BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Entraînement	9

Exercice 1

Une inégalité prouvée par l'étude d'une différence

Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$h(x) = x^3 - 27x + 54.$$

1.

Étudier les variations de h sur $[0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

INDICE

Dérive h, puis factorise $h'(x)$: sur $[0, +\infty[$, un seul facteur change de signe.

CORRIGÉ

Dérivée. h est une fonction polynôme, donc dérivable sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3x^2 - 27 \\ &= 3(x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

Signe de $h'(x)$. Pour $x \geq 0$, $3(x + 3) > 0$: $h'(x)$ a le signe de $x - 3$. Ainsi $h'(x) < 0$ sur $[0, 3[$, $h'(3) = 0$ et $h'(x) > 0$ sur $]3, +\infty[$.

Variations. Par la propriété F20 (signe de la dérivée et sens de variation), h est strictement décroissante sur $[0, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$. De plus $h(0) = 54$, $h(3) = 27 - 81 + 54 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Conclusion. h est strictement décroissante sur $[0, 3]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$, d'où son tableau de variations :

x	0		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	54	décroissante	0	croissante	$+\infty$

2.

En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $x^3 + 54 \geq 27x$, et préciser le cas d'égalité.

INDICE

Lis le minimum de h dans le tableau ; l'égalité correspond aux réels où ce minimum est atteint.

CORRIGÉ

Minimum de h. D'après le tableau de la question 1, h admet sur $[0, +\infty[$ un minimum égal à $h(3) = 0$. Donc :

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) \geq 0.$$

Pour $x \geq 0$, $h(x) \geq 0$ s'écrit $x^3 - 27x + 54 \geq 0$, c'est-à-dire $x^3 + 54 \geq 27x$.

Cas d'égalité. h est strictement décroissante sur $[0, 3]$: pour $0 \leq x < 3$, $h(x) > h(3) = 0$. Elle est strictement croissante sur $[3, +\infty[$: pour $x > 3$, $h(x) > h(3) = 0$. Donc h ne s'annule qu'en 3.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $x^3 + 54 \geq 27x$, avec égalité si et seulement si $x = 3$.

3.

En déduire que, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{2}{x} \geq 1$.

INDICE

Multiplie l'inégalité cherchée par $27x$, qui est strictement positif : tu dois retrouver la question 2.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. Comme $27x > 0$, multiplier les deux membres par $27x$ conserve le sens de l'inégalité, et $27x\left(\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{2}{x}\right) = x^3 + 54$. Donc :

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{27} + \frac{2}{x} \geq 1 \\ \Leftrightarrow\ &x^3 + 54 \geq 27x. \end{aligned}$$

La seconde inégalité est vraie d'après la question 2, avec égalité pour $x = 3$ seulement.

Conclusion. Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{2}{x} \geq 1$, avec égalité pour $x = 3$.

Exercice 2

Dérivée nulle sans extremum, et vrai minimum

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 5.$$

1.

Calculer $f'(x)$ et déterminer les réels en lesquels f' s'annule.

INDICE

Factorise $f'(x)$ par la plus grande puissance de x possible.

CORRIGÉ

f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 24x^2 \\ &= 12x^2(x-2). \end{aligned}$$

Un produit s'annule exactement quand l'un de ses facteurs s'annule : $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 2$.

Conclusion. $f'(x) = 12x^2(x-2)$ pour tout réel x, et f' s'annule en 0 et en 2, et seulement en ces deux réels.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$. Montrer que f admet un minimum en 2 et donner sa valeur.

INDICE

Étudie le signe de chaque facteur de $f'(x)$: le facteur carré ne compte que là où il s'annule. Regarde ensuite comment f' change de signe en 2.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour $x \neq 0$, $12x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 2$:

- $f'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 2[$;
- $f'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$.

