e^{rx}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $g'(x) = r\,e^{rx}$; g' est dérivable, avec $g''(x) = r^2\,e^{rx}$ (dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$).

Étape 2. Pour tout réel x :

$$g''(x) + a\,g'(x) + b\,g(x) = \left(r^2 + ar + b\right) e^{rx}.$$

Étape 3. Si $r^2 + ar + b = 0$, cette expression est nulle pour tout x : g est une solution (F05). Réciproquement, si g est une solution, l'expression est nulle en $x = 0$, où $e^0 = 1$: donc $r^2 + ar + b = 0$.

Propriété : Combinaisons linéaires de solutions

Soit a et b deux réels. Si f_1 et f_2 sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$, alors, pour tous réels α et β, la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

Démonstration

Étape 1. Soit α et β deux réels et $f = \alpha f_1 + \beta f_2$. Par les opérations sur les fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f' = \alpha f_1' + \beta f_2'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'' = \alpha f_1'' + \beta f_2''$.

Étape 2. Pour tout réel x, en regroupant les termes :

$$f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = \alpha\big(f_1''(x) + a\,f_1'(x) + b\,f_1(x)\big) + \beta\big(f_2''(x) + a\,f_2'(x) + b\,f_2(x)\big).$$

Étape 3. Par hypothèse, les deux parenthèses sont nulles. Donc $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = 0$ pour tout réel x : f est une solution sur $\mathbb{R}$ (F05).

Vérifie : La réciproque

Dans la réciproque de la première preuve, on sait que $(r^2 + ar + b)\,e^{rx} = 0$ pour tout réel x. Comment en déduit-on $r^2 + ar + b = 0$?

A. On prend $x = 0$, où $e^0 = 1$.

Juste.

Juste : en $x = 0$, l'égalité devient $r^2 + ar + b = 0$.

B. On dérive l'égalité une fois de plus.

Faux.

Dériver redonne un multiple de e^{rx} : on tourne en rond.

C. On fait tendre x vers $+\infty$.

Faux.

Si $r < 0$, e^{rx} tend vers 0 en $+\infty$: on obtient $0 = 0$, et rien ne se conclut. Cette voie ne marche donc pas pour tout r ; prendre $x = 0$ marche toujours.

D. On calcule le discriminant Δ.

Faux.

Le discriminant dit combien de racines existent, pas que r en est une.

Correction

L'égalité vaut pour tout réel x, donc en particulier pour $x = 0$. Comme $e^0 = 1$, on obtient $r^2 + ar + b = 0$. On aurait aussi pu diviser par e^{rx}, qui n'est jamais nul.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour une exponentielle, dériver revient à multiplier par r : l'équation différentielle devient $r^2 + ar + b = 0$, au facteur e^{rx} près.

Pour les combinaisons, on **regroupe** les termes de f_1 et ceux de f_2 : chaque groupe est nul.

Ce regroupement exige un second membre **nul**.

Une hypothèse, un exemple

Exemple : Contre-exemple : un second membre non nul

Les fonctions $f_1 : x \mapsto 1$ et $f_2 : x \mapsto 1 + \cos x$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 1$. En effet, pour tout réel x, $f_1''(x) + f_1(x) = 0 + 1 = 1$ et :

$$\begin{aligned} & f_2''(x) + f_2(x) \\ &= -\cos x + 1 + \cos x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Leur somme $g : x \mapsto 2 + \cos x$ n'est **pas** une solution : pour tout réel x, $g''(x) + g(x) = -\cos x + 2 + \cos x = 2$, et non 1.

La propriété des combinaisons vaut pour une équation de second membre nul.

Exemple : vérifier une combinaison

Pour $(E) : y'' - y' - 6y = 0$, les racines de $r^2 - r - 6 = 0$ sont 3 et -2. Donc $x \mapsto e^{3x}$ et $x \mapsto e^{-2x}$ sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

Par combinaison, $f : x \mapsto 2\,e^{3x} - 5\,e^{-2x}$ en est une aussi.

Vérification. Pour tout réel x, $f'(x) = 6\,e^{3x} + 10\,e^{-2x}$ et $f''(x) = 18\,e^{3x} - 20\,e^{-2x}$. Donc :

$$\begin{aligned} & f''(x) - f'(x) - 6f(x) \\ &= (18 - 6 - 12)\,e^{3x} \\ &\quad + (-20 - 10 + 30)\,e^{-2x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

À toi : Rédige : trouver les exponentielles solutions

Rédige la recherche des réels r tels que $x \mapsto e^{rx}$ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y'' + 3y' - 4y = 0$. Donne ensuite une infinité de solutions de (E).

Indice 1
Écris l'équation caractéristique de (E).

Indice 2
Résous-la : son discriminant est un carré parfait.
Indice 3
Point délicat : la propriété des exponentielles est une équivalence. Cite ensuite la propriété des combinaisons.

Réponse
« L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + 3r - 4 = 0$, de discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$. Ses racines sont $\dfrac{-3+5}{2} = 1$ et $\dfrac{-3-5}{2} = -4$.

D'après la propriété des solutions exponentielles, $x \mapsto e^{rx}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, $r = 1$ ou $r = -4$.

