BURHAN

Devoir surveillé n° 1, semestre 1

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/devoirs/devoir-1-semestre-1

Semestre	Durée	Barème
Semestre 1	3h	20 pts (barème indicatif BURHAN)

Durée : trois heures. L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé. L'exercice 3 utilise des résultats de l'exercice 2, qui peuvent être admis. Toute réponse doit être justifiée ; la clarté de la rédaction et la rigueur des raisonnements entrent dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 — 5 pts

Arctangente, valeurs intermédiaires et fonction réciproque

On considère la fonction h définie sur $I = [0; +\infty[$ par $h(x) = \arctan(\sqrt{x})$.

1 — 0,5 pts

Montrer que h est continue et strictement croissante sur I, puis calculer $\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

2 — 0,75 pts

Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera, et déterminer $h^{-1}(y)$ pour tout $y \in J$. Calculer ensuite $h\left(\frac{1}{3}\right)$ et $h(1)$.

3 — 1 pts

On considère la fonction k définie sur I par $k(x) = h(x) + x - 1$. Montrer que l'équation $k(x) = 0$ admet une unique solution α dans I, et que $\frac{1}{3} < \alpha < 1$.

4 — 0,5 pts

Vérifier que $\alpha = \tan^2(1 - \alpha)$.

5 — 0,75 pts

On donne $k\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}351$ et $k\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}115$. Effectuer deux étapes de la méthode de dichotomie pour la fonction k à partir de l'intervalle $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, puis en déduire que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

6 — 0,75 pts

Montrer que, pour tout réel $x > 0$: $\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

7 — 0,75 pts

En déduire $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\pi}{2} - h(x)\right)$.

INDICE

Appliquer la question 6 à $\sqrt{x}$, poser $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, puis écrire $t = \tan\theta$.

Exercice 2 9 pts

Étude d'une fonction et de sa réciproque

Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 0,5 pts

Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis calculer $f(-2)$ et $f(0)$.

2 0,75 pts

Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ et interpréter graphiquement ce résultat.

3.a 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et interpréter graphiquement le résultat.

3.b 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x < -2$: $\dfrac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = 1 - \sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et interpréter graphiquement le résultat.

4.a 0,5 pts

Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$ et que, pour tout x de cet ensemble : $f'(x) = 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

4.b 0,75 pts

Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty; -2]$ et $[0; +\infty[$.

5.a 0,75 pts

Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$, et étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ) sur $[0; +\infty[$.

5.b 0,5 pts

Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite d'équation $y = -1$ sur $]-\infty; -2]$.

6.a 0,5 pts

Montrer que, pour tout x de $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$: $f''(x) = -\dfrac{1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$. En déduire la concavité de $(\mathcal{C}_f)$ et le sens de variation de f' sur $]0; +\infty[$.

6.b

0,75 pts

À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que, pour tout $x \geq 1$: $2(x-1) \leq f(x) - 1 - \sqrt{3} \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)(x-1)$.

INDICE

Appliquer le théorème entre 1 et x, puis encadrer $f'(c)$ avec les questions 4.b et 6.a.

7

1 pts

Construire $(\mathcal{C}_f)$, ses asymptotes et ses demi-tangentes. On donne $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ et $\sqrt{8} \approx 2{,}83$.

8.a

0,75 pts

Soit φ la restriction de f à $[0;+\infty[$. Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera, et que, pour tout $x \in J$: $\varphi^{-1}(x) = \frac{x^2}{2(x+1)}$.

8.b

0,5 pts

Étudier la dérivabilité de φ^{-1} à droite en 0, puis calculer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(1+\sqrt{3}\right)$.

8.c

0,5 pts

Construire, dans un même repère, la courbe de φ et celle de φ^{-1}.

Exercice 3 — 6 pts

Suite récurrente et accroissements finis

On reprend la fonction f de l'exercice 2 et on considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - 2x = \sqrt{x^2+2x} - x$. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1.a — 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$: $g(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}$, puis calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

1.b — 0,5 pts

Montrer que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

2 — 0,5 pts

Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'équation $x = g(x)$, puis étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[0;+\infty[$.

3 — 0,75 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{3} \leq u_n \leq 1$.

4 — 0,75 pts

Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5 — 0,75 pts

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6.a — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in \left[\frac{2}{3};1\right]$: $0 < g'(x) \leq \frac{1}{4}$.

6.b — 0,75 pts

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_{n+1} - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \frac{2}{3}\right|$.

6.c — 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, retrouver la limite de (u_n), puis déterminer le plus petit entier n pour lequel cette majoration assure que u_n est une valeur approchée de $\frac{2}{3}$ à 10^{-3} près.

INDICE

Raisonner par récurrence en utilisant la question 6.b.

SOURCES

BURHAN