BURHAN

Résumé : Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/resume

Chapitre	Semestre
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Semestre 1

Dérivabilité en un point, à droite, à gauche

> **À retenir**
>
> Être dérivable en a, c'est une affaire de limite : celle du taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a. Cette limite doit être un **réel**. Limite infinie, absence de limite ou limites latérales différentes : pas de dérivabilité en a.

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, défini pour $x \in I$ et $x \neq a$, admet une limite **finie** quand x tend vers a. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \end{aligned}$$

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel, et soit $\delta > 0$.

- Si f est définie sur $[a, a+\delta[$, f est **dérivable à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur $]a-\delta, a]$, f est **dérivable à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilités latérales

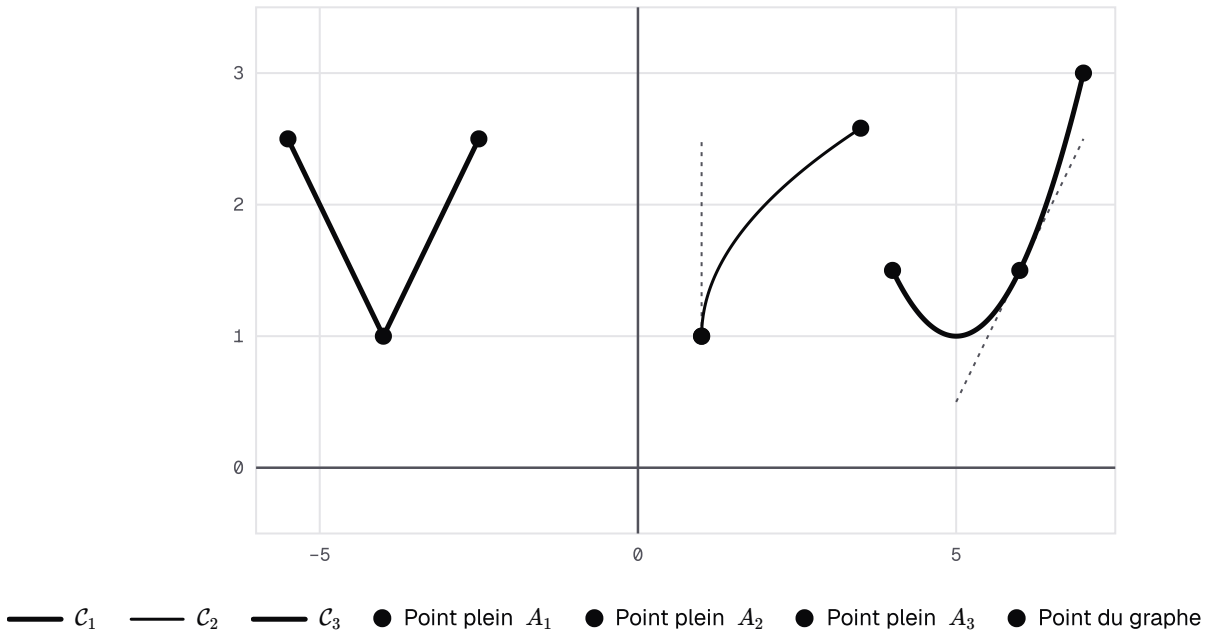
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. On a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Définition : Demi-tangentes, demi-tangente verticale, point anguleux

Soit f une fonction continue en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère et A le point de coordonnées $(a, f(a))$.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'équation $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$ avec $x \geq a$. On définit de même la **demi-tangente à gauche**, avec $f'_g(a)$ et $x \leq a$.
- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**. On définit de même une demi-tangente verticale à gauche. Si $\mathcal{C}_f$ admet en A une demi-tangente verticale à droite et une à gauche, on dit qu'elle admet en A une **tangente verticale**, d'équation $x = a$.
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que A est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.



Trois situations en un point : un coin en A1, une demi-tangente verticale en A2, une vraie tangente en A3.

Méthode : dérivabilité en une borne et interprétation

1. Repère la valeur $f(a)$: si f est prolongée en a, c'est la valeur imposée par l'énoncé.
2. Écris le taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pour $x > a$ (ou $x < a$) et simplifie-le avant tout passage à la limite.
3. Calcule sa limite quand x tend vers a^+ (ou a^-).
4. Conclus par une phrase complète : « f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$ », ou « f n'est pas dérivable à droite en a ».

5. Interprète : demi-tangente de pente ℓ ; horizontale si $\ell = 0$; verticale si la limite vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque

Cette question, suivie de son interprétation graphique, figure dans 10 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). Elle y vaut de 0,5 à 0,75 point.

Continuité, tangente, approximation affine

Propriété : Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. De même, si f est définie sur un intervalle J qui contient a et dont a est l'extrémité gauche, et si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a ; et de même à gauche.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a.