Par combinaison, pour tous réels α et β, $x \mapsto \alpha\, e^{x} + \beta\, e^{-4x}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E). »

Les trois cas du discriminant

Quand la racine est double

Devine : Une solution inattendue

L'équation caractéristique de $y'' + 4y' + 4y = 0$ est $(r+2)^2 = 0$: une seule racine, -2. D'après toi, la fonction $x \mapsto x\, e^{-2x}$ est-elle une solution sur $\mathbb{R}$?

A. Non : seules les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{-2x}$ conviennent.
Faux.
Calcule : pour $f : x \mapsto x\, e^{-2x}$, on trouve $f'' + 4f' + 4f = 0$.

B. Oui : elle vérifie l'équation en tout réel x.
Juste.
Juste : après factorisation par e^{-2x}, il reste $(-4 + 4x) + 4(1 - 2x) + 4x = 0$.

C. Non : elle n'est pas dérivable deux fois en 0.
Faux.
Produit de deux fonctions dérivables autant de fois qu'on veut, elle l'est aussi.

D. Seulement sur $]0, +\infty[$, là où $x > 0$.
Faux.
Le calcul ne fait intervenir aucun signe : il vaut pour tout réel x.

Correction
Soit $f : x \mapsto x\, e^{-2x}$. Pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x)\, e^{-2x}$ et $f''(x) = (-4 + 4x)\, e^{-2x}$.

Donc $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x)$ est le produit de e^{-2x} par :

$$(-4 + 4x) + 4(1 - 2x) + 4x = 0.$$

Le facteur x fournit une seconde famille de solutions.

Au premier ordre, une seule constante k décrivait toutes les solutions. Au second ordre, il en faut **deux**, α et β.

La forme des solutions dépend du signe de Δ. On trouve deux exponentielles, ou une exponentielle multipliée par une fonction affine, ou une exponentielle multipliée par une oscillation.

Le théorème des trois cas

Théorème : Solutions de l'équation y″ + ay′ + by = 0

Soit a et b deux réels et $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$ sont exactement les fonctions suivantes, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Cas	Racines de l'équation caractéristique	Solutions sur $\mathbb{R}$
$\Delta > 0$	deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$x \mapsto \alpha\, e^{r_1 x} + \beta\, e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	une racine réelle double r_0	$x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{r_0 x}$
$\Delta < 0$	deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$, avec p et q réels et $q > 0$	$x \mapsto e^{px}\big(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)\big)$

Remarque

Ce résultat est admis.

Dans le cas $\Delta > 0$, tu sais déjà que les fonctions du tableau sont des solutions : les exponentielles $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ en sont, donc leurs combinaisons aussi.

Dans les deux autres cas, on vérifie de même, par le calcul, que chacune des deux fonctions de base est une solution, puis on applique la propriété des combinaisons. Les exemples guidés le font pour l'une d'elles.

Ce que tu admets, c'est qu'il n'y a **pas d'autre** solution.

Vérifie : Le cas des racines complexes

Quelles sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + 6y' + 13y = 0$?

A. $x \mapsto e^{-3x}\big(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)\big)$
Juste.
Juste : les racines sont $-3 \pm 2i$, donc $p = -3$ et $q = 2$.

B. $x \mapsto e^{2x}\big(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)\big)$
Faux.

p et q sont échangés, et le signe de p est perdu : $p = -3$ et $q = 2$.

C. $x \mapsto e^{-3x}\big(\alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)\big)$

Faux.

$4 = \sqrt{-\Delta}$: il faut encore diviser par 2, donc $q = 2$.

D. $x \mapsto \alpha\, e^{-3x} + \beta\, e^{2x}$

Faux.

Cette forme correspond à deux racines réelles. Ici $\Delta = -16 < 0$.

Correction

Le discriminant vaut $\Delta = 36 - 52 = -16$, et $\Delta < 0$. Les racines sont $\dfrac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$, donc $p = -3$ et $q = 2$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-3x}\big(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)\big)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

En clair. On lit p et q sur les racines, jamais sur Δ.

La méthode, cas par cas

Méthode : résoudre une équation y″ + ay′ + by = 0

1. **Ramener** l'équation à la forme $y'' + ay' + by = 0$ et écrire l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.
2. **Calculer** $\Delta = a^2 - 4b$, puis les racines : r_1 et r_2, ou r_0, ou $p \pm iq$ avec $q > 0$.
3. **Écrire** les solutions du cas correspondant, avec α et β réels quelconques.
4. **Conclure** : « les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions… ».

Exemple : Exemple guidé : deux racines réelles

Énoncé. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2y'' - 3y' - 2y = 0$.

Équation caractéristique. En divisant par 2, (E) s'écrit $y'' - \dfrac{3}{2}\,y' - y = 0$. L'équation $r^2 - \dfrac{3}{2}\,r - 1 = 0$ équivaut à $2r^2 - 3r - 2 = 0$, de discriminant $9 + 16 = 25$.

