BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 2

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	3h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : trois heures. Les deux exercices et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements et la clarté de la rédaction entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 7 pts

Structures algébriques et espace vectoriel

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A. On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; on note O la matrice nulle. On pose :

$$J=\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } (a,b)\in\mathbb{R}^2, \quad M(a,b)=\begin{pmatrix}a+b&-2b\\b&a-b\end{pmatrix}.$$

On note $E=\{M(a,b)\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ et $E^*=E\setminus\{O\}$.

Partie B. On note $G=]-1,1[$ et, pour tous x et y de G, on pose $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

A.1 1 pts

Vérifier que $M(a,b)=aI+bJ$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$, que (I,J) en est une base, et donner $\dim E$.

A.2 0,75 pts

Calculer J^2. En déduire que, pour tous (a,b) et (c,d) de $\mathbb{R}^2$, $M(a,b)\times M(c,d)=M(ac-bd,ad+bc)$, puis que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi induite est commutative.

A.3 1 pts

On considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\to E$ définie par $\varphi(a+ib)=M(a,b)$, pour a et b réels. Montrer que φ est un homomorphisme injectif de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$ et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$. En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

INDICE

Utiliser la question A.2 pour le produit, et la liberté de (I,J) pour l'injectivité et pour l'image.

A.4 0,75 pts

Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

A.5 0,75 pts

Calculer $(I+J)^8$ et $(I+J)^{2026}$.

B.1 0,75 pts

Montrer que, pour tous x et y de G, $1+xy>0$, $1-x*y=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1+xy}$ et $1+x*y=\dfrac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$. En déduire que $*$ est une loi de composition interne sur G.

B.2 1 pts

Soit f la fonction définie sur G par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Montrer que f est une bijection de G sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 1}{e^y + 1}$. Montrer que, pour tous x et y de G, $f(x * y) = f(x) + f(y)$.

INDICE

Calculer $\dfrac{1 + x * y}{1 - x * y}$ à l'aide de la question B.1.

B.3 0,5 pts

En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif ; préciser son élément neutre et le symétrique d'un élément x de G.

B.4 0,5 pts

Résoudre dans G l'équation $x * x = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 4,25 pts

Calcul des probabilités

Une urne U contient quatre boules rouges et deux boules blanches ; une urne V contient une boule rouge et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de U et on la place dans V ; on tire ensuite au hasard et simultanément deux boules de V. On considère les événements :

- R : « la boule transférée de U dans V est rouge » ;
- pour $k \in \{0, 1, 2\}$, N_k : « on tire exactement k boules rouges de V ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées de V.

1.a 0,75 pts

Calculer $P(R)$ et, pour $k \in \{0, 1, 2\}$, les probabilités conditionnelles $P_R(N_k)$ et $P_{\overline{R}}(N_k)$. Représenter la situation par un arbre pondéré.

1.b 0,75 pts

En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de probabilité de X.

2 0,5 pts

On a tiré deux boules blanches de V. Quelle est la probabilité que la boule transférée ait été rouge ?

3 0,5 pts

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

4.a 0,75 pts

On répète cinq fois, de façon indépendante, l'expérience précédente, en remettant à chaque fois les deux urnes dans leur composition initiale. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'expériences au cours desquelles on tire au moins une boule rouge de V. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis calculer $P(Y = 2)$, $E(Y)$ et $V(Y)$.

4.b 0,5 pts

Calculer la probabilité de tirer au moins une boule rouge de V au cours d'au moins une des cinq expériences.

5 0,5 pts

On répète maintenant l'expérience n fois ($n \geq 1$), de façon indépendante et dans les mêmes conditions. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité de tirer au moins une boule rouge de V au cours d'au moins une des n expériences est supérieure ou égale à $0{,}999$.

Problème 8,75 pts

Fonction et suite définies par une intégrale

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{t}$, et la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

On ne cherchera pas à calculer une primitive de f. On note $(\mathcal{C}_F)$ la courbe de F dans un repère orthogonal.

A.1 0,5 pts

Justifier que $F(x)$ est bien défini pour tout $x>0$ et que $F(x)>0$.

A.2 1 pts

Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$, $F'(x)=\dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$. En déduire le sens de variation de F.

A.3 1 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $e^{-2x}\ln 2\le F(x)\le e^{-x}\ln 2$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim_{x\to 0^+}F(x)$.

A.4.a 0,5 pts

Montrer que, pour tout $t\ge 0$, $1-t\le e^{-t}\le 1-t+\dfrac{t^2}{2}$.

A.4.b 1 pts

On prolonge F en posant $F(0)=\ln 2$. Montrer que, pour tout $x>0$, $F(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{x}^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$, puis que $-x\le F(x)-\ln 2\le -x+\dfrac{3x^2}{4}$. En déduire que F est continue et dérivable à droite en 0, et préciser $F'_d(0)$.

INDICE

Écrire $\ln 2$ comme une intégrale sur $[x,2x]$, puis diviser par t l'encadrement de la question A.4.a.

A.5 1,25 pts

Dresser le tableau de variations de F sur $[0,+\infty[$. Préciser la position de $(\mathcal{C}_F)$ par rapport à (T), puis tracer $(\mathcal{C}_F)$ et (T) (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées). On donne $\ln 2\approx 0{,}69$ et $F(1)\approx 0{,}17$.

A.6 1,25 pts

Établir, par une intégration par parties, l'égalité $F(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}-\dfrac{e^{-2x}}{2x}-\displaystyle\int_{x}^{2x}\frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$, valable pour tout $x>0$. En déduire $\lim_{x\to+\infty}x\,e^{x}\,F(x)$.

INDICE

Dériver $t\mapsto\frac{1}{t}$ et intégrer $t\mapsto e^{-t}$; majorer ensuite $\frac{1}{t^2}$ par $\frac{1}{x^2}$ sur $[x,2x]$.

B.1 0,5 pts

Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

B.2 0,75 pts

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{1+\frac{k-1}{n}}^{1+\frac{k}{n}} f(t)\,dt \leq \dfrac{1}{n} f\left(1 + \dfrac{k-1}{n}\right)$. En déduire que $S_n \leq F(1) \leq S_n + \dfrac{1}{n}\left(e^{-1} - \dfrac{e^{-2}}{2}\right)$.

INDICE

Utiliser la décroissance de f sur l'intervalle $\left[1 + \frac{k-1}{n}, 1 + \frac{k}{n}\right]$, puis la relation de Chasles.

B.3 1 pts

En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ et montrer que $\dfrac{\ln 2}{e^2} \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \dfrac{\ln 2}{e}$. Déterminer ensuite un entier n tel que $0 \leq F(1) - S_n \leq 10^{-2}$.

SOURCES

BURHAN