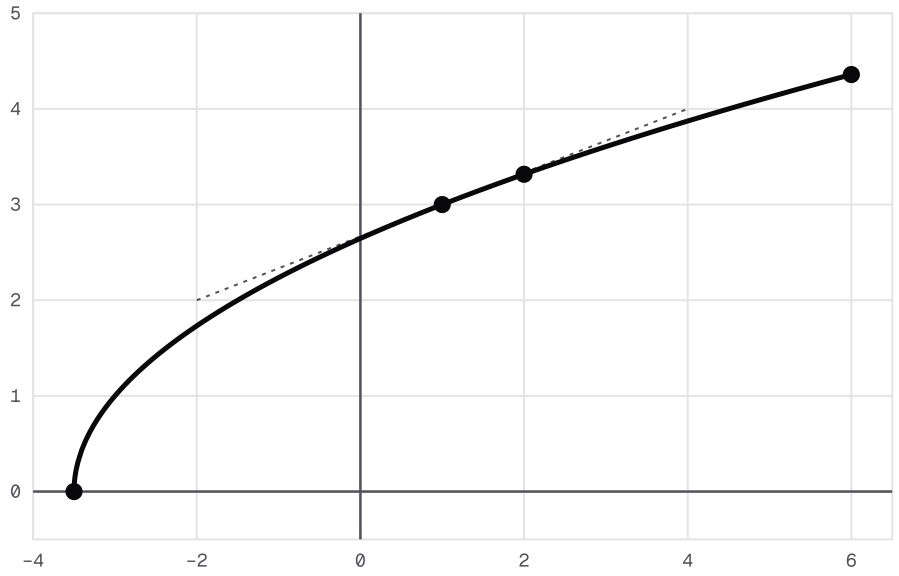
Attention : Continue ne veut pas dire dérivable

La continuité ne prouve pas la dérivabilité. Exemple : $x \mapsto |x-2|$ est continue en 2, mais ses taux à gauche et à droite tendent vers -1 et 1. Pour réfuter une dérivabilité, calcule ces deux limites.

Propriété : Tangente et approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, dérivable en $a \in I$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$; son équation est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Il existe une fonction ε telle que, pour tout réel h tel que $a + h \in I$, $f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + h\,\varepsilon(h)$, et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. La fonction $h \mapsto f(a) + f'(a)\,h$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a ; on écrit aussi, au point a, $\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$, et en tout point x, $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.



Approximation affine : pour un point M voisin de A, la hauteur lue sur la tangente est très proche de celle lue sur la courbe.

Méthode : tangente et valeur approchée

Pour la tangente en a, calcule $f(a)$ puis $f'(a)$, et écris $y = f'(a)(x-a)+f(a)$. Pour estimer $f(a+h)$ avec h petit, remplace-le par $f(a)+f'(a)\,h$.

Mini-exemple avec la racine carrée en $a=100$: $\sqrt{100{,}6} \approx 10 + \dfrac{0{,}6}{20} = 10{,}03$.

Calculer une dérivée en la justifiant

Définition : Fonction dérivée, dérivée seconde

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I ; en une borne de I qui appartient à I, on demande la dérivabilité à droite (borne gauche) ou à gauche (borne droite). La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

Si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I ; la dérivée de f' est la **dérivée seconde** de f, notée f''.

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
λ (constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	tout intervalle sur lequel $\cos x\neq 0$

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

- $u+v$, $\lambda\,u$ et $u\,v$ sont dérivables sur I, et $(u+v)'=u'+v'$, $(\lambda\,u)'=\lambda\,u'$, $(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$.
- Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Remarque

Les dérivées usuelles et les règles opératoires sont des rappels de première : dans ce chapitre, elles sont admises.

Théorème : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J, telles que $u(x)\in J$ pour tout $x\in I$.

Alors $v\circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x\in I$:

$$(v\circ u)'(x)=v'\big(u(x)\big)\times u'(x).$$

Propriété : Dérivées composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et a, b deux réels.

- Pour tout entier $n\neq 0$: $(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'$ sur I ; si $n<0$, on suppose que u ne s'annule pas sur I.
- Si $u(x)>0$ pour tout $x\in I$: $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I.
- $(\cos u)'=-u'\sin u$ et $(\sin u)'=u'\cos u$ sur I.

- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto a\,f'(ax+b)$.

Méthode : « montrer que f'(x) = … »

1. Justifie la dérivabilité **avant** de dériver, avec la condition utile : « u est dérivable sur I et $u(x) > 0$, donc $\sqrt{u}$ est dérivable sur I ».
2. Nomme les morceaux : $u(x) = \ldots$, $v(x) = \ldots$, et calcule u', v'.
3. Applique la règle, puis simplifie jusqu'à la forme demandée.
4. Si l'énoncé impose le résultat, termine par la phrase qui l'affirme.

Attention : Ne pas oublier la dérivée intérieure

Une composée se dérive avec sa dérivée intérieure : $(\cos u)' = -u' \sin u$. Ainsi la dérivée de $x \mapsto \cos(5x)$ est $x \mapsto -5\sin(5x)$, et non $x \mapsto -\sin(5x)$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(b) &= \frac{1}{f'(a)} \\ &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.\end{aligned}$$

