BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Niveau examen	5

Exercice 1 6,5 pts

Une fonction irrationnelle étudiée de bout en bout

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x-4)\sqrt{\frac{x}{x+2}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On donne $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ et $\sqrt{6} \approx 2{,}45$.

1. a) 0,75 pts

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} - 1 + \frac{t}{2}.$$

Étudie le sens de variation de g, puis montre que, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{2}.$$

INDICE

Dérive $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ comme l'inverse de $t \mapsto \sqrt{1+t}$, puis compare $(1+t)\sqrt{1+t}$ à 1. Pense ensuite à $g(0)$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $t \mapsto 1+t$ est dérivable et strictement positive sur $[0, +\infty[$. Donc $t \mapsto \sqrt{1+t}$ y est dérivable et ne s'annule pas. Par inverse et par somme, g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Dérivée. Soit $t \geq 0$. D'après la dérivée de l'inverse d'une fonction :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+t)\sqrt{1+t}} \\ &= \frac{(1+t)\sqrt{1+t} - 1}{2(1+t)\sqrt{1+t}}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $1+t \geq 1$ et $\sqrt{1+t} \geq 1$, on a $(1+t)\sqrt{1+t} \geq 1$, donc $g'(t) \geq 0$. La fonction g est croissante sur $[0, +\infty[$.

Inégalité. Pour tout $t \geq 0$, $g(t) \geq g(0)$, et $g(0) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Conclusion. g est croissante sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{2}.$$

1. b) 0,5 pts

Déduis-en que, pour tout $x > 0$:

$$\sqrt{\frac{x}{x+2}} \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

INDICE

Écris $\dfrac{x}{x+2}$ sous la forme $\dfrac{1}{1+t}$, avec un réel $t \geq 0$ bien choisi.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. En divisant numérateur et dénominateur par x :

$$\sqrt{\frac{x}{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}.$$

Le réel $t = \dfrac{2}{x}$ est positif. La question 1. a) donne :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} \geq 1 - \dfrac{1}{x}$.

2. a) 0,25 pts

Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

INDICE

Cherche d'abord la limite de $\dfrac{x}{x+2}$ en $+\infty$.

CORRIGÉ

Pour $x > 0$, $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}$, qui tend vers 1 en $+\infty$. La racine carrée étant continue en 1, $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ tend vers 1.

Comme $x - 4$ tend vers $+\infty$, on conclut par produit.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. b) 1 pts

Montre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=-5$. Déduis-en que la droite (D) d'équation $y=x-5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Écris $f(x)-x$ comme la somme de $x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}-1\right)$ et de $-4\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$. Le premier terme est une forme indéterminée : pose $r=\sqrt{1+\frac{2}{x}}$ et utilise l'expression conjuguée $1+r$.

CORRIGÉ

Décomposition. Soit $x>0$. On écrit $f(x)-x=A(x)-4\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$, avec :

$$A(x)=x\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}-1\right).$$

Premier terme. Posons $r=\sqrt{1+\frac{2}{x}}$. Comme en 1. b), $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=\dfrac{1}{r}$, donc $A(x)=\dfrac{x(1-r)}{r}$. On multiplie par l'expression conjuguée $1+r$:

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{x(1-r)(1+r)}{r(1+r)}\\&=\frac{x(1-r^2)}{r(1+r)}.\end{aligned}$$

Or $1-r^2=-\dfrac{2}{x}$, donc $x(1-r^2)=-2$ et :

$$A(x)=\frac{-2}{r(1+r)}.$$

Comme r tend vers 1 en $+\infty$, $A(x)$ tend vers $\dfrac{-2}{1\times 2}=-1$.

Second terme. D'après 2. a), $-4\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ tend vers -4.

Limite. Par somme :

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=-5.$$

Asymptote. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-5)\big)=0$. D'après la définition d'une asymptote oblique, (D) est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=-5$ et la droite $(D):y=x-5$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3. `0,75 pts`

Montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Sépare les cas $0 \leq x \leq 4$ et $x > 4$. Dans le premier, compare $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ à 1 et surveille le sens de l'inégalité quand tu multiplies par $x - 4$. Dans le second, la question 1. b) sert.

CORRIGÉ

On veut montrer que, pour tout $x \geq 0$:

$$f(x) - (x - 5) > 0.$$

Soit $x \geq 0$.

- **Cas $0 \leq x \leq 4$.** On a $0 \leq \sqrt{\dfrac{x}{x+2}} < 1$ et $x - 4 \leq 0$. En multipliant par $x - 4 \leq 0$, l'inégalité change de sens : $f(x) \geq x - 4$. Or $x - 4 > x - 5$, donc $f(x) > x - 5$.
- **Cas $x > 4$.** D'après 1. b), $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} \geq 1 - \dfrac{1}{x}$, et $x - 4 > 0$. Donc :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (x - 4)\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x - 5 + \frac{4}{x} \\ &> x - 5. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $f(x) - (x - 5) > 0$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $[0, +\infty[$.

4. `0,75 pts`

Étudie la dérivabilité de f à droite en 0, puis interprète graphiquement le résultat.

INDICE

Vérifie d'abord la continuité à droite en 0. Forme ensuite le taux d'accroissement en 0 pour $x > 0$, fais entrer $\dfrac{1}{x}$ sous la racine et surveille le signe du dénominateur.

CORRIGÉ

Continuité à droite. Quand x tend vers 0^+, $\dfrac{x}{x+2}$ tend vers 0, donc $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers $-4 \times 0 = 0$. Comme $f(0) = 0$, f est continue à droite en 0.

Taux d'accroissement. Soit $x > 0$. Comme $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x}{x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 4}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}.$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif. Donc :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty.$$

Cette limite n'est pas finie : f n'est pas dérivable à droite en 0.

Interprétation. D'après la propriété des demi-tangentes verticales, $\mathcal{C}_f$ admet au point O une demi-tangente verticale. Comme $f(x) < 0$ pour $0 < x < 4$, elle est dirigée vers le bas.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0 ; $\mathcal{C}_f$ admet en O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

5. a) 1 pts

Montre que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}}.$$

INDICE

Pose $u(x)=\dfrac{x}{x+2}$: u est dérivable et strictement positive sur $]0,+\infty[$, et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Réduis ensuite au dénominateur $\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}$.

CORRIGÉ

Une fonction auxiliaire. Posons $u(x)=\dfrac{x}{x+2}$ pour $x>0$. Quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, u y est dérivable, et $u(x)>0$. Soit $x>0$:

$$\begin{aligned}u'(x)&=\frac{(x+2)-x}{(x+2)^2}\\&=\frac{2}{(x+2)^2}.\end{aligned}$$

Notons aussi $d(x)=\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}$.