Racines. $r_1 = \dfrac{3+5}{4} = 2$ et $r_2 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{2x} + \beta\, e^{-\frac{x}{2}}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Exemple : Exemple guidé : une racine double

Énoncé. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Racine. Pour tout réel r, $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2$: $\Delta = 0$ et $r_0 = 3$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{3x}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Vérification pour $x \mapsto x\, e^{3x}$. Sa dérivée est $x \mapsto (1 + 3x)\, e^{3x}$, sa dérivée seconde $x \mapsto (6 + 9x)\, e^{3x}$. Après factorisation par e^{3x}, il reste, pour tout réel x :

$$(6 + 9x) - 6(1 + 3x) + 9x = 0.$$

Exemple : **Exemple guidé : deux racines complexes**

Énoncé. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Racines. $\Delta = 4 - 40 = -36$, et les racines sont $\dfrac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$: $p = -1$ et $q = 3$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-x}\big(\alpha \cos(3x) + \beta \sin(3x)\big)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Vérification pour $f : x \mapsto e^{-x}\cos(3x)$. Pour tout réel x, $f'(x) = -e^{-x}\big(\cos(3x) + 3\sin(3x)\big)$ et $f''(x) = e^{-x}\big(-8\cos(3x) + 6\sin(3x)\big)$.

Dans $f''(x) + 2f'(x) + 10f(x)$, le coefficient de $e^{-x}\cos(3x)$ vaut $-8 - 2 + 10 = 0$, et celui de $e^{-x}\sin(3x)$ vaut $6 - 6 = 0$.

Deux oublis à éviter

Attention : **le facteur x de la racine double**

✗ « Les solutions de $y'' - 6y' + 9y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\, e^{3x}$. »

✓ Avec une racine double $r_0 = 3$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{3x}$. La forme $\alpha\, e^{3x}$ n'en donne qu'une partie : elle oublie par exemple $x \mapsto x\, e^{3x}$, vérifiée plus haut.

Attention : **q se lit sur les racines**

✗ « Les solutions de $y'' + 2y' + 10y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto e^{-x}\big(\alpha \cos(6x) + \beta \sin(6x)\big)$. »

✓ Les racines sont $-1 \pm 3i$: $q = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = 3$, et non $\sqrt{-\Delta} = 6$. Le facteur e^{px} reste aussi : il ne disparaît que si $p = 0$.

Une oscillation qui s'éteint

Devine : À long terme

Soit $f : x \mapsto e^{-x}\cos(3x)$, une solution de l'exemple des racines complexes. D'après toi, comment se comporte $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

A. Elle tend vers $+\infty$, poussée par l'oscillation.

Faux.

$|f(x)| \leq e^{-x}$, qui tend vers 0 : f ne peut pas grandir.

B. Elle oscille sans fin, avec la même amplitude.

Faux.

Ce serait le cas sans le facteur e^{-x}, c'est-à-dire si $p = 0$.

C. Elle décroît vers 0 sans changer de signe.

Faux.

Le cosinus change de signe : f s'annule en chaque zéro de $x \mapsto \cos(3x)$.

D. Elle oscille, et ses oscillations s'écrasent vers 0.

Juste.

Juste : $|f(x)| \leq e^{-x}$, et e^{-x} tend vers 0.

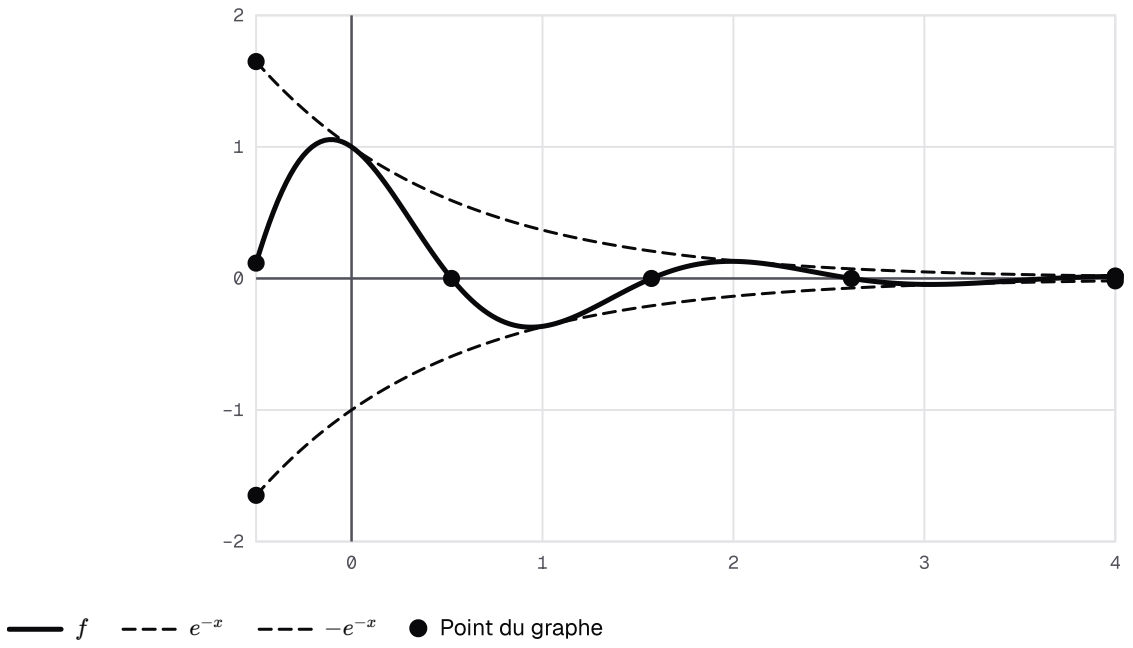
Correction

Pour tout réel x, $|\cos(3x)| \leq 1$ et $e^{-x} > 0$, donc :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La fonction s'annule pourtant une infinité de fois : en chaque réel $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{n\pi}{3}$, avec $n \in \mathbb{Z}$.