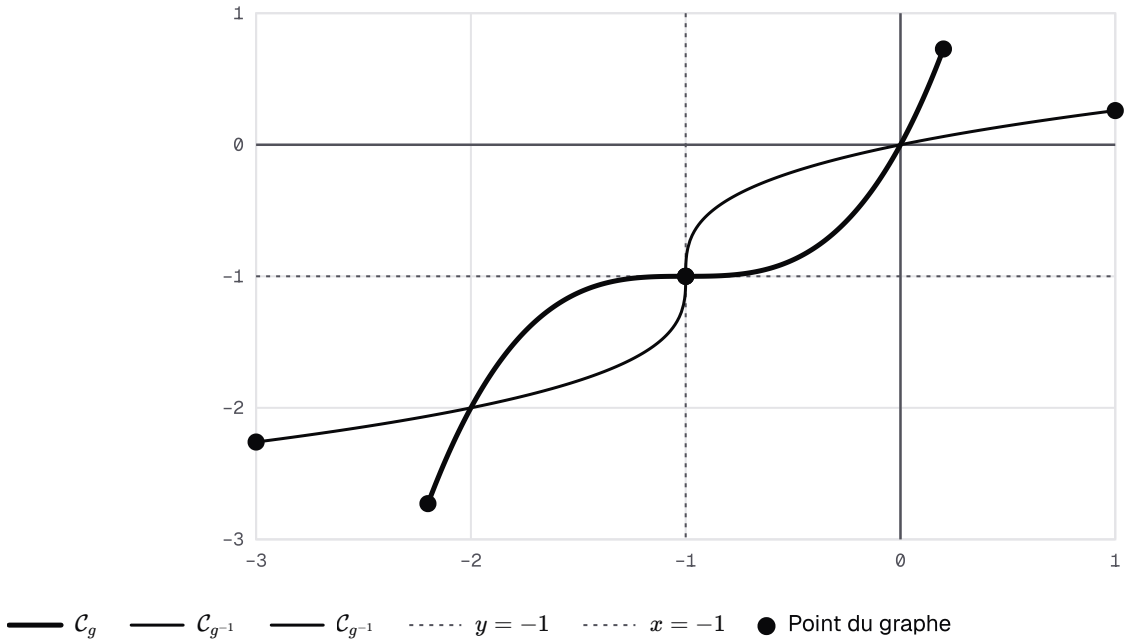
Si a est une borne de I, ces dérivabilités s'entendent à droite ou à gauche.

- Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Propriété : Dérivée nulle et tangente verticale de la réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$, et $b = f(a)$.

Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b (ni à droite ni à gauche si b est une borne de $f(I)$; « dérivable en a » s'entend alors à droite ou à gauche) : la courbe de f^{-1} admet au point (b, a) une **tangente verticale**, ou une demi-tangente verticale si b est une borne de $f(I)$.



Exemple g(x) = (x + 1)³ - 1 : tangente horizontale de g au point (-1, -1), tangente verticale de sa réciproque au point symétrique, ici le même.

Méthode : dérivée de la réciproque en un point

1. Cite le cadre : f continue et strictement monotone sur l'intervalle I.
2. Cherche l'antécédent a de b : résous $f(a) = b$, souvent en essayant une valeur entière.
3. Vérifie que f est dérivable en a, calcule $f'(a)$ et vérifie que $f'(a) \neq 0$.
4. Conclus : f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
5. Si $f'(a) = 0$: pas de dérivabilité en b, mais une tangente verticale au point (b, a), ou une demi-tangente verticale si b est une borne de $f(I)$.

Attention : Diviser par f'(a), jamais par f'(b)

Le dénominateur est $f'(a)$, où a est l'antécédent de b : jamais $f'(b)$. Et f^{-1} n'est pas l'inverse $\dfrac{1}{f}$: ne confonds pas $\left(f^{-1}\right)'(b)$ avec $-\dfrac{f'(b)}{f(b)^2}$.

Racine n-ième, puissances rationnelles, arctangente

Propriété : Dérivée de la racine n-ième

Soit n un entier, $n \geq 2$.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.

- Si u est dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0 : sa courbe admet en l'origine une demi-tangente verticale.

Propriété : Dérivée d'une puissance rationnelle

Soit r un rationnel non nul.

La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $(x^r)' = r\,x^{r-1}$.

Si u est dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors u^r est dérivable sur I et $(u^r)' = r\,u^{r-1}\,u'$.

Propriété : Dérivée de la fonction arctangente

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si u est dérivable sur un intervalle I, alors $\arctan u$ est dérivable sur I et $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Puissance entière (n entier non nul ; u ne s'annule pas si n < 0)

$$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$$

Racine carrée, si $u > 0$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Racine n-ième, si $u > 0$

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$$

Puissance rationnelle, si $u > 0$

$$(u^r)' = r\,u^{r-1}\,u'$$

Arctangente, sans condition sur le signe

$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Affine à l'intérieur (f dérivable sur $\mathbb{R}$)

$$\big(f(ax+b)\big)' = a\,f'(ax+b)$$

Attention : Racines et puissances : u strictement positive

Les formules de $\sqrt[n]{u}$ et de u^r exigent $u(x) > 0$. Là où u s'annule, reviens au taux d'accroissement : une demi-tangente verticale y apparaît souvent.

Exemple

La fonction affine $x \mapsto 3x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $x \mapsto \arctan(3x - 1)$ l'est aussi, de dérivée $x \mapsto \dfrac{3}{1 + (3x - 1)^2}$. Cette dérivée est strictement positive : la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de Rolle

> **À retenir**
>
> Rolle est un théorème d'**existence** : il affirme qu'un réel c existe, sans le fournir. Trois hypothèses, donc trois vérifications écrites.