Minimum local en 2. f' s'annule en 2 en passant du signe $-$ au signe $+$. D'après la propriété « extremum et changement de signe de la dérivée » (F21), f admet un minimum local en 2, égal à :

$$f(2) = 48 - 64 + 5 = -11.$$

Minimum sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty, 2]$, et f' ne s'y annule qu'en 0 et en 2. Par la propriété F20 (signe de la dérivée et sens de variation), f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

Conclusion. f admet en 2 un minimum égal à -11, et ce minimum vaut sur tout $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) \geq -11$.

3.

Montrer que f n'admet pas d'extremum local en 0, bien que $f'(0) = 0$.

INDICE

Factorise $f(x) - f(0)$ par x^3, puis étudie son signe juste à gauche et juste à droite de 0.

CORRIGÉ

Écart à $f(0)$. $f(0) = 5$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= 3x^4 - 8x^3 \\ &= x^3(3x - 8). \end{aligned}$$

Signe près de 0.

- Pour $x < 0$: $x^3 < 0$ et $3x - 8 < 0$, donc $f(x) > f(0)$.
- Pour $0 < x < \dfrac{8}{3}$: $x^3 > 0$ et $3x - 8 < 0$, donc $f(x) < f(0)$.

Tout intervalle ouvert contenant 0 contient donc des réels où f dépasse $f(0)$ et des réels où elle lui est inférieure : $f(0)$ n'est ni un maximum local ni un minimum local de f.

Conclusion. f n'admet pas d'extremum local en 0, bien que $f'(0) = 0$: la dérivée s'annule en 0 sans y changer de signe, puisqu'elle est négative de part et d'autre.

Exercice 3

Rolle sur une fonction auxiliaire : une équation trigonométrique

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\sin(3x)$, et l'équation (E) d'inconnue réelle x :

$$\sin(3x) + 3(x-1)\cos(3x) = 0.$$

1.

Vérifier que $1 < \dfrac{\pi}{3}$, puis calculer $g(1)$ et $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

INDICE

Utilise $\pi > 3$, puis $\sin\pi = 0$.

CORRIGÉ

Comme $\pi > 3$, on a $\dfrac{\pi}{3} > 1$. Ensuite :

$$g(1) = 0 \times \sin 3 = 0,$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\sin\pi = 0.$$

Conclusion. $1 < \dfrac{\pi}{3}$ et $g(1) = g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

2.

Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

INDICE

Calcule $g'(x)$: tu dois retrouver le membre de gauche de (E). Vérifie ensuite les trois hypothèses du théorème de Rolle sur $\left[1, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

CORRIGÉ

Dérivée de g. Les fonctions $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto \sin(3x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc leur produit g aussi ; en particulier, g est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$g'(x) = \sin(3x) + 3(x-1)\cos(3x).$$

Hypothèses du théorème de Rolle.

- g est continue sur $\left[1, \dfrac{\pi}{3}\right]$;
- g est dérivable sur $\left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$;
- $g(1) = g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ (question 1).

Application. D'après le théorème de Rolle (F18), il existe $c \in \left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$ tel que $g'(c) = 0$. D'après le calcul de g', cela signifie exactement que c est solution de (E).

Conclusion. L'équation (E) admet au moins une solution c dans $\left]1, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

3.

En déduire que l'équation $\tan(3x) = 3(1-x)$ admet au moins une solution dans $\left]1, \frac{\pi}{3}\right[$.

INDICE

Pour diviser (E) par $\cos(3x)$, montre d'abord que $\cos(3x) \neq 0$ lorsque $3 < 3x < \pi$, en comparant 3 et $\frac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ

Signe de $\cos(3x)$. Soit $x \in \left]1, \frac{\pi}{3}\right[$. Alors $3 < 3x < \pi$. Comme $\pi < 6$, on a $\frac{\pi}{2} < 3$, donc $3x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et $\cos(3x) < 0$. En particulier, $\cos(3x) \neq 0$.

Équation équivalente. Pour un tel x, on peut diviser les deux membres de (E) par $\cos(3x)$, et $\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \tan(3x)$. Ainsi x est solution de (E) si et seulement si :

$$\tan(3x) + 3(x-1) = 0,$$

c'est-à-dire $\tan(3x) = 3(1-x)$.