Une solution de y″ + 2y′ + 10y = 0, x ↦ e^(−x) cos(3x), comprise entre les courbes de x ↦ e^(−x) et de x ↦ −e^(−x). Les oscillations s'écrasent vers 0. Les points marqués sont trois zéros consécutifs, espacés de π/3.

À toi : Rédige une résolution avec racine double

Rédige la résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : 4y'' - 4y' + y = 0$.

Indice 1
Divise par 4 pour obtenir la forme $y'' + ay' + by = 0$.
Indice 2
Écris l'équation caractéristique et calcule son discriminant.
Indice 3
Point délicat : avec une racine double, n'oublie pas le facteur $\alpha x + \beta$.

Réponse
« En divisant par 4, (E) s'écrit $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$, de discriminant $\Delta = 1 - 1 = 0$. Elle a une racine double, $r_0 = \frac{1}{2}$.

Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha x + \beta)\, e^{\frac{x}{2}}$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$. »

Deux conditions initiales, une solution

Une condition ne suffit pas

Devine : Une seule condition

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + 9y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$. D'après toi, combien d'entre elles vérifient $f(0) = 2$?

A. Aucune de ces fonctions.
Faux.
$\alpha = 2$ convient, avec n'importe quel β.

B. Une seule fonction.
Faux.
La condition fixe $\alpha = 2$, mais elle ne dit rien de β.

C. Une infinité de fonctions.
Juste.
Juste : $\alpha = 2$, et β reste libre.

D. Exactement deux fonctions.
Faux.
La condition donne une seule équation, $\alpha = 2$: β prend n'importe quelle valeur.

Correction
En 0, $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, donc $f(0) = \alpha$. La condition donne $\alpha = 2$, et β reste libre : une infinité de solutions conviennent. Il faut une seconde condition, par exemple sur $f'(0)$.

Pense à une bille accrochée à un ressort. Sa position au départ ne suffit pas : il faut aussi sa vitesse au départ.

Ajoute donc la condition $f'(0) = 6$. Pour tout réel x, $f'(x) = -3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x)$, donc $f'(0) = 3\beta$ et $\beta = 2$.

Avec deux conditions, une seule fonction reste : $x \mapsto 2\cos(3x) + 2\sin(3x)$.

Deux conditions, une solution

Propriété : Solution vérifiant deux conditions initiales

Soit a et b deux réels, et x_0, y_0, y_1 trois réels.

L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Démonstration

Idée de la preuve. D'après F08, toute solution s'écrit $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, où (f_1, f_2) est le couple de fonctions du cas : $f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$; $f_1 : x \mapsto x\,e^{r_0 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_0 x}$; ou $f_1 : x \mapsto e^{px}\cos(qx)$ et $f_2 : x \mapsto e^{px}\sin(qx)$. Les deux conditions forment un système de deux équations linéaires d'inconnues α et β :

$$\alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = y_0, \qquad \alpha f_1'(x_0) + \beta f_2'(x_0) = y_1.$$

Il a une unique solution si son déterminant $D = f_1(x_0)\,f_2'(x_0) - f_2(x_0)\,f_1'(x_0)$ n'est pas nul. Si $\Delta > 0$, $D = (r_2 - r_1)\,e^{(r_1+r_2)x_0} \neq 0$. Deux solutions vérifiant les conditions ont alors les mêmes α et β, donc sont égales. Inversement, pour le couple (α, β) solution du système, la fonction $\alpha f_1 + \beta f_2$ est une solution (F08) qui vérifie les deux conditions : c'est l'existence. Étapes omises : le calcul de D dans les deux autres cas, qui donne $D = -e^{2r_0x_0}$ si $\Delta = 0$ et $D = q\,e^{2px_0}$ si $\Delta < 0$.

Remarque : une preuve esquissée

Cette preuve est une **esquisse** : elle part de la forme des solutions, qui est admise. L'unicité repose donc sur ce résultat admis.

Le calcul du déterminant dans les cas $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$ est laissé de côté ; tu peux le refaire comme exercice.

Vérifie : Le rôle du déterminant

Dans l'esquisse, les deux conditions donnent un système de deux équations d'inconnues α et β. Qu'est-ce qui garantit qu'il a une seule solution ?

A. Le fait que y_0 et y_1 ne soient pas nuls.
Faux.
y_0 et y_1 sont quelconques, même nuls : le système a toujours une seule solution.

B. Le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique.

Faux.

Le signe de Δ fixe la forme des solutions, mais le déterminant est non nul dans les trois cas.