Propriété : Extremum en un point intérieur et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'est pas une borne de I. On suppose que f admet un **extremum local** en a : il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$ et, pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leq f(a)$ (maximum local), ou bien $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de cet intervalle (minimum local).

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème : Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction telle que :

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est dérivable sur $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Méthode : rédiger une application de Rolle

1. Nomme la fonction et le segment : « Soit g définie sur $[a, b]$ par… ».
2. Une ligne par hypothèse : continuité sur $[a, b]$; dérivabilité sur $]a, b[$; calcul de $g(a)$ et de $g(b)$, puis égalité.
3. Cite : « D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ ».
4. Traduis $g'(c) = 0$ dans les termes de la question.

Attention : Rolle exige la continuité sur le segment

La continuité se vérifie sur le segment **fermé**, bornes comprises. Sur $[0, 1]$, prends

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On a $g(0) = g(1)$ et, pour tout $x \in]0, 1[$, $g'(x) = 1$: sans continuité en 1, aucun c n'existe.

Méthode : Rolle sur une fonction auxiliaire

Pour prouver qu'une équation $E(x) = 0$ a une solution dans $]a, b[$, cherche une fonction g continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, dont la dérivée est E, avec $g(a) = g(b)$. Rolle donne alors le réel cherché.

Le théorème des accroissements finis

Théorème : Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

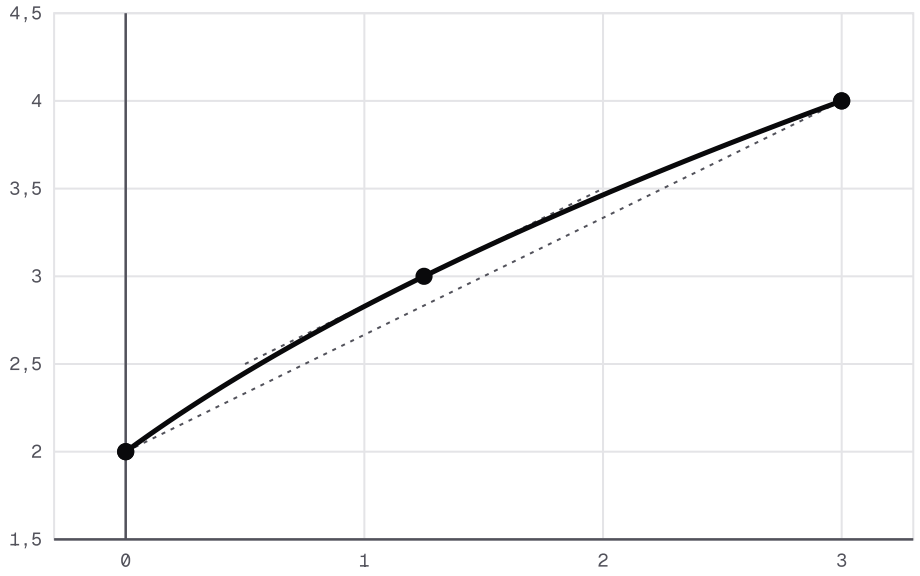
$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a),$$

c'est-à-dire

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

À retenir

Lecture graphique : il existe au moins un point d'abscisse $c \in]a, b[$ où la tangente est parallèle à la corde qui joint $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$.



Lecture du théorème : entre A et B, il existe un point C de la courbe où la tangente a la même pente que la corde (AB).

Méthode : encadrer avec le TAF

1. Vérifie les deux hypothèses : continuité sur $[a, b]$, dérivabilité sur $]a, b[$.
2. Écris : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.
3. Encadre $f'(c)$ en partant de $a < c < b$, souvent grâce à la monotonie de f'.
4. Multiplie par $b - a > 0$: l'encadrement passe à $f(b) - f(a)$.

Quand f' est explicite, on peut parfois trouver c en résolvant $f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dans $]a, b[$; le théorème garantit seulement qu'une solution existe.

Exemple

Racine carrée sur $[100, 101]$: il existe $c \in]100, 101[$ tel que $\sqrt{101} - 10 = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$. Or $10 < \sqrt{c} < 11$, donc $\dfrac{1}{22} < \sqrt{101} - 10 < \dfrac{1}{20}$.

Attention : Le théorème ne donne pas c

Le théorème ne donne ni la valeur de c ni son unicité : n'écris jamais « $c = \ldots$ » avec une valeur choisie. En général, seul l'encadrement $a < c < b$ sert.

Signe de la dérivée, extremums, inégalités

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Remarque

La règle « dérivée positive, fonction croissante » (F20) ne vaut que sur un **intervalle**. La dérivée de $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$; pourtant cette fonction vaut 1 en -1 et -1 en 1. Elle n'est donc pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.

Propriété : Extremum et changement de signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On suppose que f' s'annule en a **en changeant de signe** : il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$, avec $f' \geq 0$ sur $]a-\delta, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+\delta[$, ou l'inverse.

Alors f admet un extremum local en a : un maximum dans le premier cas, un minimum dans le second.

La réciproque de F17 est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour que f admette un extremum local en a.

Attention : Une dérivée nulle ne suffit pas pour un extremum

Il faut un changement de signe de f' en a. Contre-exemple : la dérivée de $x \mapsto x^3$ s'annule en 0 sans changer de signe, et 0 n'est pas un extremum.