Application. Le réel c de la question 2 appartient à $\left]1, \frac{\pi}{3}\right[$ et vérifie (E) : il vérifie donc $\tan(3c) = 3(1-c)$.

Conclusion. L'équation $\tan(3x) = 3(1-x)$ admet au moins une solution dans $\left]1, \frac{\pi}{3}\right[$.

Exercice 4

Encadrer une différence de racines cubiques par le TAF

Dans cet exercice, x désigne un réel strictement positif.

1.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ sur $[x, x+1]$, montrer que :

$$\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} < \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} < \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

INDICE

Vérifie d'abord la continuité et la dérivabilité de $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ (dérivée de la racine n-ième). Encadre ensuite $\sqrt[3]{c}$ à partir de $x < c < x+1$.

CORRIGÉ

Hypothèses du théorème des accroissements finis. Soit $\varphi : t \mapsto \sqrt[3]{t}$. La racine cubique est continue sur $[0, +\infty[$ et, d'après la dérivée de la racine n-ième (F14), dérivable sur $]0, +\infty[$, avec, pour tout $t > 0$:

$$\varphi'(t) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{t}\right)^2}.$$

Comme $x > 0$, φ est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$.

Application. D'après le théorème des accroissements finis (F19), il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $\varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(c) \times 1$, soit :

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{c}\right)^2}.$$

Encadrement de $\varphi'(c)$. On a $0 < x < c < x+1$, et la racine cubique est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$0 < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{c} < \sqrt[3]{x+1}.$$

La fonction carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et la fonction inverse strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc :

$$\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2} < \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{c}\right)^2} < \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

Conclusion. Le terme central est égal à $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$: on obtient l'encadrement demandé.

2.

En déduire que $3+\dfrac{1}{30}<\sqrt[3]{28}<3+\dfrac{1}{27}$.

INDICE

Prends $x=27$. Pour la borne de gauche, compare $\left(\sqrt[3]{28}\right)^2=\sqrt[3]{784}$ à $\sqrt[3]{1000}$.

CORRIGÉ

Majoration. Pour $x=27$, on a $\sqrt[3]{27}=3$ et $x+1=28$. La question 1 donne :

$$\sqrt[3]{28}-3<\frac{1}{3\times 3^2}=\frac{1}{27}.$$

Minoration. La question 1 donne aussi :

$$\sqrt[3]{28}-3>\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{28}\right)^2}.$$

Or $\left(\sqrt[3]{28}\right)^2=\sqrt[3]{784}$ et $784<1000$; la racine cubique étant strictement croissante, $\sqrt[3]{784}<\sqrt[3]{1000}=10$. Ainsi $0<3\left(\sqrt[3]{28}\right)^2<30$, puis, en passant à l'inverse, $\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{28}\right)^2}>\dfrac{1}{30}$.

Conclusion. $3+\dfrac{1}{30}<\sqrt[3]{28}<3+\dfrac{1}{27}$.

3.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

INDICE

La différence est positive et majorée par une quantité qui tend vers 0 : pense à l'encadrement.

CORRIGÉ

Encadrement. Pour tout $x>0$, la question 1 donne, le minorant étant strictement positif, $0<\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}<\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Limite du majorant. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}=0$.

Conclusion. Par encadrement (théorème des gendarmes) :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0.$$

Exercice 5

Encadrer une valeur d'arctangente avec l'IAF

On s'intéresse à la fonction $\arctan$, dérivable sur $\mathbb{R}$, et au réel $\arctan\dfrac{6}{5}$.

1.

Montrer que, pour tout $t \in \left[1, \dfrac{6}{5}\right]$, $\dfrac{25}{61} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

INDICE

Encadre t^2, puis $1+t^2$, sur cet intervalle de réels positifs ; passe ensuite à l'inverse.

CORRIGÉ

Soit $t \in \left[1, \dfrac{6}{5}\right]$. Comme $t \geq 0$ et que la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$:

$$1 \leq t^2 \leq \frac{36}{25},$$

donc :

$$2 \leq 1+t^2 \leq \frac{61}{25}.$$

Ces nombres sont strictement positifs et la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$: en passant à l'inverse, on renverse les inégalités.

