BURHAN

Devoir surveillé n° 2, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-2-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	3h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : trois heures. Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements et la clarté de la rédaction entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 3 pts

Fonctions primitives

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1.a — 0,75 pts

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}$.

1.b — 0,75 pts

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

2 — 0,75 pts

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$. Déterminer la primitive H de h sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} H(x)$.

3.a — 0,25 pts

Soit r la fonction définie sur $I =]-1,+\infty[$ par $r(x) = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $r(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

3.b — 0,5 pts

En déduire la primitive R de r sur I qui s'annule en 0.

Exercice 2 — 10 pts

Fonction logarithme et fonction réciproque

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \ln x + \sqrt{1 + (\ln x)^2} \quad \text{pour } x > 0.$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et Δ la droite d'équation $y = x$. On rappelle que $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

1 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sqrt{1 + (\ln x)^2} - \ln x > 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\ln x)^2} - \ln x}$. En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, puis que f est continue à droite en 0.

2 — 0,75 pts

Montrer que $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Majorer $\sqrt{1 + t^2}$ par $1 + |t|$ pour encadrer $x\sqrt{1 + (\ln x)^2}$.

3 — 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x \geq 1$, comparer $\sqrt{1 + (\ln x)^2}$ et $1 + \ln x$.

4.a — 1 pts

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}$. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

4.b — 0,5 pts

Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1.

5.a — 0,75 pts

Soit k la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $k(x) = x - \dfrac{1}{x} - 2\ln x$. Étudier les variations de k et en déduire le signe de $k(x)$ pour $x > 0$.

5.b 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{-x\,k(x)}{\sqrt{1+(\ln x)^2} + x - \ln x}$. En déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de Δ.

INDICE

Écrire $f(x) - x = \sqrt{1+t^2} - (x - t)$ avec $t = \ln x$ et multiplier par l'expression conjuguée.

5.c 1,25 pts

Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{1 - \left(1 + (\ln x)^2\right) f(x)}{x^2\,(1+(\ln x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et en déduire que A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

INDICE

Poser $t = \ln x$ et $s = \sqrt{1+t^2}$; montrer que $\left(\frac{t}{s}\right)' = \frac{1}{x\,s^3}$, puis étudier le signe de $1 - s^2 f(x)$ en distinguant $t > 0$ et $-1 < t < 0$.

6 1 pts

Calculer $f(e)$ et $f\left(\frac{1}{e}\right)$, puis tracer $(\mathcal{C}_f)$ et (T) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2 cm, en plaçant les points O, A et $B(e, f(e))$.

7.a 0,5 pts

Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

7.b 0,75 pts

Déterminer $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$.

INDICE

Pour $y > 0$, poser $t = \ln x$, isoler la racine carrée, puis raisonner par analyse et synthèse.

7.c 0,75 pts

Montrer que f^{-1} est dérivable en $1 + \sqrt{2}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(1 + \sqrt{2}\right)$. Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0 et interpréter graphiquement.

7.d 0,5 pts

Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de f^{-1} dans le repère de la question 6.

Exercice 3 — 7 pts

Fonctions exponentielles et suite définie implicitement

Partie A. Elle établit deux inégalités utilisées dans la partie B.

Partie B. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x - n\,e^{-x}$, et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe dans un repère orthonormé et Δ la droite d'équation $y = x$.

A.1 — 0,75 pts

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - x - 1$. Étudier les variations de φ et en déduire que, pour tout réel x, $e^x \geq 1 + x$, l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.

A.2 — 0,25 pts

En déduire que, pour tout réel $y > 0$, $\ln y \leq y - 1$, l'égalité n'ayant lieu que pour $y = 1$.

B.1 — 1 pts

Calculer $\lim_{x \to -\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x)$. Montrer que Δ est asymptote à $(\mathcal{C}_n)$ au voisinage de $+\infty$ et préciser leur position relative. Interpréter la limite de $\dfrac{f_n(x)}{x}$ en $-\infty$.

B.2 — 1 pts

Étudier les variations de f_n. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle, notée u_n, puis que $u_n > 0$ et $u_n\,e^{u_n} = n$.

B.3 — 0,75 pts

Justifier que $(\mathcal{C}_2)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_1)$, puis tracer $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et Δ dans un même repère. On donne $u_1 \approx 0{,}57$ et $u_2 \approx 0{,}85$.

B.4 — 0,75 pts

Exprimer $f_{n+1}(u_n)$ en fonction de u_n et de n. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

B.5 — 1 pts

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n + \ln u_n = \ln n$. En utilisant la partie A, en déduire que $u_n > \dfrac{1 + \ln n}{2}$, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

INDICE

Appliquer $\ln$ à l'égalité $u_n\,e^{u_n} = n$, puis majorer $\ln u_n$ grâce à la question A.2.

B.6 — 0,5 pts

Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $u_n < \ln n$.

B.7

1 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, $\ln n - \ln(\ln n) < u_n < \ln n$. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\ln n}$ et $\lim_{n\to+\infty} (u_n - \ln n + \ln(\ln n))$.

INDICE

Utiliser l'égalité $u_n = \ln n - \ln u_n$ de la question B.5 et la croissance de $\ln$.

SOURCES

BURHAN