BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6,5 pts

Une fonction irrationnelle étudiée de bout en bout

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-4)\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On donne $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ et $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.

1. a) 0,75 pts

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} - 1 + \frac{t}{2}.$$

Étudie le sens de variation de g, puis montre que, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{2}.$$

INDICE

Dérive $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ comme l'inverse de $t \mapsto \sqrt{1+t}$, puis compare $(1+t)\sqrt{1+t}$ à 1. Pense ensuite à $g(0)$.

1. b) 0,5 pts

Déduis-en que, pour tout $x > 0$:

$$\sqrt{\frac{x}{x+2}} \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

INDICE

Écris $\dfrac{x}{x+2}$ sous la forme $\dfrac{1}{1+t}$, avec un réel $t \geq 0$ bien choisi.

2. a) 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Cherche d'abord la limite de $\dfrac{x}{x+2}$ en $+\infty$.

2. b) 1 pts

Montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - x\big) = -5$. Déduis-en que la droite (D) d'équation $y = x - 5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Écris $f(x) - x$ comme la somme de $x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} - 1\right)$ et de $-4\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$. Le premier terme est une forme indéterminée : pose $r = \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$ et utilise l'expression conjuguée $1 + r$.

3. 0,75 pts

Montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Sépare les cas $0 \leq x \leq 4$ et $x > 4$. Dans le premier, compare $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ à 1 et surveille le sens de l'inégalité quand tu multiplies par $x - 4$. Dans le second, la question 1. b) sert.

4. 0,75 pts

Étudie la dérivabilité de f à droite en 0, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Vérifie d'abord la continuité à droite en 0. Forme ensuite le taux d'accroissement en 0 pour $x > 0$, fais entrer $\dfrac{1}{x}$ sous la racine et surveille le signe du dénominateur.

5. a) 1 pts

Montre que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}}.$$

INDICE

Pose $u(x) = \dfrac{x}{x+2}$: u est dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$, et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Réduis ensuite au dénominateur $\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}$.

5. b) 0,5 pts

Dresse le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Repère les facteurs de $f'(x)$ de signe constant sur $]0, +\infty[$. Comme f n'est pas dérivable en 0, utilise la continuité à droite (question 4) pour inclure 0 dans l'intervalle de décroissance.

6. a) 0,5 pts

Écris une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 4.

INDICE

Utilise la formule de 5. a) en $x = 4$, puis rends rationnel le dénominateur obtenu.

6. b) 0,5 pts

Trace (D), (T) et $\mathcal{C}_f$ dans le repère. Indique les éléments que ta figure doit faire apparaître.

INDICE

Rassemble tes résultats : les points O, $A(1, -\sqrt{3})$ et $B(4, 0)$, la demi-tangente en O, la tangente en B, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 2 6 pts

Approcher la solution d'une équation du troisième degré par une suite

On considère les fonctions g et φ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x - 6$$

et

$$\varphi(x) = \frac{6}{x^2 + 3},$$

ainsi que l'intervalle $I = \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

On donne $0{,}023 < \left(\frac{3}{4}\right)^{13} < 0{,}024$ et $0{,}017 < \left(\frac{3}{4}\right)^{14} < 0{,}018$.

1. a) 0,5 pts

Étudie les variations de g sur $\mathbb{R}$ et calcule ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Dérive g et regarde le signe de $3x^2 + 3$. Pour les limites, factorise $g(x)$ par x^3.

1. b) 0,75 pts

Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, puis que $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

INDICE

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: quelle est l'image de $\mathbb{R}$? Pour l'encadrement, calcule $g(1)$ et $g\left(\frac{3}{2}\right)$.

1. c) 0,25 pts

Montre que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

INDICE

Mets α en facteur dans $\alpha^3 + 3\alpha$.

2. a) 0,75 pts

Étudie le sens de variation de φ sur I, puis montre que $\varphi(I) \subset I$.

INDICE

Calcule $\varphi'(x)$ et son signe pour $x > 0$. Une fonction continue et monotone sur un segment l'envoie sur le segment de ses valeurs aux bornes : calcule $\varphi(1)$ et $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$.

2. b) 0,75 pts

Montre que, pour tout $x \in I$:

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}.$$

INDICE

Étudie sur I les variations de $x \mapsto |\varphi'(x)|$, écrite sans valeur absolue. La majoration doit valoir sur tout I.

3. a) 0,5 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

L'hérédité repose sur la question 2. a) : si u_n est dans I, où se trouve $\varphi(u_n)$?

3. b) 0,75 pts

Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|.$$

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis à φ sur I, entre u_n et α : vérifie que ces deux réels sont dans I, puis utilise $\varphi(\alpha) = \alpha$.

3. c) 0,75 pts

Déduis-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

INDICE

Raisonne par récurrence. Pour l'initialisation, majore $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1$ grâce à 1. b).

3. d) 0,5 pts

Déduis-en que la suite (u_n) converge et précise sa limite.