Dérivée de $\sqrt{u}$. D'après la dérivée de $\sqrt{u}$ (u strictement positive), $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{u}\right)'(x)\\&=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}\\&=\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x}}\\&=\frac{1}{d(x)}.\end{aligned}$$

Dérivée de f. Produit de $x\mapsto x-4$ et de $\sqrt{u}$, f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On a $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=\dfrac{x(x+2)}{d(x)}$, donc :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sqrt{\frac{x}{x+2}}+\frac{x-4}{d(x)}\\&=\frac{x(x+2)+x-4}{d(x)}\\&=\frac{x^2+3x-4}{d(x)}.\end{aligned}$$

Comme $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$, on obtient la forme demandée.

Conclusion. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+4)}{d(x)},$$

avec $d(x)=\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2}$.

5. b) `0,5 pts`

Dresse le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.

INDICE

Repère les facteurs de $f'(x)$ de signe constant sur $]0, +\infty[$. Comme f n'est pas dérivable en 0, utilise la continuité à droite (question 4) pour inclure 0 dans l'intervalle de décroissance.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x}\,(x+2)\sqrt{x+2} > 0$ et $x + 4 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, $f'(1) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Variations sur $]0, 1]$. $f' \leq 0$ et ne s'annule qu'en 1 : par le théorème sur le signe de la dérivée, f est strictement décroissante sur $]0, 1]$.

Extension à 0. Soit $x \in]0, 1]$. Pour tout $t \in \left]0, \dfrac{x}{2}\right]$, $f(t) \geq f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Comme f est continue à droite en 0 (question 4), le passage à la limite quand t tend vers 0^+ donne :

$$f(0) \geq f\left(\frac{x}{2}\right) > f(x).$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Variations sur $[1, +\infty[$. $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en 1 : f y est strictement croissante.

Valeurs. $f(0) = 0$ et $f(1) = -3\sqrt{\dfrac{1}{3}} = -\sqrt{3}$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	décroissante	$-\sqrt{3}$	croissante	$+\infty$

Conclusion. f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$; son minimum sur $[0, +\infty[$ vaut $-\sqrt{3}$, atteint en 1.

6. a)

0,5 pts

Écris une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 4.

INDICE

Utilise la formule de 5. a) en $x = 4$, puis rends rationnel le dénominateur obtenu.

CORRIGÉ

Valeurs en 4**.** On a $f(4) = 0$ et, d'après 5. a) :

$$\begin{aligned} f'(4) &= \frac{3 \times 8}{2 \times 6\sqrt{6}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Équation. La tangente en B a pour équation $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$.

Conclusion. Une équation de (T) est :

$$y = \frac{\sqrt{6}}{3}(x - 4).$$

6. b)

0,5 pts

Trace (D), (T) et $\mathcal{C}_f$ dans le repère. Indique les éléments que ta figure doit faire apparaître.

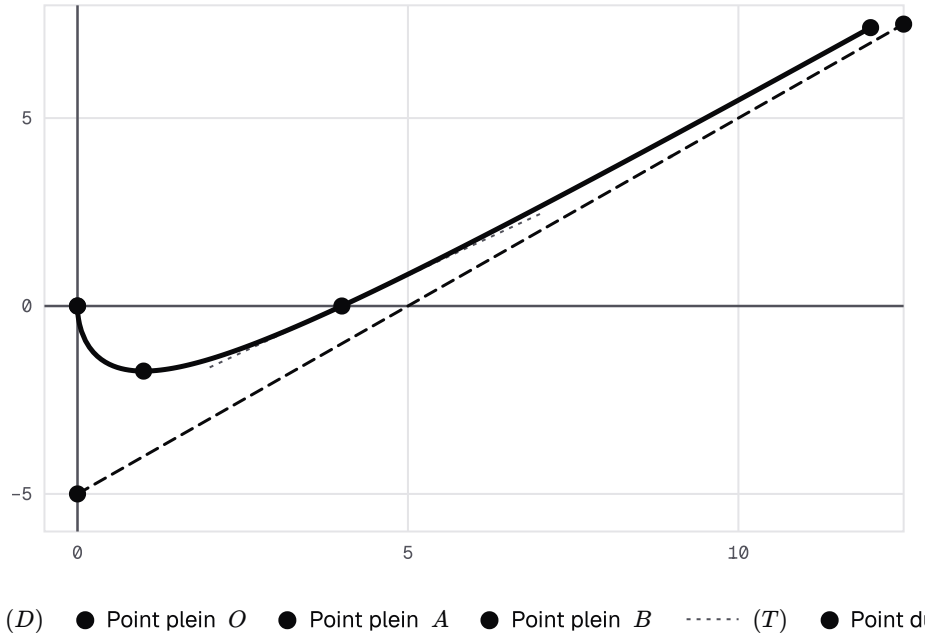
INDICE

Rassemble tes résultats : les points O, $A(1,-\sqrt{3})$ et $B(4,0)$, la demi-tangente en O, la tangente en B, l'asymptote et la position de la courbe par rapport à elle.

CORRIGÉ

La figure comporte :

- la droite (D) d'équation $y = x - 5$, qui passe par $(0,-5)$ et $(5,0)$;
- le point O, où $\mathcal{C}_f$ part verticalement vers le bas (question 4) ;
- le point $A(1,-\sqrt{3})$, avec $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$: minimum de f, tangente horizontale ;
- le point $B(4,0)$, où $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses ; la tangente (T) y a pour coefficient directeur $\dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$;
- au-delà, la courbe monte en restant strictement au-dessus de (D), et s'en rapproche quand x tend vers $+\infty$.



Tracé attendu : la courbe de f avec O, A et B, la tangente (T) en B et l'asymptote (D) : y = x - 5, sous la courbe.

Exercice 2 6 pts

Approcher la solution d'une équation du troisième degré par une suite

On considère les fonctions g et φ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x - 6$$

et

$$\varphi(x) = \frac{6}{x^2 + 3},$$

ainsi que l'intervalle $I = \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

On donne $0{,}023 < \left(\frac{3}{4}\right)^{13} < 0{,}024$ et $0{,}017 < \left(\frac{3}{4}\right)^{14} < 0{,}018$.

1. a) 0,5 pts

Étudie les variations de g sur $\mathbb{R}$ et calcule ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Dérive g et regarde le signe de $3x^2 + 3$. Pour les limites, factorise $g(x)$ par x^3.

CORRIGÉ

Variations. La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$. Par le théorème sur le signe de la dérivée, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites. Pour $x \neq 0$:

$$g(x) = x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right),$$

et la parenthèse tend vers 1 en $-\infty$ comme en $+\infty$.