Méthode : une inégalité par l'étude d'une fonction

Objectif : $A(x) \leq B(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Pose la différence $h(x) = B(x) - A(x)$ sur I.
2. Justifie la dérivabilité de h, calcule $h'(x)$, étudie son signe.
3. Dresse le tableau de variations de h et lis son minimum m sur I.
4. Si $m \geq 0$, alors $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, donc $A(x) \leq B(x)$. Si $m = 0$, l'égalité a lieu exactement là où ce minimum est atteint.

L'inégalité des accroissements finis

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Première forme. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$\begin{aligned} m\,(b-a) &\leq f(b) - f(a) \\ &\leq M\,(b-a). \end{aligned}$$

Seconde forme. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel M tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$, alors, pour tous x et y de I :

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|.$$

Méthode : majorer avec l'IAF

1. Fixe l'intervalle I et vérifie que f y est dérivable.
2. Trouve M avec $|f'(x)| \leq M$ **pour tout** $x \in I$: variations de f', ou majoration directe.
3. Écris : « D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous x, y de I, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ ».
4. Remplace y par un point où f est connue.

Exemple

Pour tout réel t, la dérivée de $\cos$ en t vaut $-\sin t$, de valeur absolue au plus 1. Donc $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ pour tous réels x, y. Avec $y = 0$: $|\cos x - 1| \leq |x|$.

À retenir

Point important. Les accroissements finis peuvent servir sans être nommés, cachés dans un encadrement ou une majoration. Repère les écritures $f(b) - f(a)$ et $|f(x) - f(y)|$: elles les appellent.

Suites récurrentes contractantes

Propriété : Suite récurrente contractante

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, et k un réel tel que $0 \leq k < 1$ et $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in I$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha|$$

et

$$|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|,$$

et la suite (u_n) converge vers α.

Méthode : la chaîne de la contraction

1. **Stabilité** : montre $f(I) \subset I$, souvent par les variations de f.
2. **Point fixe** : justifie l'existence de $\alpha \in I$ avec $f(\alpha) = \alpha$, ou prends celui de l'énoncé.
3. **Majoration** : $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, avec $0 \leq k < 1$.
4. **Récurrence** : $u_n \in I$ pour tout n.
5. **IAF** entre u_n et α : $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k\,|u_n - \alpha|$.
6. **Récurrence** : $|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$.
7. **Comparaison** : k^n tend vers 0 car $0 \leq k < 1$; donc (u_n) converge vers α.

Attention : Une majoration sur tout l'intervalle stable

La majoration $|f'(x)| \leq k$ doit valoir sur **tout** l'intervalle stable I, pas seulement près de α. Et l'inégalité $k < 1$ est stricte : avec $k = 1$, la chaîne ne prouve aucune convergence.

Remarque

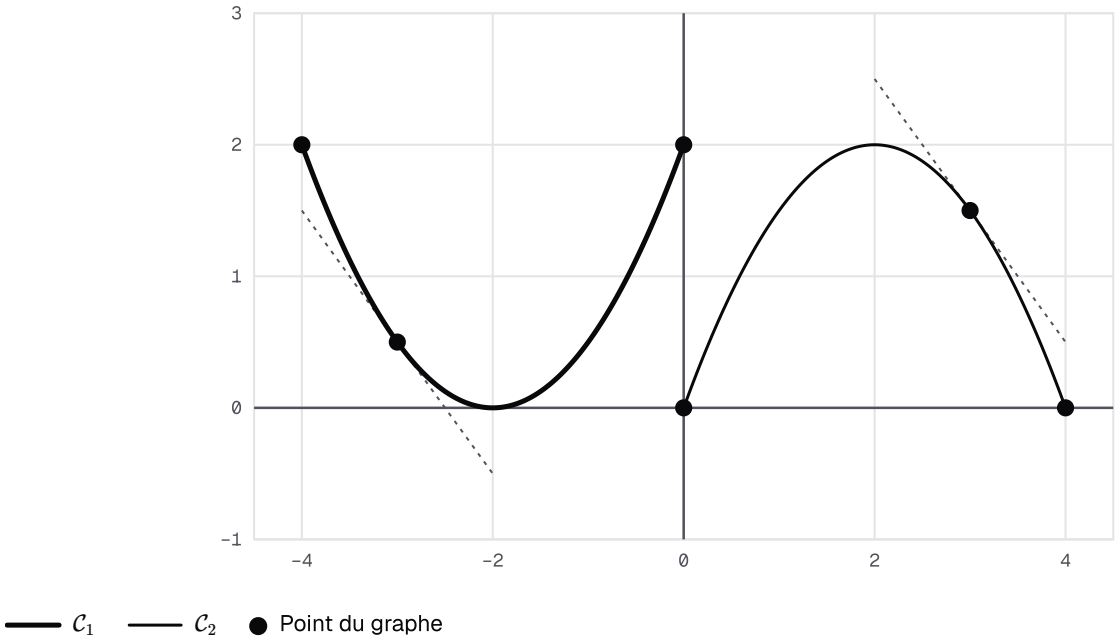
Cette chaîne est demandée dans 7 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), découpée en questions de 0,5 à 0,75 point. Chaque maillon rapporte : rédige-les tous.