Conclusion. Pour tout $t \in \left[1, \dfrac{6}{5}\right]$, $\dfrac{25}{61} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

2.

En déduire que $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{61}\leq \arctan\frac{6}{5}\leq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}$, et donner l'amplitude de cet encadrement.

INDICE

Applique l'inégalité des accroissements finis (première forme) à $\arctan$ sur $\left[1,\frac{6}{5}\right]$, avec $m=\frac{25}{61}$ et $M=\frac{1}{2}$. Rappel : $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Hypothèses. $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\left[1,\frac{6}{5}\right]$ et dérivable sur $\left]1,\frac{6}{5}\right[$. D'après la dérivée de la fonction arctangente (F16), $\arctan'(t)=\frac{1}{1+t^2}$ pour tout réel t. La question 1 donne donc $\frac{25}{61}\leq \arctan'(t)\leq \frac{1}{2}$ pour tout $t\in\left]1,\frac{6}{5}\right[$.

Inégalité des accroissements finis. Ici $b-a=\frac{6}{5}-1=\frac{1}{5}$, donc $m(b-a)=\frac{25}{61}\times\frac{1}{5}=\frac{5}{61}$ et $M(b-a)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$. D'après la première forme de l'inégalité des accroissements finis (F22) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{61}&\leq \arctan\frac{6}{5}-\arctan 1\\&\leq \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Comme $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$, on obtient $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{61}\leq \arctan\frac{6}{5}\leq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}$.

Amplitude.

$$\frac{1}{10}-\frac{5}{61}=\frac{61-50}{610}=\frac{11}{610}.$$

Conclusion. $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{61}\leq \arctan\frac{6}{5}\leq \frac{\pi}{4}+\frac{1}{10}$, encadrement d'amplitude $\frac{11}{610}$.

3.

Montrer que, pour tous réels x et y, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$. En déduire que, pour tout réel x, $\left|\arctan x - \frac{\pi}{4}\right| \leq |x - 1|$.

INDICE

Majore $\frac{1}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, puis applique la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis ; termine avec $y = 1$.

CORRIGÉ

Majoration de la dérivée. Pour tout réel t, $1 + t^2 \geq 1$, donc $0 < \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} \leq 1$. Ainsi $|\arctan'(t)| \leq 1$ pour tout réel t.

Inégalité des accroissements finis. $\arctan$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis (F22), avec $M = 1$, pour tous réels x et y :

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

Cas $y = 1$. Soit x un réel. Avec $y = 1$ et $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, on obtient $\left|\arctan x - \frac{\pi}{4}\right| \leq |x - 1|$.

Conclusion. Pour tous réels x et y, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$; en particulier, pour tout réel x, $\left|\arctan x - \frac{\pi}{4}\right| \leq |x - 1|$.

Exercice 6

Une suite récurrente contractante, pas à pas

Soit $I = [0, 2]$ et f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{4}{x+3}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.

Montrer que $f(I) \subset I$ et que 1 est l'unique point fixe de f dans I.

INDICE

Étudie le sens de variation de f sur I, puis calcule les images des bornes. Pour le point fixe, l'équation $f(x) = x$ conduit à un trinôme.

CORRIGÉ

Variations de f. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I : elle est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\dfrac{4}{(x+3)^2} < 0$. Donc f est continue et strictement décroissante sur I.

Image de I. Par conséquent, $f(I) = [f(2), f(0)]$, c'est-à-dire :

$$f(I) = \left[\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right] \subset [0, 2].$$

Point fixe. Soit $x \in I$. Comme $x + 3 > 0$:

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & 4 = x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow\ & (x-1)(x+4) = 0. \end{aligned}$$

Comme $-4 \notin I$, la seule solution dans I est 1.

Conclusion. $f(I) \subset I$, et 1 est l'unique point fixe de f dans I.

2.

Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.