Conclusion. g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

1. b) 0,75 pts

Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, puis que $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

INDICE

g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: quelle est l'image de $\mathbb{R}$? Pour l'encadrement, calcule $g(1)$ et $g\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

CORRIGÉ

Existence et unicité. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})$, qui vaut $]-\infty, +\infty[$ d'après les limites de 1. a). Le réel 0 admet ainsi un unique antécédent α par g.

Encadrement. On a $g(1) = -2$ et :

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{27}{8} + \frac{36}{8} - \frac{48}{8} \\ &= \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

Donc $g(1) < g(\alpha) < g\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Comme g est strictement croissante, $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

Conclusion. L'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α, et $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

1. c) 0,25 pts

Montre que $\varphi(\alpha) = \alpha$.

INDICE

Mets α en facteur dans $\alpha^3 + 3\alpha$.

CORRIGÉ

L'égalité $g(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha^3 + 3\alpha = 6$, soit $\alpha(\alpha^2 + 3) = 6$. Comme $\alpha^2 + 3 > 0$, on peut diviser :

$$\alpha = \frac{6}{\alpha^2 + 3}.$$

Conclusion. $\varphi(\alpha) = \alpha$.

2. a) 0,75 pts

Étudie le sens de variation de φ sur I, puis montre que $\varphi(I) \subset I$.

INDICE

Calcule $\varphi'(x)$ et son signe pour $x > 0$. Une fonction continue et monotone sur un segment l'envoie sur le segment de ses valeurs aux bornes : calcule $\varphi(1)$ et $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction $x \mapsto x^2 + 3$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; par la dérivée de l'inverse, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^2}.$$

Variations. Pour $x \in I$, $x > 0$, donc $\varphi'(x) < 0$: φ est strictement décroissante sur I.

Image de I. Continue et strictement décroissante sur le segment I, φ vérifie :

$$\varphi(I) = \left[\varphi\left(\frac{3}{2}\right), \varphi(1)\right].$$

Or $\varphi(1) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ et :

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{6}{\frac{9}{4}+3} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}.$$

Comme $1 \leq \dfrac{8}{7}$, on a $\varphi(I) = \left[\dfrac{8}{7}, \dfrac{3}{2}\right] \subset I$.

Conclusion. φ est strictement décroissante sur I et $\varphi(I) \subset I$.

2. b) 0,75 pts

Montre que, pour tout $x \in I$:

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}.$$

INDICE

Étudie sur I les variations de $x \mapsto |\varphi'(x)|$, écrite sans valeur absolue. La majoration doit valoir sur tout I.

CORRIGÉ

Une fonction auxiliaire. Pour $x \in I$, $x > 0$, donc $|\varphi'(x)| = \psi(x)$, avec :

$$\psi(x) = \frac{12x}{(x^2+3)^2}.$$

Dérivée de ψ. La fonction ψ est dérivable sur I comme quotient. Soit $x \in I$; en simplifiant par x^2+3 :

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{12(x^2+3) - 48x^2}{(x^2+3)^3} \\ &= \frac{36(1-x^2)}{(x^2+3)^3}.\end{aligned}$$

Variations. Pour $x \in I$, $x \geq 1$, donc $1 - x^2 \leq 0$ et $\psi'(x) \leq 0$: ψ est décroissante sur I. Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$\psi(x) \leq \psi(1) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$.

3. a) 0,5 pts

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$. Montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

L'hérédité repose sur la question 2. a) : si u_n est dans I, où se trouve $\varphi(u_n)$?

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 \in I$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$. D'après 2. a), $\varphi(I) \subset I$, donc $u_{n+1} = \varphi(u_n) \in I$.

Conclusion. Par récurrence, $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. b) 0,75 pts

Montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|.$$

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis à φ sur I, entre u_n et α : vérifie que ces deux réels sont dans I, puis utilise $\varphi(\alpha) = \alpha$.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Hypothèses. La fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et, d'après 2. b), $|\varphi'(x)| \leq \frac{3}{4}$ pour tout $x \in I$. Les réels u_n (question 3. a)) et α (question 1. b)) appartiennent à I.

Inégalité des accroissements finis. Elle donne :

$$\begin{aligned} &|\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \\ &\leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|. \end{aligned}$$

Simplification. On a $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(\alpha) = \alpha$ (question 1. c)).

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$.

3. c) 0,75 pts

Déduis-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

INDICE

Raisonne par récurrence. Pour l'initialisation, majore $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1$ grâce à 1. b).

CORRIGÉ

Initialisation. $u_0 = 1$ et $1 < \alpha < \frac{3}{2}$, donc :

$$\begin{aligned} |u_0 - \alpha| &= \alpha - 1 \\ &< \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0. \end{aligned}$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. D'après 3. b) :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \\ &\leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3. d) 0,5 pts

Déduis-en que la suite (u_n) converge et précise sa limite.

INDICE

Quelle est la limite de $\left(\frac{3}{4}\right)^n$? Encadre ensuite $|u_n - \alpha|$ entre 0 et une suite de limite nulle.

CORRIGÉ

Limite de la majoration. Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$.

Encadrement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

D'après le théorème des gendarmes, $|u_n - \alpha|$ tend vers 0.

Conclusion. La suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. e) 0,5 pts

À l'aide des valeurs données en introduction, détermine un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

INDICE

Cherche un rang pour lequel la majoration de 3. c) passe sous 10^{-2}, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}02$.

CORRIGÉ

Condition suffisante. D'après 3. c), il suffit que $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 0{,}02.$$

Rang 14. On a $\left(\frac{3}{4}\right)^{14} < 0{,}018 < 0{,}02$, donc :

$$|u_{14} - \alpha| < 0{,}009 < 10^{-2}.$$

Conclusion. On peut prendre $n_0 = 14$.

Remarque : pour $n = 13$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{13} > 0{,}023 > 0{,}02$, et la majoration ne permet pas de conclure. Cela ne prouve pas que u_{13} est loin de α : la majoration n'est qu'une garantie.

Exercice 3 — 5,75 pts

Réciproque d'une fonction contenant une arctangente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + \arctan(x-1).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

On rappelle que, pour tout réel t, $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan t < \dfrac{\pi}{2}$.

1. a) — 0,5 pts

Montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 + 3}{1 + (x-1)^2}.$$

INDICE

Utilise la dérivée de $\arctan u$ avec $u(x) = x - 1$, puis réduis au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 1$. D'après la dérivée de $\arctan u$, la fonction $x \mapsto \arctan(x-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1 + (x-1)^2}$. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{1}{1 + (x-1)^2} \\ &= \frac{2 + 2(x-1)^2 + 1}{1 + (x-1)^2} \\ &= \frac{2(x-1)^2 + 3}{1 + (x-1)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)^2 + 3}{1 + (x-1)^2}$.