Dérivée seconde, convexité, inflexion

Définition : Convexité, concavité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est au-dessus de chacune de ses tangentes aux points d'abscisse dans I : pour tous a et x de I, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.
- $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I lorsqu'elle est au-dessous de chacune de ces tangentes : pour tous a et x de I , $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$.



À gauche, une courbe convexe passe au-dessus de sa tangente ; à droite, une courbe concave passe au-dessous.

Théorème : Dérivée seconde et convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

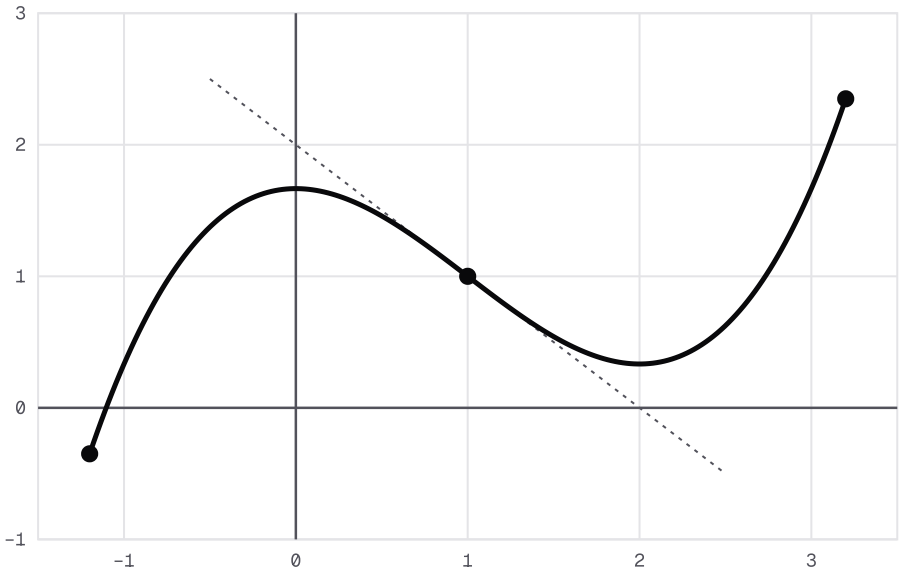
- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Propriété : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\mathcal{C}_f$ change de concavité en A : il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]a - \delta, a]$ et concave sur $[a, a + \delta[$, ou l'inverse.

Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. En revanche, $f''(a) = 0$ ne suffit pas.



Au point d'inflexion A, la tangente traverse la courbe, qui passe de concave à convexe.

Méthode : concavité et points d'inflexion

1. Calcule $f''(x)$ là où f est deux fois dérivable.
2. Étudie le signe de f'' dans un tableau.
3. Lis la concavité avec le critère de la dérivée seconde (F25) : $f'' \geq 0$ donne une courbe convexe, $f'' \leq 0$ une courbe concave.
4. Retiens comme points d'inflexion les seuls points où f'' s'annule **en changeant de signe**.

À retenir aussi : une courbe convexe est au-dessus de ses tangentes, d'où une inégalité sans autre calcul.

Attention : Une dérivée seconde nulle ne suffit pas pour une inflexion

Contre-exemple : pour $x \mapsto x^4$, la dérivée seconde $x \mapsto 12x^2$ s'annule en 0 mais reste positive. La courbe est convexe sur $\mathbb{R}$, sans inflexion en 0.

Remarque

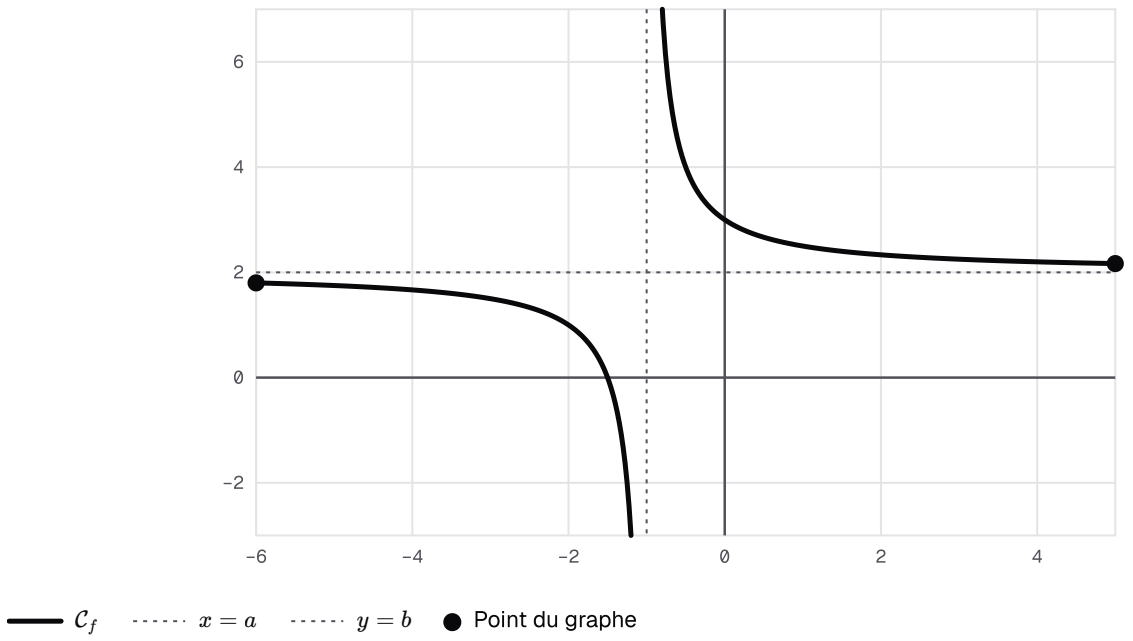
Concavité, convexité ou point d'inflexion sont demandés dans 6 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025).