C. Son déterminant $f_1(x_0)\,f_2'(x_0) - f_2(x_0)\,f_1'(x_0)$ est non nul.

Juste.

Juste : un système linéaire de déterminant non nul a une unique solution.

D. Le fait que la condition soit posée en $x_0 = 0$.

Faux.

x_0 est un réel quelconque : le déterminant ne s'annule pour aucun x_0.

Correction

Petit rappel. On considère un système d'inconnues α et β :

$$\begin{cases} m_1\alpha + n_1\beta = s_1 \\ m_2\alpha + n_2\beta = s_2 \end{cases}$$

Le nombre $m_1n_2 - m_2n_1$ s'appelle le **déterminant** du système. S'il n'est pas nul, on isole α et β par combinaison des équations, et le système a une seule solution.

Ici, $m_1 = f_1(x_0)$, $n_1 = f_2(x_0)$, $m_2 = f_1'(x_0)$ et $n_2 = f_2'(x_0)$. Le déterminant est donc :

$$\begin{aligned} D = {} & f_1(x_0)\,f_2'(x_0) \\ & - f_2(x_0)\,f_1'(x_0). \end{aligned}$$

Si $\Delta > 0$, avec $f_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$, on trouve $D = (r_2 - r_1)\,e^{(r_1+r_2)x_0}$, non nul car $r_1 \neq r_2$.

La méthode

Méthode : la solution qui vérifie deux conditions initiales

1. **Partir** des solutions de l'équation, avec α et β.
2. **Dériver** l'expression générale pour obtenir $f'(x)$.
3. **Écrire** le système donné par $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$, puis le résoudre.
4. **Conclure** par l'unicité : « la solution de (E) qui vérifie ces deux conditions est la fonction… ».

Exemple : Exemple guidé : deux racines réelles

Énoncé. Détermine la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' - y' - 2y = 0$ telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 5$.

Solutions. L'équation $r^2 - r - 2 = 0$ a pour discriminant 9 et pour racines 2 et -1. Donc f s'écrit $x \mapsto \alpha\,e^{2x} + \beta\,e^{-x}$, avec α et β réels, et pour tout réel x, $f'(x) = 2\alpha\,e^{2x} - \beta\,e^{-x}$.

Système. Les conditions donnent $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha - \beta = 5$. En ajoutant, $3\alpha = 6$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = -1$.

Conclusion. La solution cherchée est la fonction $x \mapsto 2\,e^{2x} - e^{-x}$.

L'oscillateur

Exemple : l'oscillateur y″ + ω²y = 0

Soit $\omega > 0$. L'équation caractéristique de $y'' + \omega^2 y = 0$ est $r^2 + \omega^2 = 0$, de racines $\pm i\omega$: $p = 0$ et $q = \omega$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Petit rappel de trigonométrie. Supposons $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On pose $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, et on choisit un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{\alpha}{A}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{\beta}{A}$. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\\ &\quad = A\cos(\omega x + \varphi).\end{aligned}$$

C'est une oscillation d'amplitude A et de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Pour la fonction $x \mapsto 2\cos(3x) + 2\sin(3x)$ trouvée plus haut, $A = 2\sqrt{2}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

Vérifie : Une période

Quelle est la période de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{2}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. $\dfrac{3}{2\pi}$

Faux.

C'est l'inverse de la période : on divise 2π par 3.

B. 2π

Faux.

C'est la période de $\cos$. Ici l'argument est $3x$: la courbe oscille trois fois plus vite.

C. $\dfrac{\pi}{4}$

Faux.

$-\dfrac{\pi}{4}$ est le déphasage φ : il décale la courbe sans changer sa période.

D. $\dfrac{2\pi}{3}$

Juste.

Juste : la période vaut $\dfrac{2\pi}{\omega}$, avec $\omega = 3$.

Correction

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\\ &\quad = 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi,\end{aligned}$$

et $\cos$ est 2π-périodique. Donc $\dfrac{2\pi}{3}$ est une période de cette fonction. C'est la plus petite, car $\cos$ n'a pas de période strictement plus petite que 2π.

L'amplitude vaut $2\sqrt{2}$: la bille s'écarte au plus de $2\sqrt{2}$ de sa position d'équilibre.

À toi : Rédige : deux conditions, racines complexes

Rédige la recherche de la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y'' + 4y' + 13y = 0$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$.

Indice 1
Calcule Δ et les racines $p \pm iq$ de l'équation caractéristique.
Indice 2
Écris $f(x)$ avec α et β, puis dérive ce produit.
Indice 3
Point délicat : en 0, $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Conclus par l'unicité.

Réponse
« Le discriminant vaut $\Delta = 16 - 52 = -36$; les racines sont $-2 \pm 3i$. Il existe donc deux réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = e^{-2x}\big(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\big)$. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= \big((3\beta - 2\alpha)\cos(3x) \\ &\quad - (3\alpha + 2\beta)\sin(3x)\big) \\ &\quad \times e^{-2x}. \end{aligned}$$

La condition $f(0) = 0$ donne $\alpha = 0$; puis $f'(0) = 3\beta - 2\alpha = 6$ donne $\beta = 2$.