1. b) 0,5 pts

Montre que, pour tout réel x :

$$2x - \frac{\pi}{2} < f(x) < 2x + \frac{\pi}{2}.$$

Déduis-en les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

INDICE

Applique le rappel de l'introduction au réel $x - 1$. Pour les limites, chaque côté de l'encadrement ne sert qu'en une borne.

CORRIGÉ

Encadrement. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le rappel, appliqué à $t = x - 1$, donne $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x-1) < \frac{\pi}{2}$. En ajoutant $2x$:

$$2x - \frac{\pi}{2} < f(x) < 2x + \frac{\pi}{2}.$$

Limite en $+\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$, la minoration donne, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $-\infty$. Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$, la majoration donne $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Conclusion. Pour tout réel x, $2x - \frac{\pi}{2} < f(x) < 2x + \frac{\pi}{2}$; f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.

1. c) 0,75 pts

Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note f^{-1} sa fonction réciproque.

INDICE

Trois arguments sont attendus : la continuité, la stricte monotonie (signe de f') et l'image de $\mathbb{R}$, donnée par les limites.

CORRIGÉ

Continuité. f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.

Stricte monotonie. Pour tout réel x, le numérateur et le dénominateur de $f'(x)$ sont strictement positifs, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Image. Une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $f(\mathbb{R})$, dont les bornes sont ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. D'après 1. b), $f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Conclusion. f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) 0,5 pts

Calcule $f(1)$. Montre que f^{-1} est dérivable en 2 et calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

INDICE

Utilise le théorème de dérivation de la réciproque en $b = f(a)$: vérifie d'abord que $f'(a) \neq 0$ pour le bon antécédent a.

CORRIGÉ

Antécédent de 2. $f(1) = 2 + \arctan 0 = 2$, donc $f^{-1}(2) = 1$.

Hypothèses. f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, dérivable en 1, et :

$$f'(1) = \frac{0+3}{1+0} = 3 \neq 0.$$

Dérivée de la réciproque. D'après le théorème de dérivation de la fonction réciproque, f^{-1} est dérivable en $f(1) = 2$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}.$$

Conclusion. $f(1) = 2$; f^{-1} est dérivable en 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{3}$.

2. b) 0,5 pts

Écris une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2.

INDICE

Le point de contact est $\left(2, f^{-1}(2)\right)$; le coefficient directeur est $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

CORRIGÉ

Le point de contact est $(2, 1)$ et le coefficient directeur vaut $\dfrac{1}{3}$. Une équation de la tangente est $y = \dfrac{1}{3}(x-2) + 1$.

Conclusion. La tangente a pour équation :

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

3. a) 0,75 pts

Montre que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel y :

$$\frac{1}{3} \leq \left(f^{-1}\right)'(y) < \frac{1}{2}.$$

Précise pour quel réel y on a $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}$.

INDICE

Encadre d'abord $f'(x) = 2 + \frac{1}{1+(x-1)^2}$. Utilise ensuite $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$: passer à l'inverse renverse l'ordre.

CORRIGÉ

Encadrement de f'. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $1 + (x-1)^2 \geq 1$, on a $0 < \frac{1}{1+(x-1)^2} \leq 1$, donc :

$$2 < f'(x) \leq 3,$$

avec $f'(x) = 3$ si et seulement si $x = 1$. En particulier, f' ne s'annule pas.

Dérivabilité de f^{-1}. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x = f^{-1}(y)$. Comme $f'(x) \neq 0$, le théorème de dérivation de la réciproque montre que f^{-1} est dérivable en y, avec :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Encadrement. La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$; l'encadrement $2 < f'(x) \leq 3$ donne $\frac{1}{3} \leq \left(f^{-1}\right)'(y) < \frac{1}{2}$.

Cas d'égalité. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}$ si et seulement si $f^{-1}(y) = 1$, c'est-à-dire $y = f(1) = 2$.

Conclusion. f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout réel y, $\frac{1}{3} \leq \left(f^{-1}\right)'(y) < \frac{1}{2}$, avec égalité à gauche seulement pour $y = 2$.

3. b) 0,25 pts

Montre que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution réelle, notée β, et que $\beta = f^{-1}(3)$.

INDICE

Utilise la bijection obtenue en 1. c).

CORRIGÉ

D'après 1. c), f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et $3 \in \mathbb{R}$: le réel 3 admet un unique antécédent par f, noté β.

Conclusion. L'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution β et, par définition de la réciproque, $\beta = f^{-1}(3)$.

3. c) 0,75 pts

Grâce au théorème des accroissements finis, utilisé pour f^{-1} entre 2 et 3, prouve que :

$$\frac{4}{3} < \beta < \frac{3}{2}.$$

INDICE

Vérifie les hypothèses sur $[2,3]$, puis écris $f^{-1}(3) - f^{-1}(2) = \left(f^{-1}\right)'(c)$ avec $c \in]2,3[$. Pour l'inégalité stricte à gauche, rappelle-toi où l'égalité de 3. a) a lieu.

CORRIGÉ

Hypothèses. D'après 3. a), f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est donc continue sur $[2,3]$ et dérivable sur $]2,3[$.

Théorème des accroissements finis. Il existe un réel $c \in]2,3[$ tel que :

$$f^{-1}(3) - f^{-1}(2) = \left(f^{-1}\right)'(c),$$

c'est-à-dire $\beta - 1 = \left(f^{-1}\right)'(c)$, car $f^{-1}(2) = 1$.

Encadrement. D'après 3. a), $\left(f^{-1}\right)'(c) < \frac{1}{2}$; comme $c \neq 2$, l'égalité est exclue à gauche et $\left(f^{-1}\right)'(c) > \frac{1}{3}$. Donc $\frac{1}{3} < \beta - 1 < \frac{1}{2}$.

Conclusion. $\frac{4}{3} < \beta < \frac{3}{2}$.

4. a) 0,75 pts

On pose $t = \beta - 1$. Vérifie que $2t + \arctan t = 1$ et que $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$. À l'aide du théorème des accroissements finis utilisé pour $\arctan$ entre 0 et t, prouve ensuite que :

$$\frac{4t}{5} < \arctan t < t.$$

INDICE

Le théorème fournit un réel $c \in]0, t[$; encadre c^2 grâce à l'encadrement de t, sans perdre les inégalités strictes.

CORRIGÉ

Équation vérifiée par t. L'égalité $f(\beta) = 3$ s'écrit $2(1 + t) + \arctan t = 3$, soit $2t + \arctan t = 1$.

Encadrement de t. D'après 3. c), $\frac{4}{3} < \beta < \frac{3}{2}$, donc $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$.