INDICE

Exprime $|f'(x)|$, puis minore son dénominateur pour $x \in I$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [0, 2]$. Alors $x + 3 \geq 3 > 0$, donc $(x+3)^2 \geq 9$ et :

$$|f'(x)| = \frac{4}{(x+3)^2} \leq \frac{4}{9}.$$

Conclusion. Pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{4}{9}$.

3.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{9}|u_n - 1|$.

INDICE

Pour l'hérédité, utilise $f(I) \subset I$. Applique ensuite la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis aux deux points u_n et 1 de I.

CORRIGÉ

Récurrence. Initialisation : $u_0 = 2 \in I$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in I$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I)$ et $f(I) \subset I$ (question 1), donc $u_{n+1} \in I$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Inégalité. Soit $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur l'intervalle I, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$ pour tout $x \in I$ (question 2), et u_n et 1 appartiennent à I. D'après la seconde forme de l'inégalité des accroissements finis (F22) :

$$|f(u_n) - f(1)| \leq \frac{4}{9}|u_n - 1|.$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{9}|u_n - 1|$.

4.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$, puis que (u_n) converge vers 1. Vérifier l'inégalité pour $n = 2$.

INDICE

Nouvelle récurrence, avec $|u_0 - 1| = 1$. Pour la limite, utilise $0 \leq \frac{4}{9} < 1$, puis une comparaison.

CORRIGÉ

Récurrence. Initialisation : $|u_0 - 1| = 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$. D'après la question 3 :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 1| &\leq \frac{4}{9}|u_n - 1| \\ &\leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Convergence. Comme $0 \leq \frac{4}{9} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$. Par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$: la suite (u_n) converge vers 1.

Vérification pour $n = 2$. $u_1 = f(2) = \frac{4}{5}$ et $u_2 = f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{20}{19}$. Donc :

$$|u_2 - 1| = \frac{1}{19} \approx 0{,}053,$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} \approx 0{,}198.$$

On a bien $\frac{1}{19} \leq \frac{16}{81}$, car $81 \leq 16 \times 19 = 304$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$; la suite (u_n) converge vers 1, et l'inégalité est bien vérifiée pour $n = 2$.

Exercice 7

Bijection, réciproque explicite et demi-tangente verticale

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^4+6x^2$.

1.

Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

INDICE

Factorise $f'(x)$: sur cet intervalle, elle ne s'annule qu'en 0. Ajoute $f(0)$ et la limite en $+\infty$.

CORRIGÉ

Dérivée. f est une fonction polynôme, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x\geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3+12x \\ &= 4x(x^2+3). \end{aligned}$$

Variations. Pour $x>0$, $f'(x)>0$, et $f'(0)=0$: f' est positive sur $[0,+\infty[$ et ne s'y annule qu'en 0. Par la propriété F20 (signe de la dérivée et sens de variation), f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Image. $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Comme f est continue et strictement croissante, $f\left([0,+\infty[\right)=[0,+\infty[$.

Conclusion. f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

2.

Calculer $f\left(\sqrt{2}\right)$, puis justifier que f^{-1} est dérivable en 16 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(16)$.

INDICE

Le calcul de $f\left(\sqrt{2}\right)$ te donne l'antécédent de 16. Vérifie que f' ne s'annule pas en cet antécédent avant d'utiliser la dérivée de la fonction réciproque.

CORRIGÉ

Antécédent de 16. $f\left(\sqrt{2}\right)=4+6\times 2=16$, donc $f^{-1}(16)=\sqrt{2}$.

Dérivabilité. $f'\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}\times(2+3)=20\sqrt{2}$, qui n'est pas nul. f est continue, strictement croissante et dérivable sur $[0,+\infty[$: d'après la dérivée de la fonction réciproque (F12), f^{-1} est dérivable en 16.

Calcul.

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(16) &= \frac{1}{f'\left(\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{1}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{40}. \end{aligned}$$

Conclusion. $f\left(\sqrt{2}\right)=16$, f^{-1} est dérivable en 16 et $\left(f^{-1}\right)'(16)=\dfrac{\sqrt{2}}{40}$.