INDICE

Quelle est la limite de $\left(\frac{3}{4}\right)^n$? Encadre ensuite $|u_n - \alpha|$ entre 0 et une suite de limite nulle.

3. e) 0,5 pts

À l'aide des valeurs données en introduction, détermine un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

INDICE

Cherche un rang pour lequel la majoration de 3. c) passe sous 10^{-2}, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}02$.

Exercice 3 5,75 pts

Réciproque d'une fonction contenant une arctangente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + \arctan(x - 1).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

On rappelle que, pour tout réel t, $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan t < \dfrac{\pi}{2}$.

1. a) 0,5 pts

Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 + 3}{1 + (x-1)^2}.$$

INDICE

Utilise la dérivée de $\arctan u$ avec $u(x) = x - 1$, puis réduis au même dénominateur.

1. b) 0,5 pts

Montre que, pour tout réel x :

$$2x - \frac{\pi}{2} < f(x) < 2x + \frac{\pi}{2}.$$

Déduis-en les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Applique le rappel de l'introduction au réel $x - 1$. Pour les limites, chaque côté de l'encadrement ne sert qu'en une borne.

1. c) 0,75 pts

Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

INDICE

Trois arguments sont attendus : la continuité, la stricte monotonie (signe de f') et l'image de $\mathbb{R}$, donnée par les limites.

2. a) 0,5 pts

Calcule $f(1)$. Montre que f^{-1} est dérivable en 2 et calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

INDICE

Utilise le théorème de dérivation de la réciproque en $b = f(a)$: vérifie d'abord que $f'(a) \neq 0$ pour le bon antécédent a.

2. b) 0,5 pts

Écris une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2.

INDICE

Le point de contact est $\left(2, f^{-1}(2)\right)$; le coefficient directeur est $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

3. a) 0,75 pts

Montre que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel y :

$$\frac{1}{3} \leq \left(f^{-1}\right)'(y) < \frac{1}{2}.$$

Précise pour quel réel y on a $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}$.

INDICE

Encadre d'abord $f'(x) = 2 + \frac{1}{1+(x-1)^2}$. Utilise ensuite $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$: passer à l'inverse renverse l'ordre.

3. b) 0,25 pts

Montre que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution réelle, notée β, et que $\beta = f^{-1}(3)$.

INDICE

Utilise la bijection obtenue en 1. c).

3. c) 0,75 pts

Grâce au théorème des accroissements finis, utilisé pour f^{-1} entre 2 et 3, prouve que :

$$\frac{4}{3} < \beta < \frac{3}{2}.$$

INDICE

Vérifie les hypothèses sur $[2,3]$, puis écris $f^{-1}(3) - f^{-1}(2) = \left(f^{-1}\right)'(c)$ avec $c \in]2,3[$. Pour l'inégalité stricte à gauche, rappelle-toi où l'égalité de 3. a) a lieu.

4. a) 0,75 pts

On pose $t = \beta - 1$. Vérifie que $2t + \arctan t = 1$ et que $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$. À l'aide du théorème des accroissements finis utilisé pour $\arctan$ entre 0 et t, prouve ensuite que :

$$\frac{4t}{5} < \arctan t < t.$$

INDICE

Le théorème fournit un réel $c \in]0,t[$; encadre c^2 grâce à l'encadrement de t, sans perdre les inégalités strictes.

4. b) 0,5 pts

Déduis-en que $\frac{4}{3} < \beta < \frac{19}{14}$, et compare la précision de cet encadrement à celle de 3. c).

INDICE

Remplace $\arctan t$ par chacune de ses deux bornes dans $2t + \arctan t = 1$; chaque remplacement donne une seule des deux inégalités.

Exercice 4 7 pts

Concavité et accroissements finis pour situer une courbe trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On rappelle que $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

1. a) 0,5 pts

Justifie que f est dérivable sur $[0, \pi]$ et montre que, pour tout $x \in [0, \pi]$:

$$f'(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1.$$

INDICE

La fonction $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est de la forme $\sin u$, avec u affine : $(\sin u)' = u'\cos u$.

1. b) 0,75 pts

Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0, \pi]$, puis dresse le tableau de variations de f.

INDICE

Pour $x \in [0, \pi]$, le réel $\dfrac{x}{2}$ appartient à $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, où $\cos$ est strictement décroissante. Compare $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ à $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2. a) 0,75 pts

Calcule $f''(x)$ pour $x \in [0, \pi]$, puis montre que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[0, \pi]$.

INDICE

Dérive f' comme en 1. a), puis étudie le signe de $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ lorsque $\dfrac{x}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. b) 0,25 pts

Déduis-en que f' est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

INDICE

f'' est la dérivée de f' : regarde en quels points f'' s'annule.

3. a) 0,75 pts

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq \pi$. Montre que :

$$f'(b)(b-a) < f(b) - f(a) < f'(a)(b-a).$$

INDICE

Applique le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$, puis compare $f'(c)$ à $f'(a)$ et à $f'(b)$ grâce à 2. b).