Théorème des accroissements finis. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[0, t]$ et dérivable sur $]0, t[$. Il existe donc $c \in]0, t[$ tel que :

$$\begin{aligned}&\arctan t - \arctan 0\\ &= \frac{t}{1 + c^2},\end{aligned}$$

soit $\arctan t = \frac{t}{1 + c^2}$.

Encadrement. Comme $0 < c < t < \frac{1}{2}$, on a $1 < 1 + c^2 < \frac{5}{4}$, donc $\frac{4}{5} < \frac{1}{1 + c^2} < 1$. On multiplie par $t > 0$.

Conclusion. $2t + \arctan t = 1$, $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$ et $\frac{4t}{5} < \arctan t < t$.

4. b) `0,5 pts`

Déduis-en que $\frac{4}{3} < \beta < \frac{19}{14}$, et compare la précision de cet encadrement à celle de 3. c).

INDICE

Remplace $\arctan t$ par chacune de ses deux bornes dans $2t + \arctan t = 1$; chaque remplacement donne une seule des deux inégalités.

CORRIGÉ

Minoration. Avec $\arctan t < t$: $1 = 2t + \arctan t < 3t$, donc $t > \frac{1}{3}$ et $\beta > \frac{4}{3}$.

Majoration. Avec $\arctan t > \frac{4t}{5}$:

$$1 > 2t + \frac{4t}{5} = \frac{14t}{5},$$

donc $t < \frac{5}{14}$ et $\beta < 1 + \frac{5}{14} = \frac{19}{14}$.

Précision. L'amplitude du nouvel encadrement est :

$$\frac{19}{14} - \frac{4}{3} = \frac{1}{42},$$

bien plus petite que l'amplitude $\frac{1}{6}$ obtenue en 3. c).

Conclusion. $\frac{4}{3} < \beta < \frac{19}{14}$, encadrement d'amplitude $\frac{1}{42}$, sept fois plus fin que celui de 3. c).

Exercice 4 7 pts

Concavité et accroissements finis pour situer une courbe trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)-x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On rappelle que $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

1. a) 0,5 pts

Justifie que f est dérivable sur $[0,\pi]$ et montre que, pour tout $x\in[0,\pi]$:

$$f'(x)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-1.$$

INDICE

La fonction $x\mapsto\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est de la forme $\sin u$, avec u affine : $(\sin u)'=u'\cos u$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u:x\mapsto\dfrac{x}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x)=\dfrac{1}{2}$. D'après la dérivée de $\sin u$, la fonction $x\mapsto\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Par combinaison linéaire, f est dérivable sur $[0,\pi]$.

Calcul. Soit $x\in[0,\pi]$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=4\times\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)-1\\&=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)-1.\end{aligned}$$

Conclusion. f est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x\in[0,\pi]$, $f'(x)=2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-1$.

1. b) `0,75 pts`

Étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0,\pi]$, puis dresse le tableau de variations de f.

INDICE

Pour $x \in [0,\pi]$, le réel $\dfrac{x}{2}$ appartient à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, où $\cos$ est strictement décroissante. Compare $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ à $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Soit $x \in [0,\pi]$. Alors $\dfrac{x}{2} \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel $\cos$ est strictement décroissante. Comme $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned} & f'(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos\left(\frac{x}{2}\right) > \cos\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{2} < \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x < \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

De même, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{2\pi}{3}$, et $f'(x) < 0$ si et seulement si $x > \dfrac{2\pi}{3}$.

Variations. f est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{2\pi}{3},\pi\right]$.

Valeurs. $f(0) = 0$, $f(\pi) = 4-\pi$ et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= 4\sin\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

x	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$f(x)$	0	croissante	$2\sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}$	décroissante	$4-\pi$

2. a) 0,75 pts

Calcule $f''(x)$ pour $x \in [0, \pi]$, puis montre que $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[0, \pi]$.

INDICE

Dérive f' comme en 1. a), puis étudie le signe de $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ lorsque $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

CORRIGÉ

Dérivée seconde. Par le même argument qu'en 1. a), f' est dérivable sur $[0, \pi]$. Soit $x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \times \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Signe. Comme $\frac{x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$, donc $f''(x) \leq 0$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, \pi]$, $f''(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \leq 0$. Le signe de la dérivée seconde donne la convexité : $\mathcal{C}_f$ est concave sur $[0, \pi]$.

2. b) 0,25 pts

Déduis-en que f' est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

INDICE

f'' est la dérivée de f' : regarde en quels points f'' s'annule.

CORRIGÉ

La fonction f' est dérivable sur $[0, \pi]$, de dérivée $f'' \leq 0$. De plus, $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$ pour $0 < x \leq \pi$: f'' ne s'annule qu'en 0.

Par le théorème sur le signe de la dérivée, une fonction dont la dérivée est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points est strictement décroissante.

Conclusion. f' est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

3. a) 0,75 pts

Soit a et b deux réels tels que $0 \leq a < b \leq \pi$. Montre que :

$$f'(b)(b-a) < f(b) - f(a) < f'(a)(b-a).$$

INDICE

Applique le théorème des accroissements finis à f sur $[a, b]$, puis compare $f'(c)$ à $f'(a)$ et à $f'(b)$ grâce à 2. b).

CORRIGÉ

Théorème des accroissements finis. La fonction f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ (question 1. a)). Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Encadrement de $f'(c)$. Comme $a < c < b$ et que f' est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (question 2. b)), on a $f'(b) < f'(c) < f'(a)$.

Conclusion. En multipliant par $b - a > 0$:

$$f'(b)(b-a) < f(b) - f(a) < f'(a)(b-a).$$

3. b)

0,75 pts

En appliquant 3. a) avec $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{3}$, montre que $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

INDICE

Calcule $f(0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $f'(0)$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ avec les valeurs rappelées, puis traite séparément les deux inégalités.

CORRIGÉ

Valeurs. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2 - 1 = 1$. De plus :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 4\sin\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \\ &= 2 - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{\pi}{6} - 1 \\ &= \sqrt{3} - 1. \end{aligned}$$

Application de 3. a). On obtient :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - 1)\frac{\pi}{3} &< 2 - \frac{\pi}{3} \\ &< \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

- **Inégalité de droite.** Elle s'écrit $2 < \dfrac{2\pi}{3}$, soit $\pi > 3$.
- **Inégalité de gauche.** Elle s'écrit $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{3} < 2$, soit $\sqrt{3}\,\pi < 6$, donc $\pi < \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Conclusion. $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

4. a)

0,75 pts

Écris une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ en O, puis montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (T) sur $]0, \pi]$.

INDICE

Le coefficient directeur de (T) est $f'(0)$. Pour la position, applique 3. a) sur $[0, x]$ et garde une seule des deux inégalités.

CORRIGÉ

Tangente. $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$: (T) a pour équation $y = x$.