Asymptotes et branches paraboliques

Définition : Asymptotes verticale et horizontale

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ avec b réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On définit de même une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.



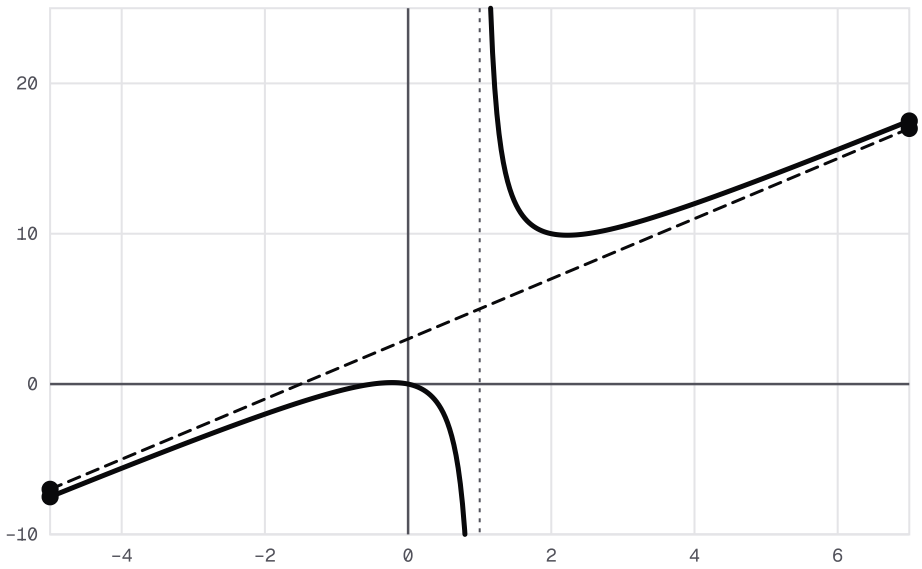
Une asymptote verticale x = a et une asymptote horizontale y = b, ici avec a = -1 et b = 2.

Propriété : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, et a, b deux réels avec $a \neq 0$.

La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0$.

C'est le cas si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big) = b$. On définit et on caractérise de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.



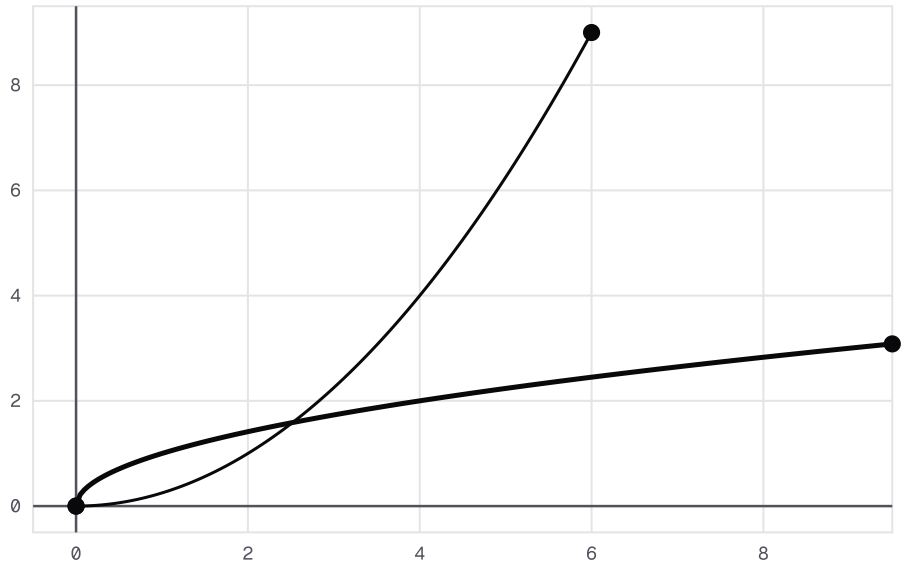
Asymptote oblique : l'écart vertical entre la courbe et la droite y = 2x + 3 tend vers 0.

Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ avec a réel non nul, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.



Deux branches paraboliques : celle de √x s'aplatit vers l'axe des abscisses, celle de x²/4 se redresse vers l'axe des ordonnées.

Méthode : étudier une branche infinie

Démarche en $+\infty$; elle est identique en $-\infty$.

1. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Si elle vaut un réel b : asymptote $y = b$, l'étude s'arrête.
2. Sinon, calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
3. Limite infinie : branche parabolique de direction (Oy). Limite nulle : direction (Ox).
4. Limite réelle $a \neq 0$: calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big)$. Un réel b donne l'asymptote $y = ax + b$; une limite infinie, la direction $y = ax$.

