BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Entraînement	9

Exercice 1

Une inégalité prouvée par l'étude d'une différence

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^3 - 27x + 54.$$

1.

Étudier les variations de h sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

INDICE

Dérive h, puis factorise $h'(x)$: sur $[0, +\infty[$, un seul facteur change de signe.

2.

En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x^3 + 54 \geq 27x$, et préciser le cas d'égalité.

INDICE

Lis le minimum de h dans le tableau ; l'égalité correspond aux réels où ce minimum est atteint.

3.

En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{2}{x} \geq 1$.

INDICE

Multiplie l'inégalité cherchée par $27x$, qui est strictement positif : tu dois retrouver la question 2.

Exercice 2

Dérivée nulle sans extremum, et vrai minimum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5.$$

1.

Calculer $f'(x)$ et déterminer les réels en lesquels f' s'annule.

INDICE

Factorise $f'(x)$ par la plus grande puissance de x possible.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. Montrer que f admet un minimum en 2 et donner sa valeur.

INDICE

Étudie le signe de chaque facteur de $f'(x)$: le facteur carré ne compte que là où il s'annule. Regarde ensuite comment f' change de signe en 2.

3.

Montrer que f n'admet pas d'extremum local en 0, bien que $f'(0) = 0$.

INDICE

Factorise $f(x) - f(0)$ par x^3, puis étudie son signe juste à gauche et juste à droite de 0.

Exercice 3

Rolle sur une fonction auxiliaire : une équation trigonométrique

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\sin(3x)$, et l'équation (E) d'inconnue réelle x :

$$\sin(3x) + 3(x-1)\cos(3x) = 0.$$

1.

Vérifier que $1 < \dfrac{\pi}{3}$, puis calculer $g(1)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Utilise $\pi > 3$, puis $\sin\pi = 0$.

2.

Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

INDICE

Calcule $g'(x)$: tu dois retrouver le membre de gauche de (E). Vérifie ensuite les trois hypothèses du théorème de Rolle sur $\left[1, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

3.

En déduire que l'équation $\tan(3x) = 3(1-x)$ admet au moins une solution dans $\left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

INDICE

Pour diviser (E) par $\cos(3x)$, montre d'abord que $\cos(3x) \neq 0$ lorsque $3 < 3x < \pi$, en comparant 3 et $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 4

Encadrer une différence de racines cubiques par le TAF

Dans cet exercice, x désigne un réel strictement positif.

1.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ sur $[x, x+1]$, montrer que :

$$\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} < \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

INDICE

Vérifie d'abord la continuité et la dérivabilité de $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ (dérivée de la racine n-ième). Encadre ensuite $\sqrt[3]{c}$ à partir de $x < c < x+1$.

2.

En déduire que $3 + \frac{1}{30} < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$.

INDICE

Prends $x = 27$. Pour la borne de gauche, compare $\left(\sqrt[3]{28}\right)^2 = \sqrt[3]{784}$ à $\sqrt[3]{1000}$.

3.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right)$.

INDICE

La différence est positive et majorée par une quantité qui tend vers 0 : pense à l'encadrement.

Exercice 5

Encadrer une valeur d'arctangente avec l'IAF

On s'intéresse à la fonction $\arctan$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et au réel $\arctan\dfrac{6}{5}$.

1.

Montrer que, pour tout $t \in \left[1, \dfrac{6}{5}\right]$, $\dfrac{25}{61} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Encadre t^2, puis $1+t^2$, sur cet intervalle de réels positifs ; passe ensuite à l'inverse.

2.

En déduire que $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5}{61} \leq \arctan\dfrac{6}{5} \leq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{10}$, et donner l'amplitude de cet encadrement.

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis (première forme) à $\arctan$ sur $\left[1, \dfrac{6}{5}\right]$, avec $m = \dfrac{25}{61}$ et $M = \dfrac{1}{2}$. Rappel : $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

3.

Montrer que, pour tous réels x et y, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$. En déduire que, pour tout réel x, $\left|\arctan x - \dfrac{\pi}{4}\right| \leq |x - 1|$.

INDICE

Majore $\dfrac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, puis applique la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis ; termine avec $y = 1$.