Position. Soit $x \in]0, \pi]$. La question 3. a), avec $a = 0$ et $b = x$, donne $f(x) - f(0) < f'(0)(x - 0)$, soit $f(x) < x$.

Conclusion. $(T) : y = x$, et $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (T) sur $]0, \pi]$; la courbe et la tangente n'ont que le point O en commun.

4. b) 1 pts

Soit (Δ) la droite passant par O et par le point $B(\pi, 4-\pi)$. Montre que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ) sur $]0,\pi[$.

INDICE

Lis le coefficient directeur de (Δ) sur le point B. Pour $x \in]0,\pi[$, applique 3. a) sur $[0,x]$ puis sur $[x,\pi]$, et compare les deux résultats au même nombre $f'(x)$.

CORRIGÉ

Équation de (Δ). La droite (Δ) passe par O et par $B\big(\pi, f(\pi)\big)$; une équation est :

$$y = \frac{4-\pi}{\pi}\,x.$$

Soit $x \in]0,\pi[$.

Sur $[0,x]$. L'inégalité de gauche de 3. a) donne $f'(x) \times x < f(x) - f(0)$, soit $f'(x) < \dfrac{f(x)}{x}$.

Sur $[x,\pi]$. L'inégalité de droite de 3. a) donne $f(\pi) - f(x) < f'(x)(\pi - x)$, soit :

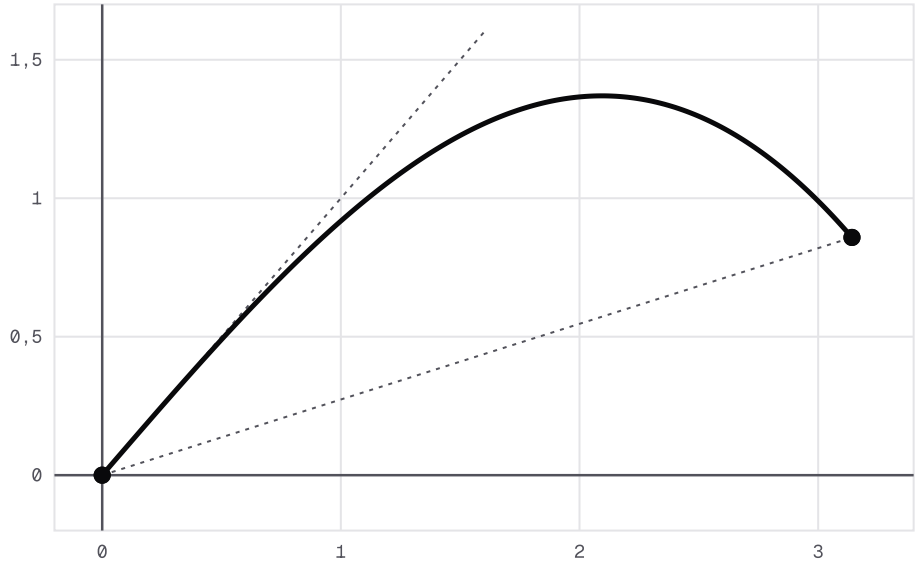
$$\frac{f(\pi)-f(x)}{\pi - x} < f'(x).$$

Comparaison. Donc $\dfrac{f(\pi)-f(x)}{\pi-x} < \dfrac{f(x)}{x}$. En multipliant par $x(\pi-x) > 0$:

$$\begin{aligned} &xf(\pi) - xf(x) \\ &< (\pi - x)f(x), \end{aligned}$$

soit $xf(\pi) < \pi f(x)$.

Conclusion. Pour tout $x \in]0,\pi[$, $f(x) > \dfrac{4-\pi}{\pi}\,x$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (Δ) sur $]0,\pi[$.



Courbe concave de f sur [0, π], coincée entre sa tangente (T) : y = x en O et la droite (Δ) qui joint O à B.

5. a) `0,5 pts`

Soit k la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $k(0) = 1$ et, pour $0 < x \leq \pi$:

$$k(x) = \frac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right) - x}{x}.$$

Montre que k est continue à droite en 0.

INDICE

Pour $x > 0$, reconnais dans $k(x)$ un taux d'accroissement de f en 0.

CORRIGÉ

Un taux d'accroissement. Comme $f(0) = 0$, pour $0 < x \leq \pi$:

$$k(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Limite. f est dérivable en 0 (question 1. a)), donc ce taux tend vers $f'(0) = 1$ quand x tend vers 0^+.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = 1 = k(0)$: k est continue à droite en 0.

5. b) 1 pts

Déduis de 3. a) que, pour tout $x \in]0, \pi]$:

$$\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2}{x} < \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} < 0.$$

En déduire que k est dérivable à droite en 0, préciser $k'_d(0)$ et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Applique 3. a) sur $[0, x]$, puis divise par $x^2 > 0$. Pour la limite du membre de gauche, reconnais le taux d'accroissement en 0 d'une fonction dérivable dont tu connais la dérivée.

CORRIGÉ

Soit $x \in]0, \pi]$.

Encadrement de $f(x)$. La question 3. a), avec $a = 0$ et $b = x$, donne $f'(x)\,x < f(x) - f(0) < f'(0)\,x$, soit :

$$\left(2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) x < f(x) < x.$$

Division. En divisant par $x^2 > 0$, puis en retranchant $\frac{1}{x}$:

$$\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2}{x} < \frac{f(x) - x}{x^2} < 0.$$

Lien avec k. Comme $k(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ et $k(0) = 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{k(x) - k(0)}{x - 0} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \\ &= \frac{f(x) - x}{x^2}, \end{aligned}$$

d'où l'encadrement demandé.

Limite du membre de gauche. Posons $v(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour tout réel x : v est dérivable en 0, avec $v'(x) = -\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ et $v'(0) = 0$. Le membre de gauche est $\dfrac{v(x) - v(0)}{x - 0}$; il tend vers $v'(0) = 0$ quand x tend vers 0^+.

Dérivabilité. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = 0.$$

Conclusion. k est dérivable à droite en 0 et $k'_d(0) = 0$. La courbe de k admet au point $(0, 1)$ une demi-tangente horizontale, d'équation $y = 1$ avec $x \geq 0$.

Exercice 5 — 7,5 pts

Un minimum atteint en un point anguleux, entre asymptote et branche parabolique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe. On donne $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

1. a) — 0,5 pts

Montre que f est continue en 0.

INDICE

Calcule $f(0)$ avec l'expression valable pour $x \leq 0$, puis étudie séparément les limites en 0^- et en 0^+.

CORRIGÉ

Valeur en 0. $f(0) = \sqrt{4} - 0 - 2 = 0$.