Donc la solution de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$ est la fonction $x \mapsto 2\,e^{-2x}\sin(3x)$. Elle est unique. »

Se ramener aux équations de référence

Une solution particulière

Devine : Une solution affine

Parmi ces fonctions affines, laquelle est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = -y + 3x$?

A. $x \mapsto 3x - 3$
Juste.
Juste : sa dérivée vaut 3, et $-(3x - 3) + 3x = 3$.

B. $x \mapsto 3x + 3$
Faux.
Sa dérivée vaut 3, alors que $-(3x + 3) + 3x = -3$.

C. $x \mapsto 3x$

Faux.

Sa dérivée vaut 3, alors que $-3x + 3x = 0$.

D. $x \mapsto -3x + 3$

Faux.

Sa dérivée vaut -3, alors que $-(-3x + 3) + 3x = 6x - 3$.

Correction

Soit $g : x \mapsto 3x - 3$. Pour tout réel x, $g'(x) = 3$ et $-g(x) + 3x = -3x + 3 + 3x = 3$. Donc g est une solution sur $\mathbb{R}$.

Le terme $3x$ empêche d'appliquer directement le théorème sur $y' = ay + b$: il faut une autre idée.

Soit g une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y' = -y + 3x$, et f une autre solution. Pour tout réel x :

$$f'(x) - g'(x) = -\big(f(x) - g(x)\big).$$

Le terme $3x$ disparaît dans la différence. Donc $f - g$ est une solution de $y' = -y$, et il existe un réel k tel que, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = k\,e^{-x}$.

Pourquoi est-ce vrai pour toute équation de ce type, au premier comme au second ordre ? La preuve suivante répond, dans les deux sens.

Solution particulière et équation homogène

Propriété : Solution particulière et équation homogène associée

Soit a et b deux réels et h une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Une fonction f est **une solution sur** $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$ lorsque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = a\,f(x) + h(x)$ pour tout réel x. De même, f est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$ lorsque f et f' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) = h(x)$ pour tout réel x.

- Soit g une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$. Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + h(x)$ si, et seulement si, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$.
- Soit g une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$. Une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = h(x)$ si, et seulement si, $f - g$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + ay' + by = 0$.

Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $g + z$, où z décrit les solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration

Étape 1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z = f - g$. Pour tout réel x, comme $g'(x) - a\,g(x) - h(x) = 0$:

$$z'(x) - a\,z(x) = \big(f'(x) - a\,f(x) - h(x)\big) - \big(g'(x) - a\,g(x) - h(x)\big) = f'(x) - a\,f(x) - h(x).$$

Donc $z' = az$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $f' = af + h$ sur $\mathbb{R}$.

Étape 2. Au second ordre, soit f dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' dérivable, et $z = f - g$; z et z' sont dérivables, car g et g' le sont. Pour tout réel x, comme $g''(x) + a\,g'(x) + b\,g(x) - h(x) = 0$:

$$z''(x) + a\,z'(x) + b\,z(x) = \big(f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) - h(x)\big) - \big(g''(x) + a\,g'(x) + b\,g(x) - h(x)\big) = f''(x) + a\,f'(x) + b\,f(x) - h(x).$$

Donc z est solution de l'équation homogène si, et seulement si, f est solution de l'équation complète.

Étape 3. Ainsi f est solution de l'équation complète si, et seulement si, $f = g + z$, où z est une solution de l'équation homogène.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On **soustrait** une solution particulière g : on pose $z = f - g$.

Comme g vérifie l'équation complète, le second membre $h(x)$ disparaît de l'équation vérifiée par z.

Le calcul n'utilise que des opérations sur les dérivées, et il se lit dans les deux sens : c'est une équivalence.

Vérifie : Où disparaît le second membre ?

Dans l'étape 1 de la preuve, pourquoi le second membre $h(x)$ n'apparaît-il plus dans $z'(x) - a\,z(x)$?

A. Parce que h est la fonction nulle.

Faux.
h est une fonction quelconque définie sur $\mathbb{R}$: elle n'est pas nulle en général.

B. Parce que $g'(x) - a\,g(x) - h(x) = 0$ pour tout x.

Juste.
Juste : g est une solution de l'équation complète, ce qui compense le terme $h(x)$.

C. Parce que la dérivée de h est nulle.

Faux.
Aucune dérivée de h n'intervient : $h(x)$ apparaît sans être dérivé.

D. Parce que $f - g$ est une fonction constante.

Faux.
$z = f - g$ n'est pas constante en général : c'est une solution de $y' = ay$.

Correction
Pour tout réel x, on écrit $z'(x) - a\,z(x)$ comme une différence :

$$\big(f'(x) - a\,f(x) - h(x)\big) - \big(g'(x) - a\,g(x) - h(x)\big).$$

La seconde parenthèse est nulle, car g est une solution. Il reste $f'(x) - a\,f(x) - h(x)$.

Donc z est une solution de l'équation homogène si, et seulement si, f est une solution de l'équation complète.