3.

Montrer que la courbe de f^{-1} admet à l'origine une demi-tangente verticale.

INDICE

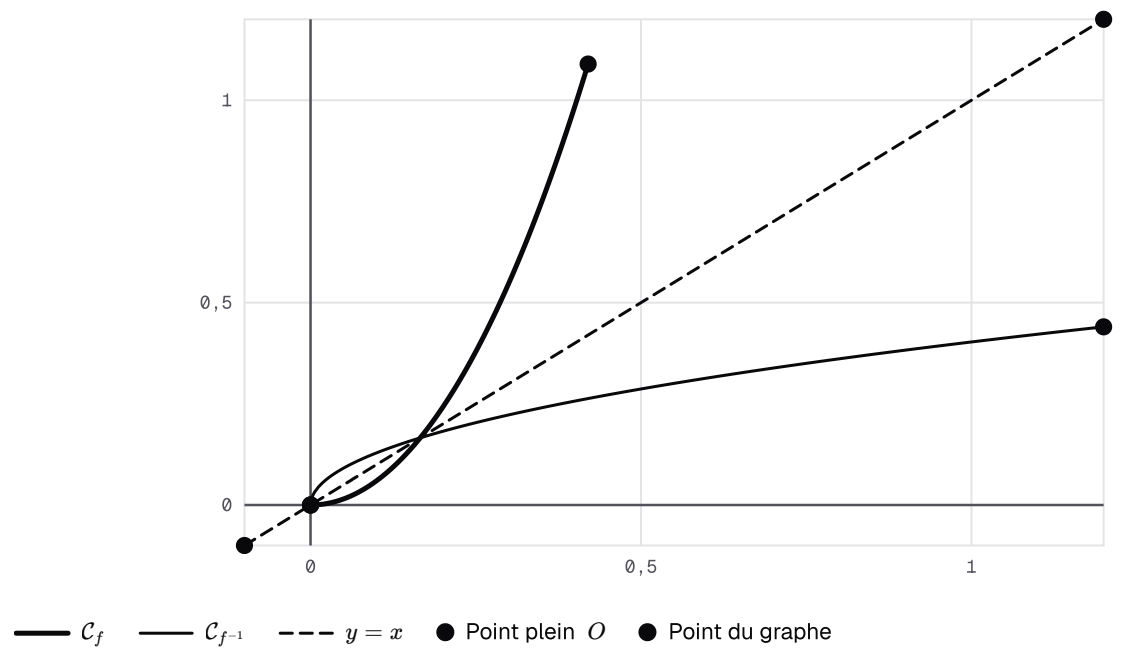
$f'(0) = 0$, et $0 = f(0)$ est une borne de $f\left([0, +\infty[\right)$: pense à la propriété sur la dérivée nulle et la tangente verticale de la réciproque.

CORRIGÉ

f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, dérivable (à droite) en 0, et $f'(0) = 0$. D'après la propriété « dérivée nulle et tangente verticale de la réciproque » (F13), f^{-1} n'est pas dérivable en $f(0) = 0$.

Comme 0 est une borne de $f\left([0, +\infty[\right) = [0, +\infty[$, la même propriété donne une demi-tangente verticale au point $(f(0), 0) = (0, 0)$ de la courbe de f^{-1}.

Conclusion. La courbe de f^{-1} admet à l'origine une demi-tangente verticale.



Courbe de la réciproque de f(x) = x⁴ + 6x² : elle quitte l'origine à la verticale, symétrique de la courbe de f, qui y part à l'horizontale.

4.

Montrer que, pour tout $y \geq 0$:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\sqrt{y+9} - 3}.$$

Retrouver $\left(f^{-1}\right)'(16)$ à l'aide de cette expression.

INDICE

Résous $x^4 + 6x^2 = y$ en posant $X = x^2$: c'est un trinôme en X. Pour la dérivée, applique la règle de $\sqrt{u}$ avec $u(y) = \sqrt{y+9} - 3$.