Exercice 6

Une suite récurrente contractante, pas à pas

Soit $I = [0, 2]$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{4}{x+3}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

Montrer que $f(I) \subset I$ et que 1 est l'unique point fixe de f dans I.

INDICE

Étudie le sens de variation de f sur I, puis calcule les images des bornes. Pour le point fixe, l'équation $f(x) = x$ conduit à un trinôme.

2.

Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.

INDICE

Exprime $|f'(x)|$, puis minore son dénominateur pour $x \in I$.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{4}{9}|u_n - 1|$.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise $f(I) \subset I$. Applique ensuite la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis aux deux points u_n et 1 de I.

4.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$, puis que (u_n) converge vers 1. Vérifier l'inégalité pour $n = 2$.

INDICE

Nouvelle récurrence, avec $|u_0 - 1| = 1$. Pour la limite, utilise $0 \leq \dfrac{4}{9} < 1$, puis une comparaison.

Exercice 7

Bijection, réciproque explicite et demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^4+6x^2$.

1.

Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Factorise $f'(x)$: sur cet intervalle, elle ne s'annule qu'en 0. Ajoute $f(0)$ et la limite en $+\infty$.

2.

Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$, puis justifier que f^{-1} est dérivable en 16 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(16)$.

INDICE

Le calcul de $f\left(\sqrt{2}\right)$ te donne l'antécédent de 16. Vérifie que f' ne s'annule pas en cet antécédent avant d'utiliser la dérivée de la fonction réciproque.

3.

Montrer que la courbe de f^{-1} admet à l'origine une demi-tangente verticale.

INDICE

$f'(0)=0$, et $0=f(0)$ est une borne de $f\left([0,+\infty[\right)$: pense à la propriété sur la dérivée nulle et la tangente verticale de la réciproque.

4.

Montrer que, pour tout $y\geq 0$:

$$f^{-1}(y)=\sqrt{\sqrt{y+9}-3}.$$

Retrouver $\left(f^{-1}\right)'(16)$ à l'aide de cette expression.

INDICE

Résous $x^4+6x^2=y$ en posant $X=x^2$: c'est un trinôme en X. Pour la dérivée, applique la règle de $\sqrt{u}$ avec $u(y)=\sqrt{y+9}-3$.

Exercice 8

Centre de symétrie et branches paraboliques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 4,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + (x-2) + 6$. En déduire que le point $\Omega(2, 6)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Développe $(x-2)^3$. Calcule ensuite $f(4-x) + f(x)$ avec la forme obtenue, puis utilise la caractérisation d'un centre de symétrie avec $a = 2$ et $b = 6$.

2.

Étudier les variations de f et la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. En déduire, grâce à la relation entre $f(4-x)$ et $f(x)$, la branche infinie en $-\infty$.

INDICE

Mets $f'(x)$ sous forme canonique. En $+\infty$, calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. En $-\infty$, écris $f(x)$ à l'aide de $f(4-x)$ et pose $X = 4 - x$.

3.

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

INDICE

Calcule successivement les limites de $g(x)$, de $\dfrac{g(x)}{x}$, puis de $g(x) - 3x$.

Exercice 9

Courbe convexe au-dessus de sa tangente : une inégalité

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout $x>-1$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}$. Calculer ensuite $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x>-1$.

INDICE

Écris $x+3=(x+1)+2$. Dérive ensuite $2(x+1)^{-1}$ avec la règle de u^n, pour $n=-1$ puis $n=-2$.

2.

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-1,+\infty[$.

INDICE

Cherche le signe de $(x+1)^3$ quand $x>-1$, puis relie le signe de f'' à la convexité.

3.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. En déduire que, pour tout $x>-1$, $\dfrac{x+3}{x+1}\geq\dfrac{5-x}{2}$.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$ avec la question 1, puis écris la tangente. Utilise ensuite la définition de la convexité.

4.

Retrouver ce résultat par un calcul direct et préciser le cas d'égalité.

INDICE

Réduis $\dfrac{x+3}{x+1}-\dfrac{5-x}{2}$ au même dénominateur : le numérateur est un carré.