Exemple

Pour une fraction rationnelle, la division donne souvent tout d'un coup. Si $f(x) = ax + b + r(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = 0$, la droite $y = ax + b$ est asymptote, et le signe de $r(x)$ donne la position.

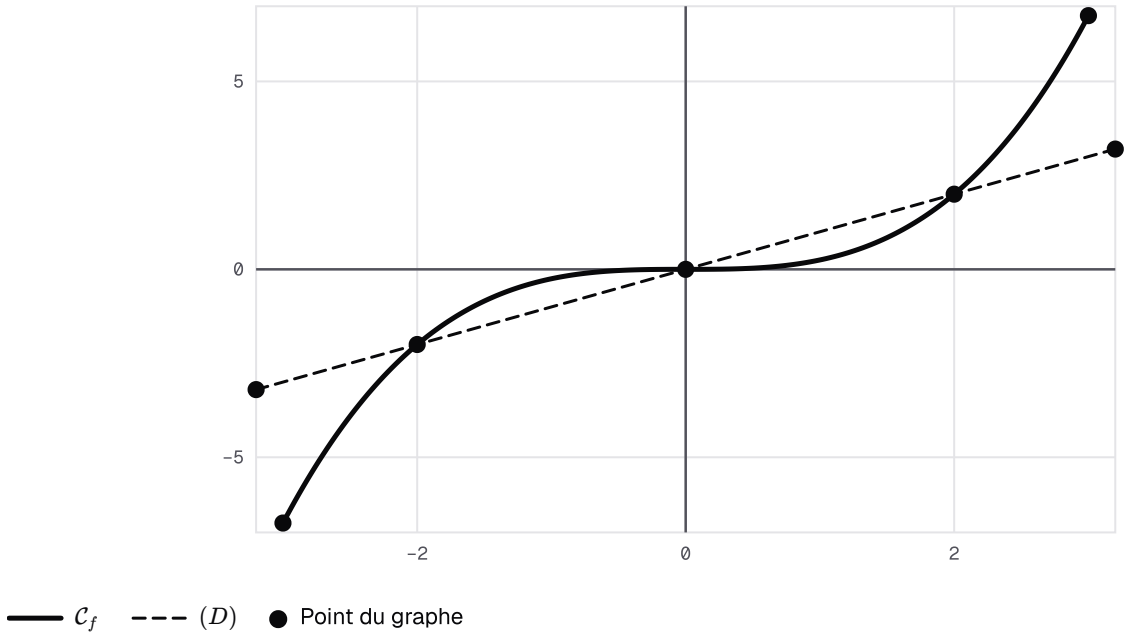
Position relative et plan d'étude

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y = ax + b$.

- $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax + b) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et **strictement au-dessus** lorsque cette différence est strictement positive.

- $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax+b) \leq 0$ pour tout $x \in I$, et **strictement au-dessous** lorsque cette différence est strictement négative.
- Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (D) ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = ax + b$.



Courbe de x³/4 et droite (D) : y = x, qui se coupent en trois points ; entre eux, la courbe passe tour à tour au-dessus puis au-dessous.

Méthode : position d'une courbe et d'une droite

Pour situer $\mathcal{C}_f$ et la droite (D) : $y = ax + b$, étudie le signe de $d(x) = f(x) - (ax+b)$.

Signe positif : courbe au-dessus. Signe négatif : au-dessous. Zéro : point commun.

Définition : Éléments de symétrie et périodicité

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et a, b, T trois réels avec $T > 0$.

- La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ lorsque, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a, b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ lorsque, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.
- f est **périodique de période** T lorsque, pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$; on étudie alors f sur un intervalle de longueur T.

Méthode : plan d'étude d'une fonction

1. Ensemble de définition ; parité, centre, axe ou période pour réduire l'intervalle d'étude.
2. Limites aux bornes et branches infinies.
3. Continuité et dérivabilité, surtout aux bornes fermées.
4. Dérivée, signe, tableau de variations.
5. Concavité, si l'énoncé la demande.
6. Position par rapport aux asymptotes ou à une tangente.
7. Points remarquables, puis tracé dans un repère orthonormé.

> **À retenir**
>
> Le tableau de variations apparaît dans 16 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), un tracé de courbe dans 14 des 16 sujets consultés. Suis le plan d'étude dans l'ordre : chaque étape prépare la suivante.

Réflexes d'examen

> **À retenir : Les hypothèses, une à une**
>
> Avant chaque théorème, une ligne par hypothèse.
>
> - Rolle : continuité sur $[a, b]$, dérivabilité sur $]a, b[$, $g(a) = g(b)$.
> - TAF : les deux premières.
> - IAF : dérivabilité sur I, majoration de $|f'|$ sur tout I.
> - Réciproque : continuité et stricte monotonie sur I, dérivabilité en a, $f'(a) \neq 0$.

> **Remarque**
>
> Rolle ou le TAF sont nommés dans 4 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), pour 0,5 point par question. Leur rédaction est courte : hypothèses, théorème cité, conclusion.

Rédige chaque « montrer que » comme une preuve : « Soit… », « Montrons que… », « D'après le théorème des accroissements finis… ». Termine par la phrase qui répond à la question. Donne les valeurs exactes avant toute valeur approchée : la calculatrice est interdite à l'examen.