Exemple : Contre-exemple : g doit être une solution

Pour $(E) : y' = -y + 3x$, prends $g : x \mapsto 3x$, qui n'est **pas** une solution : pour tout réel x, $g'(x) = 3$ alors que $-g(x) + 3x = 0$.

La fonction $f : x \mapsto 3x - 3$ est une solution de (E), vue plus haut. Pourtant $f - g$ est la constante -3, qui n'est pas une solution de $y' = -y$: sa dérivée est nulle, alors que $-(-3) = 3$.

En clair. On ne soustrait qu'une solution **vérifiée** de l'équation complète.

Avec une solution particulière

Méthode : se ramener à l'équation homogène

1. **Vérifier** que la fonction g proposée est une solution de l'équation complète (E) : dériver, remplacer, simplifier. Au second ordre, si le second membre est une constante c et $b \neq 0$, la constante $\dfrac{c}{b}$ convient.
2. **Rédiger l'équivalence** : f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est une solution de l'équation homogène (E_0).
3. **Résoudre** (E_0).
4. **Conclure** : les solutions de (E) sont les fonctions $g + z$, où z décrit les solutions de (E_0).
5. **Si une condition initiale est imposée** : f vérifie $f(x_0) = y_0$ si, et seulement si, $z = f - g$ vérifie $z(x_0) = y_0 - g(x_0)$ (et, au second ordre, $f'(x_0) = y_1$ si, et seulement si, $z'(x_0) = y_1 - g'(x_0)$). La propriété de la condition initiale (premier ordre) ou celle des deux conditions initiales (second ordre), appliquée à l'équation homogène, donne **une seule** fonction z, donc une seule fonction $f = g + z$.

Exemple : Exemple guidé : un second membre affine

Énoncé. On considère $(E) : y' = 2y - 4x$. Vérifie que $g : x \mapsto 2x + 1$ est une solution sur $\mathbb{R}$, puis résous (E).

Vérification. Pour tout réel x, $g'(x) = 2$ et $2g(x) - 4x = 4x + 2 - 4x = 2$.

Équivalence. Comme g est une solution de (E), f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est une solution de $(E_0) : y' = 2y$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x}$, k réel. Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x} + 2x + 1$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Exemple **: Exemple guidé : avec une condition initiale**

Énoncé. Pour $(E) : y' = 2y - 4x$, détermine la solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 3$.

Ramener. Avec $g : x \mapsto 2x + 1$, solution de (E), f est une solution de (E) telle que $f(0) = 3$ si, et seulement si, $z = f - g$ est une solution de $y' = 2y$ telle que $z(0) = 3 - g(0) = 2$.

Résoudre. Les solutions de $y' = 2y$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x}$, et $z(0) = k = 2$.

Conclure. D'après la propriété de la condition initiale, appliquée à $y' = 2y$, une seule fonction z convient : $x \mapsto 2\,e^{2x}$. Donc une seule fonction $f = g + z$ convient : pour tout réel x, $f(x) = 2\,e^{2x} + 2x + 1$.

Exemple **: Exemple guidé : un second membre constant**

Énoncé. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + y' - 6y = 12$.

Solution particulière. Une constante c convient si, et seulement si, $-6c = 12$, soit $c = -2$.

Équation homogène. $(E_0) : y'' + y' - 6y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 6 = 0$, de racines 2 et -3. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha\,e^{2x} + \beta\,e^{-3x}$.

Conclusion. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha\,e^{2x} + \beta\,e^{-3x} - 2$, où α et β décrivent $\mathbb{R}$.

Changer d'inconnue

Méthode **: changer d'inconnue**

1. **Poser** la nouvelle inconnue indiquée par l'énoncé, avec ses conditions : par exemple $z = \dfrac{1}{y}$ sur un intervalle où y ne s'annule pas.
2. **Établir l'équivalence dans les deux sens** : y est une solution de (E) si, et seulement si, z est une solution de (E').
3. **Résoudre** (E'), qui est une équation de référence.
4. **Revenir** à y, en vérifiant les conditions, puis conclure.

Exemple : Exemple guidé : poser z = 1/y

Énoncé. On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) : $y' = 3y - y^2$ qui sont strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Sens direct. Soit f une telle solution et $z = \dfrac{1}{f}$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement positive et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} z'(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \\ &= -\frac{3f(x) - f(x)^2}{f(x)^2} \\ &= -3z(x) + 1. \end{aligned}$$

Réciproque. Soit z une solution de (E') : $y' = -3y + 1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $f = \dfrac{1}{z}$. Alors f est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{z'(x)}{z(x)^2} \\ &= \frac{3z(x) - 1}{z(x)^2} \\ &= 3f(x) - f(x)^2. \end{aligned}$$

Exemple : Exemple guidé : revenir à y

Équivalence. Ainsi, f est une solution de (E) strictement positive si, et seulement si, $z = \dfrac{1}{f}$ est une solution de (E') strictement positive.

Résolution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E') sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-3x} + \dfrac{1}{3}$, k réel.

- Si $k \geq 0$, elles sont strictement positives.
- Si $k < 0$, $k\,e^{-3x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$: la fonction prend des valeurs négatives.

Conclusion. Les solutions de (E) strictement positives sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{3}{3k\,e^{-3x} + 1}$, où k décrit $[0, +\infty[$.