CORRIGÉ

Expression de f^{-1}. Soit $y \geq 0$ et $x \geq 0$; posons $X = x^2$, de sorte que $X \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & X^2 + 6X = y \\ \Leftrightarrow\ & (X+3)^2 = y + 9. \end{aligned}$$

Comme $X + 3 > 0$, cela équivaut à $X + 3 = \sqrt{y+9}$, soit $X = \sqrt{y+9} - 3$, nombre positif car $y + 9 \geq 9$. Comme $x \geq 0$, $x = \sqrt{X}$. Ainsi :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\sqrt{y+9} - 3}.$$

Dérivée. Pour $y > 0$, posons $u(y) = \sqrt{y+9} - 3$. La fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $u(y) > 0$ et $u'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y+9}}$. D'après la dérivée de $\sqrt{u}$ (dérivées composées usuelles, F11), pour tout $y > 0$:

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y) &= \frac{u'(y)}{2\sqrt{u(y)}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{y+9}\,\sqrt{u(y)}}. \end{aligned}$$

En $y = 16$. $\sqrt{25} = 5$ et $u(16) = 5 - 3 = 2$, donc $\left(f^{-1}\right)'(16) = \dfrac{1}{4 \times 5 \times \sqrt{2}} = \dfrac{1}{20\sqrt{2}}$.

Conclusion. Pour tout $y \geq 0$, $f^{-1}(y) = \sqrt{\sqrt{y+9} - 3}$, et l'on retrouve $\left(f^{-1}\right)'(16) = \dfrac{1}{20\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{40}$, comme à la question 2.

Exercice 8

Centre de symétrie et branches paraboliques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 4,$$

et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + (x-2) + 6$. En déduire que le point $\Omega(2, 6)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

INDICE

Développe $(x-2)^3$. Calcule ensuite $f(4-x) + f(x)$ avec la forme obtenue, puis utilise la caractérisation d'un centre de symétrie avec $a = 2$ et $b = 6$.

CORRIGÉ

Autre écriture de f. Pour tout réel x, $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, donc :

$$\begin{aligned} &(x-2)^3 + (x-2) + 6 \\ &= x^3 - 6x^2 + 13x - 4 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Calcul de $f(4-x) + f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$; alors $4 - x \in \mathbb{R}$. Posons $t = x - 2$: on a $(4-x) - 2 = -t$, donc :

$$\begin{aligned} f(4-x) &= -t^3 - t + 6, \\ f(x) &= t^3 + t + 6. \end{aligned}$$

En additionnant, $f(4-x) + f(x) = 12 = 2 \times 6$.

Conclusion. Pour tout réel x, $f(x) = (x-2)^3 + (x-2) + 6$. De plus, pour tout réel x, $2 \times 2 - x \in \mathbb{R}$ et $f(2 \times 2 - x) + f(x) = 2 \times 6$: d'après la caractérisation d'un centre de symétrie (F31), $\Omega(2, 6)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

2.

Étudier les variations de f et la branche infinie de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. En déduire, grâce à la relation entre $f(4-x)$ et $f(x)$, la branche infinie en $-\infty$.

INDICE

Mets $f'(x)$ sous forme canonique. En $+\infty$, calcule la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. En $-\infty$, écris $f(x)$ à l'aide de $f(4-x)$ et pose $X = 4-x$.

CORRIGÉ

Variations. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 13 \\ &= 3(x-2)^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

Par la propriété F20 (signe de la dérivée et sens de variation), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Branche en $+\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et, pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = x^2 - 6x + 13 - \frac{4}{x},$$

