BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 2

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-2

Semestre	Durée	Barème
Semestre 2	3h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : trois heures. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. Toute réponse doit être justifiée ; la rigueur des raisonnements et la clarté de la rédaction entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 4 pts

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

On rappelle que 31 est un nombre premier. Le but de l'exercice est de résoudre, pour un entier a donné, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(\mathcal{F}_a) : \quad x^7 \equiv a \pmod{31}.$$

1.a — 0,75 pts

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 7x - 30y = 1$. Vérifier que le couple $(13, 3)$ est une solution de (E), puis résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

1.b — 0,5 pts

En utilisant la question 1.a, montrer que 13 est l'unique entier d de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 29\}$ tel que $7d \equiv 1 \pmod{30}$.

2.a — 0,5 pts

Dans cette question et la suivante, a est un entier non divisible par 31, et x est une solution de $(\mathcal{F}_a)$. Montrer que 31 ne divise pas x, puis que $x^{30} \equiv 1 \pmod{31}$.

2.b — 0,75 pts

En utilisant la question 1.b, montrer que $x \equiv a^{13} \pmod{31}$.

INDICE

Écrire x^{91} de deux façons : $x^{91} = x \times (x^{30})^3$ et $x^{91} = (x^7)^{13}$.

2.c — 0,5 pts

Réciproquement, montrer que tout entier x tel que $x \equiv a^{13} \pmod{31}$ est solution de $(\mathcal{F}_a)$. Conclure.

3 — 1 pts

Application : résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^7 \equiv 3 \pmod{31}$, puis vérifier le résultat par un calcul direct.

Exercice 2 6 pts

Nombres complexes et géométrie

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1.a 0,5 pts

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - \left(\sqrt{3} + 3i\right) z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$. Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = \left(\sqrt{3} - i\right)^2$.

1.b 0,75 pts

Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. On note a la solution dont la partie réelle est non nulle et b l'autre solution.

2.a 0,5 pts

Écrire a et b sous forme exponentielle, puis montrer que $b = e^{i\frac{\pi}{3}}\, a$.

2.b 0,5 pts

Soient A et B les points d'affixes respectives a et b. En déduire la nature du triangle OAB.

2.c 0,5 pts

Calculer a^6, puis déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que a^n soit un nombre réel.

3.a 0,75 pts

Soit T la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2i$. Montrer que T est une rotation dont on déterminera l'angle et l'affixe ω du centre Ω. Écrire ω sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

INDICE

Chercher le point invariant.

3.b 0,5 pts

Vérifier que $T(O) = B$, puis calculer l'affixe z_E du point $E = T(A)$.

3.c 0,5 pts

Montrer que la transformation $T \circ T \circ T$ est la symétrie centrale de centre Ω, et donner son écriture complexe.

4.a 0,75 pts

Calculer $\dfrac{z_E - a}{0 - a}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OAE et la valeur du rapport $\dfrac{AE}{AO}$.

4.b 0,75 pts

Montrer que les points O, A, E et Ω sont cocycliques, et préciser le centre et le rayon du cercle qui les contient.

INDICE

Calculer aussi $\dfrac{z_E - \omega}{0 - \omega}$ et chercher les angles droits sur $[OE]$.

Exercice 3 3 pts

Équations différentielles

On considère les équations différentielles, d'inconnue une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : \ y'' + 2y' + 5y = 0 \qquad \text{et} \qquad (F) : \ y'' + 2y' + 5y = 10.$$

1.a 0,5 pts

Résoudre l'équation différentielle (E).

1.b 0,5 pts

Déterminer la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 2$.

2.a 0,5 pts

Déterminer la fonction constante k solution de (F), puis montrer qu'une fonction φ est solution de (F) si et seulement si $\varphi - k$ est solution de (E).

2.b 0,75 pts

En déduire la solution φ de (F) qui vérifie $\varphi(0) = 3$ et $\varphi'(0) = 0$.

3 0,75 pts

On note $(\mathcal{C}_g)$ la courbe de g et (Γ) celle de la fonction $x \mapsto e^{-x}$. Montrer que $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de (Γ), déterminer les abscisses des points communs à $(\mathcal{C}_g)$ et (Γ) sur $[0, 2\pi]$, et montrer qu'en chacun de ces points les deux courbes ont la même tangente.

Exercice 4 7 pts

Calcul intégral

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2\ \mathrm{cm}$.

A.1 0,75 pts

À l'aide du changement de variable $x = \sin t$, montrer que $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$, puis, en linéarisant $\cos^2 t$, calculer I_0.

A.2 0,5 pts

Calculer I_1.

A.3 0,75 pts

Soient $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ les courbes des fonctions $f_0 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $f_1 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1]$. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$, puis calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre ces deux courbes et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

B.1 0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$, puis que la suite (I_n) est strictement décroissante.

B.2 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (I_n).

B.3 1 pts

En intégrant par parties, établir l'égalité suivante pour tout entier $n \geq 2$:

$$(n+2)\,I_n = (n-1)\,I_{n-2}.$$

INDICE

Écrire $x^n\sqrt{1-x^2} = x^{n-1} \times x\sqrt{1-x^2}$ et utiliser la primitive de la question A.2 ; remarquer que $(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} - x^2\sqrt{1-x^2}$.

B.4 0,5 pts

Calculer I_2 et I_3.

B.5 0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+4} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

B.6 0,75 pts

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = n(n+1)(n+2)\, I_n\, I_{n-1}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est constante et donner sa valeur.

B.7 1 pts

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \leq I_n^2 \leq \frac{\pi}{2n(n+1)(n+2)},$$

puis que $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

SOURCES

BURHAN