Attention : un changement d'inconnue se justifie dans les deux sens

X « Si f est une solution, alors $z = \dfrac{1}{f}$ vérifie $z' = -3z + 1$. Donc les solutions de (E) sont les inverses des solutions de (E'). »

✓ Le sens direct dit seulement où chercher. Pour obtenir **toutes** les solutions, il faut aussi la réciproque : l'inverse d'une solution de (E') est bien une solution de (E). Il faut enfin vérifier les conditions du changement : ici, z ne doit pas s'annuler.

Vérifie : Poser z = 1/y

On cherche les solutions strictement positives sur $\mathbb{R}$ de $y' = 2y - y^2$ et l'on pose $z = \dfrac{1}{y}$. Quelle équation z vérifie-t-elle ?

A. $z' = -2z + 1$

Juste.

Juste : $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{2y - y^2}{y^2} = -\dfrac{2}{y} + 1 = -2z + 1$.

B. $z' = 2z - 1$

Faux.

Tu as oublié le signe de la dérivée de $\dfrac{1}{y}$: $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

C. $z' = -2z - 1$

Faux.

Le terme $-\dfrac{-y^2}{y^2}$ vaut $+1$: le signe de la constante est positif.

D. $z' = -2y + 1$

Faux.

L'équation doit s'écrire avec z seul : $\dfrac{2y}{y^2} = \dfrac{2}{y} = 2z$.

Indice 1

Divise l'égalité $y' = 2y - y^2$ par $-y^2$, qui n'est pas nul.

Correction

Pour y dérivable et strictement positive, $z = \dfrac{1}{y}$ vérifie $z' = -2z + 1$. L'équivalence se lit dans les deux sens, par division par $-y^2 \neq 0$.

Les solutions de $z' = -2z + 1$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{-2x} + \dfrac{1}{2}$, k réel. Elles sont strictement positives sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $k \geq 0$.

Les solutions strictement positives de l'équation de départ sont donc les fonctions $x \mapsto \dfrac{2}{1 + 2k\,e^{-2x}}$, où $k \geq 0$.

À toi

À toi : Rédige : une solution particulière de forme donnée

On considère $(E) : y' = 2y + 3\,e^{-x}$. Rédige la recherche d'une solution g de la forme $x \mapsto c\,e^{-x}$, avec c réel, puis la résolution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Indice 1

Dérive $x \mapsto c\,e^{-x}$ et remplace dans (E).

Indice 2

Compare les coefficients de e^{-x} : tu obtiens une équation d'inconnue c.

Indice 3

Point délicat : rédige l'équivalence avec l'équation homogène $y' = 2y$, puis conclus.

Réponse

« Soit c un réel et $g : x \mapsto c\,e^{-x}$. Pour tout réel x, $g'(x) = -c\,e^{-x}$ et $2g(x) + 3\,e^{-x} = (2c+3)\,e^{-x}$.

Comme $e^{-x} \neq 0$, g est une solution si, et seulement si, $-c = 2c + 3$, soit $c = -1$.

Comme g est une solution de (E), f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est une solution de $y' = 2y$. Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{2x} - e^{-x}$, où k décrit $\mathbb{R}$. »

Remarque : Coin examen : se ramener à une équation connue

Les énoncés qui demandent de se ramener à une équation connue guident chaque étape. Les questions peuvent prendre cette forme :

- « Vérifier que la fonction g est une solution de (E) » ;
- « Montrer que f est une solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est une solution de (E_0) » ;
- « En déduire les solutions de (E) » ;
- « On pose $z = \dfrac{1}{y}$. Montrer que… » : l'équivalence se rédige dans les deux sens.

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir : le premier ordre

- Une solution sur un intervalle I est une fonction dérivable sur I qui vérifie l'équation en tout point de I.
- Sur un **intervalle**, les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto k\,e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ si $a \neq 0$, et $x \mapsto bx + k$ si $a = 0$.
- Une condition $f(x_0) = y_0$, avec $x_0 \in I$, désigne une solution unique.
- Pour modéliser : traduire la loi, résoudre, puis interpréter par une limite ou un logarithme.

À retenir : le second ordre et les équations qui s'y ramènent

- Les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ se lisent sur l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$: trois cas selon le signe de Δ, avec deux constantes α et β. Ce résultat est admis.
- Deux conditions $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$ désignent une solution unique.

- Avec une solution particulière g, les solutions de l'équation complète sont les fonctions $g + z$, où z décrit les solutions de l'équation homogène.
- Un changement d'inconnue se justifie dans les deux sens, avec ses conditions.

Le mot du prof. Tu sais maintenant résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction. Au premier ordre, tu sais aussi démontrer que tu as trouvé toutes les solutions.

Retiens surtout deux gestes : la fonction auxiliaire $x \mapsto f(x)\,e^{-ax}$, et la soustraction d'une solution particulière.

Au chapitre suivant, le calcul intégral réutilisera les primitives et l'exponentielle, avec les mêmes réflexes de rédaction : hypothèses nommées, équivalences justifiées, conclusion écrite.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Équations différentielles » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)