3. b) 0,75 pts

En appliquant 3. a) avec $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$, montre que $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

INDICE

Calcule $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $f'(0)$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ avec les valeurs rappelées, puis traite séparément les deux inégalités.

4. a) 0,75 pts

Écris une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en O, puis montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (T) sur $]0, \pi]$.

INDICE

Le coefficient directeur de (T) est $f'(0)$. Pour la position, applique 3. a) sur $[0, x]$ et garde une seule des deux inégalités.

4. b) 1 pts

Soit (Δ) la droite passant par O et par le point $B(\pi, 4 - \pi)$. Montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ) sur $]0, \pi[$.

INDICE

Lis le coefficient directeur de (Δ) sur le point B. Pour $x \in]0, \pi[$, applique 3. a) sur $[0, x]$ puis sur $[x, \pi]$, et compare les deux résultats au même nombre $f'(x)$.

5. a) 0,5 pts

Soit k la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $k(0) = 1$ et, pour $0 < x \leq \pi$:

$$k(x) = \frac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x}{x}.$$

Montre que k est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x > 0$, reconnais dans $k(x)$ un taux d'accroissement de f en 0.

5. b) 1 pts

Déduis de 3. a) que, pour tout $x \in]0, \pi]$:

$$\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2}{x} < \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} < 0.$$

En déduire que k est dérivable à droite en 0, préciser $k'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Applique 3. a) sur $[0, x]$, puis divise par $x^2 > 0$. Pour la limite du membre de gauche, reconnais le taux d'accroissement en 0 d'une fonction dérivable dont tu connais la dérivée.

Exercice 5 — 7,5 pts

Un minimum atteint en un point anguleux, entre asymptote et branche parabolique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On donne $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

1. a) — 0,5 pts

Montre que f est continue en 0.

INDICE

Calcule $f(0)$ avec l'expression valable pour $x \leq 0$, puis étudie séparément les limites en 0^- et en 0^+.

1. b) — 1 pts

Étudie la dérivabilité de f à gauche, puis à droite en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Interprète graphiquement les résultats obtenus.

INDICE

À gauche, écris le taux d'accroissement sous la forme $\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} - 1$ et utilise l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}+2$. À droite, le taux se simplifie par x.

2. a) — 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Montre que la droite (D) d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, puis étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D) sur $]-\infty, 0]$.

INDICE

La première limite n'est pas indéterminée. Pour $x \leq 0$, écris $f(x) - (-2x-2) = \sqrt{x^2+4} + x$ et utilise l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4} - x$, en justifiant qu'elle est strictement positive.

2. b) — 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ces deux résultats.

INDICE

Pour $x > 0$, écris $f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ se simplifie directement.

3. a) 0,75 pts

Montre que, pour tout $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$: utilise la dérivée de $\sqrt{u}$. Pour le signe, compare x et $\sqrt{x^2+4}$ lorsque $x < 0$.

3. b) 0,75 pts

Montre que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ en justifiant que son dénominateur est dérivable et ne s'annule pas, puis multiplie numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x+1}$.

3. c) 0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, puis montre que $f(0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Pourquoi la propriété reliant un extremum local à l'annulation de la dérivée ne s'applique-t-elle pas en 0 ?

INDICE

Sur $]-\infty, 0]$, f coïncide avec une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; sur $[0, +\infty[$, avec une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$. Relis ensuite les hypothèses de la propriété des extremums.

4. a) 0,75 pts

Montre que $f(x) \geq -x$ pour tout $x \leq 0$, et que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Interprète graphiquement ces deux inégalités à l'aide des demi-tangentes obtenues en 1. b).

INDICE

Pour $x \leq 0$, la différence $f(x) - (-x)$ ne contient plus qu'une racine carrée à comparer à 2. Pour $x \geq 0$, factorise $x - f(x)$ par x et compare $\sqrt{x+1}$ à 1.

4. b) 0,5 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

INDICE

Sépare $x \leq 0$ et $x > 0$. Dans chaque cas, isole la racine carrée, vérifie le signe de l'autre membre avant d'élever au carré, puis contrôle que la valeur trouvée est dans le bon intervalle.

4. c) 0,5 pts

Soit m un réel. Détermine, selon les valeurs de m, le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = m$.

INDICE

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, f est continue et strictement monotone : détermine l'image de chacun à l'aide de $f(0)$ et des limites de la question 2.

5. 0,5 pts

Construis $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite (D) et les deux demi-tangentes en O. Précise les points et les droites que ta construction met en évidence, en t'appuyant sur les valeurs données en introduction.

INDICE

Calcule $f(-2)$, $f(3)$ et $f(8)$, place les deux points d'ordonnée 1 de 4. b), puis rassemble tes résultats : point anguleux, asymptote et position, demi-tangentes, branche parabolique.