À gauche. La fonction $x \mapsto x^2 + 4$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2+4} - x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme f coïncide avec elle sur $]-\infty, 0]$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \sqrt{4} - 2 = 0.$$

À droite. Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$, qui tend vers $\dfrac{0}{1} = 0$ quand x tend vers 0^+.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

1. b) 1 pts

Étudie la dérivabilité de f à gauche, puis à droite en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Interprète graphiquement les résultats obtenus.

INDICE

À gauche, écris le taux d'accroissement sous la forme $\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}-1$ et utilise l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}+2$. À droite, le taux se simplifie par x.

CORRIGÉ

À gauche. Soit $x<0$. En multipliant par l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}+2$:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}-1\\&=\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}-1\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}-1.\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0^-, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}$ tend vers $\dfrac{0}{4}=0$. Donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=-1$.

À droite. Soit $x>0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{\sqrt{x+1}},$$

qui tend vers 1 quand x tend vers 0^+. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=1$.

Dérivabilité en 0. Les deux nombres dérivés latéraux existent mais diffèrent. D'après le lien entre dérivabilité et dérivabilités latérales, f n'est pas dérivable en 0, bien qu'elle y soit continue (question 1. a)).

Interprétation. Le point O est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$, avec deux demi-tangentes :

- à gauche, la demi-droite d'équation $y=-x$, avec $x\leq 0$;
- à droite, la demi-droite d'équation $y=x$, avec $x\geq 0$.

Conclusion. $f'_g(0)=-1$ et $f'_d(0)=1$: f n'est pas dérivable en 0, et O est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$.

2. a) 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Montre que la droite (D) d'équation $y=-2x-2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, puis étudie la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D) sur $]-\infty,0]$.

INDICE

La première limite n'est pas indéterminée. Pour $x\leq 0$, écris $f(x)-(-2x-2)=\sqrt{x^2+4}+x$ et utilise l'expression conjuguée $\sqrt{x^2+4}-x$, en justifiant qu'elle est strictement positive.

CORRIGÉ

Limite. En $-\infty$, $\sqrt{x^2+4}$ et $-x$ tendent vers $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Écart à (D). Soit $x\leq 0$. On a $\sqrt{x^2+4}>0$ et $-x\geq 0$, donc $\sqrt{x^2+4}-x>0$. Avec l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x)-(-2x-2) &= \sqrt{x^2+4}+x \\ &= \frac{(x^2+4)-x^2}{\sqrt{x^2+4}-x} \\ &= \frac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}. \end{aligned}$$

Asymptote. En $-\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $f(x)-(-2x-2)$ tend vers 0 : d'après la définition d'une asymptote oblique, (D) est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

Position. Pour tout $x\leq 0$, $\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}-x}>0$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; (D) est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) sur $]-\infty,0]$.

2. b) 0,75 pts

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ces deux résultats.

INDICE

Pour $x>0$, écris $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$. Le quotient $\dfrac{f(x)}{x}$ se simplifie directement.

CORRIGÉ

Limite de f. Pour $x>0$, $x=\sqrt{x}\times\sqrt{x}$, donc :

$$f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

En $+\infty$, $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ tend vers 1, donc $\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ tend vers 1. Comme $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, qui tend vers 0 en $+\infty$.

Interprétation. $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 : d'après la propriété des branches paraboliques, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$: branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$.

3. a) `0,75 pts`

Montre que, pour tout $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$.

INDICE

La fonction $u : x \mapsto x^2 + 4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$: utilise la dérivée de $\sqrt{u}$. Pour le signe, compare x et $\sqrt{x^2+4}$ lorsque $x < 0$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. La fonction $u : x \mapsto x^2 + 4$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée de $\sqrt{u}$, $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$, $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x - 2$: f y est dérivable.

Calcul. Soit $x < 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - 1 \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x < 0$, $x < 0 < \sqrt{x^2+4}$: le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif.

Conclusion. Pour tout $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} < 0$.

3. b) `0,75 pts`

Montre que, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Déduis-en le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

INDICE

Dérive le quotient $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ en justifiant que son dénominateur est dérivable et ne s'annule pas, puis multiplie numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x+1}$.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Sur $]0, +\infty[$, $x+1 > 0$: la fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ y est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, et ne s'annule pas. Le quotient f est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

Calcul. Soit $x > 0$. D'après la dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned} &f'(x) \\ &= \frac{\sqrt{x+1} - \dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}. \end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $2\sqrt{x+1}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1) - x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x > 0$, le numérateur $x+2$ et le dénominateur sont strictement positifs.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$.

3. c)

0,75 pts

Dresse le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, puis montre que $f(0)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Pourquoi la propriété reliant un extremum local à l'annulation de la dérivée ne s'applique-t-elle pas en 0 ?

INDICE

Sur $]-\infty, 0]$, f coïncide avec une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; sur $[0, +\infty[$, avec une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$. Relis ensuite les hypothèses de la propriété des extremums.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 0]$. f coïncide avec $h : x \mapsto \sqrt{x^2+4} - x - 2$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Le calcul de 3. a) vaut pour tout réel x :

$$h'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}},$$

et $h'(0) = -1$. Ainsi $h' < 0$ sur $]-\infty, 0]$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Sur $[0, +\infty[$. f coïncide avec $g : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ (car $g(0) = 0 = f(0)$), dérivable sur $]-1, +\infty[$. La formule de 3. b) donne $g'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$: f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-1 \mid 1$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	décroissante	0	croissante	$+\infty$

En 0 : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$; f n'y est pas dérivable.

Minimum. Pour $x \leq 0$, $f(x) \geq f(0)$ par décroissance ; pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0)$ par croissance. Donc $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout réel x.

La propriété des extremums. Elle affirme : si f admet un extremum local en un point a de I qui n'est pas une borne de I, **et si f est dérivable en** a, alors $f'(a) = 0$. Ici f n'est pas dérivable en 0 (question 1. b)) : une hypothèse manque, et il n'y a aucune contradiction.

Conclusion. f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et $f(0) = 0$ est son minimum sur $\mathbb{R}$. La propriété ne s'applique pas en 0 car f n'y est pas dérivable : un extremum peut être atteint en un point de non-dérivabilité.

4. a) `0,75 pts`

Montre que $f(x) \geq -x$ pour tout $x \leq 0$, et que $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$. Interprète graphiquement ces deux inégalités à l'aide des demi-tangentes obtenues en 1. b).

INDICE

Pour $x \leq 0$, la différence $f(x) - (-x)$ ne contient plus qu'une racine carrée à comparer à 2. Pour $x \geq 0$, factorise $x - f(x)$ par x et compare $\sqrt{x+1}$ à 1.

CORRIGÉ

Pour $x \leq 0$. On a $f(x) - (-x) = \sqrt{x^2+4} - 2$. Comme $x^2 + 4 \geq 4$ et que la racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, $\sqrt{x^2+4} \geq 2$. Donc $f(x) \geq -x$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Pour $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} & x - f(x) \\ &= x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \frac{x\left(\sqrt{x+1} - 1\right)}{\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 1$, ce quotient est positif : $f(x) \leq x$, avec égalité seulement pour $x = 0$.

Interprétation. Sur $]-\infty, 0]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa demi-tangente à gauche $y = -x$; sur $[0, +\infty[$, elle est au-dessous de sa demi-tangente à droite $y = x$. Elle ne les rencontre qu'au point O.

Conclusion. $f(x) \geq -x$ pour tout $x \leq 0$ et $f(x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

4. b) 0,5 pts

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

INDICE

Sépare $x \leq 0$ et $x > 0$. Dans chaque cas, isole la racine carrée, vérifie le signe de l'autre membre avant d'élever au carré, puis contrôle que la valeur trouvée est dans le bon intervalle.

CORRIGÉ

Cas $x \leq 0$. L'équation $f(x) = 1$ s'écrit $\sqrt{x^2+4} = x + 3$. Elle impose $x + 3 \geq 0$; sous cette condition, elle équivaut à :

$$x^2 + 4 = x^2 + 6x + 9,$$

soit $x = -\dfrac{5}{6}$. On a bien $-\dfrac{5}{6} \leq 0$ et $-\dfrac{5}{6} + 3 = \dfrac{13}{6} \geq 0$. Vérification :

$$\sqrt{\frac{25}{36} + 4} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6}.$$

Cas $x > 0$. L'équation s'écrit $x = \sqrt{x+1}$. Les deux membres étant positifs, elle équivaut à $x^2 = x + 1$, soit $x^2 - x - 1 = 0$. Ses racines sont $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, rejetée, et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$, retenue.

Conclusion. L'ensemble des solutions de $f(x) = 1$ est :

$$S = \left\{ -\frac{5}{6}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

4. c) 0,5 pts

Soit m un réel. Détermine, selon les valeurs de m, le nombre de solutions réelles de l'équation $f(x) = m$.

INDICE

Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, f est continue et strictement monotone : détermine l'image de chacun à l'aide de $f(0)$ et des limites de la question 2.

CORRIGÉ

Sur $]-\infty, 0]$**.** f est continue et strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = 0$: elle réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0, +\infty[$.

Sur $[0, +\infty[$**.** f est continue et strictement croissante, avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Discussion.

- Si $m < 0$: m n'appartient à aucune des deux images ; l'équation n'a aucune solution, ce qui confirme le minimum 0.
- Si $m = 0$: chacune des deux bijections donne 0 pour seul antécédent ; l'équation a une seule solution, $x = 0$.
- Si $m > 0$: m a exactement un antécédent dans $]-\infty, 0[$ et exactement un dans $]0, +\infty[$; l'équation a deux solutions, de signes contraires.

Conclusion. L'équation $f(x) = m$ a zéro solution si $m < 0$, une si $m = 0$, deux si $m > 0$. Pour $m = 1$, on retrouve les solutions $-\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ de 4. b).

5. `0,5 pts`

Construis $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite (D) et les deux demi-tangentes en O. Précise les points et les droites que ta construction met en évidence, en t'appuyant sur les valeurs données en introduction.

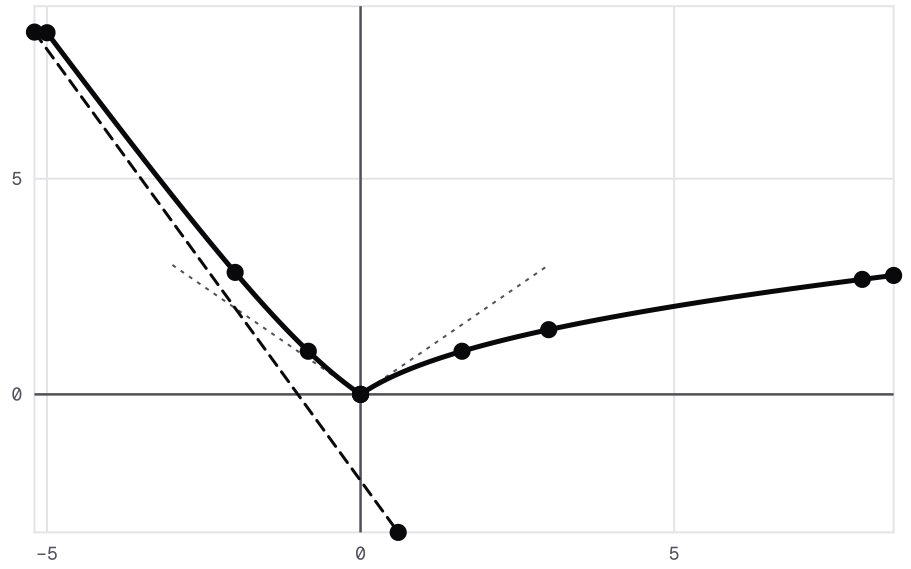
INDICE

Calcule $f(-2)$, $f(3)$ et $f(8)$, place les deux points d'ordonnée 1 de 4. b), puis rassemble tes résultats : point anguleux, asymptote et position, demi-tangentes, branche parabolique.

CORRIGÉ

La figure comporte :

- la droite (D) d'équation $y = -2x - 2$, qui passe par $(-1, 0)$ et $(0, -2)$; elle n'est asymptote à $\mathcal{C}_f$ qu'au voisinage de $-\infty$;
- le point anguleux O, minimum de f, avec ses deux demi-tangentes : $y = -x$ pour $x \leq 0$ et $y = x$ pour $x \geq 0$;
- le point $A\left(-2, 2\sqrt{2}\right)$, car $f(-2) = \sqrt{8} + 2 - 2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$;
- les points $B\left(-\dfrac{5}{6}, 1\right)$ et $C\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, avec $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$;
- les points $E\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$ et $F\left(8, \dfrac{8}{3}\right)$, car $f(3) = \dfrac{3}{2}$ et $f(8) = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}67$;
- à gauche de O, la courbe descend en restant au-dessus de (D) et de la demi-droite $y = -x$, et se rapproche de (D) quand x tend vers $-\infty$;
- à droite de O, elle monte en restant au-dessous de la demi-droite $y = x$, de plus en plus lentement par rapport à x : branche parabolique de direction l'axe des abscisses.



$\mathcal{C}_f$ $\mathcal{C}_f$ (D) Point plein O Point plein A Point plein B Point plein C
Point plein E Point plein F $y = -x$ $y = x$ Point du graphe

Construction attendue : la courbe de f, son point anguleux O, ses deux demi-tangentes, l'asymptote (D) à gauche et les points marqués.