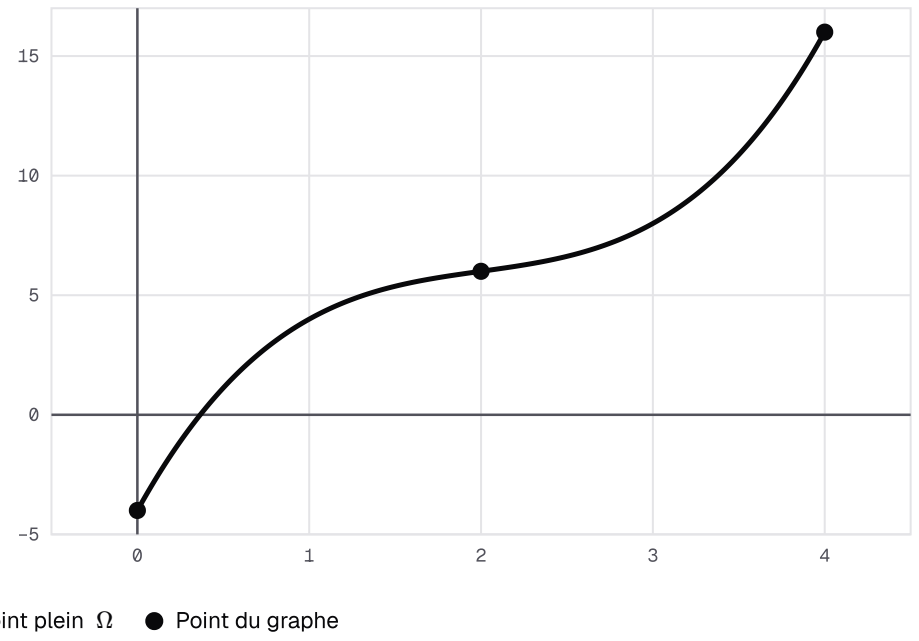
qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. D'après la propriété des branches paraboliques (F29), $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Branche en $-\infty$. D'après la question 1, $f(x) = 12 - f(4-x)$ pour tout réel x. Posons $X = 4-x$: quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$, donc $f(x) = 12 - f(X)$ tend vers $-\infty$. Pour $x < 0$, on a $X > 4$ et :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{12 - f(X)}{4 - X} \\ &= \frac{f(X) - 12}{X - 4}. \end{aligned}$$

En divisant numérateur et dénominateur par X, ce quotient s'écrit $\dfrac{\frac{f(X)}{X} - \frac{12}{X}}{1 - \frac{4}{X}}$: il tend vers $+\infty$, car $\dfrac{f(X)}{X}$ tend vers $+\infty$. D'après la propriété des branches paraboliques (F29), écrite au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Conclusion. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ admet, en $+\infty$ comme en $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées : la symétrie de centre Ω transporte la branche en $+\infty$ sur la branche en $-\infty$.



Courbe de f, toujours croissante, symétrique par rapport à son point Ω(2, 6).

3.

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

INDICE

Calcule successivement les limites de $g(x)$, de $\dfrac{g(x)}{x}$, puis de $g(x) - 3x$.

CORRIGÉ

Limite de g. Pour $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}\,(3\sqrt{x} - 2)$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Limite de $\dfrac{g(x)}{x}$. Pour $x > 0$, $\dfrac{g(x)}{x} = 3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, qui tend vers 3, réel non nul.

Limite de $g(x) - 3x$. $g(x) - 3x = -2\sqrt{x}$, qui tend vers $-\infty$.

Conclusion. D'après la propriété des branches paraboliques (F29), $\mathcal{C}_g$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = 3x$.

Exercice 9

Courbe convexe au-dessus de sa tangente : une inégalité

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout $x>-1$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}$. Calculer ensuite $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x>-1$.

INDICE

Écris $x+3=(x+1)+2$. Dérive ensuite $2(x+1)^{-1}$ avec la règle de u^n, pour $n=-1$ puis $n=-2$.

CORRIGÉ

Écriture de f. Soit $x>-1$. Alors $x+1\neq 0$ et $x+3=(x+1)+2$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\frac{2}{x+1} \\ &= 1+2(x+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Dérivées. La fonction $u:x\mapsto x+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, avec $u'(x)=1$. D'après la dérivée de u^n pour un entier n négatif (dérivées composées usuelles, F11), f est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ et, pour tout $x>-1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x+1)^{-2} \\ &= -\frac{2}{(x+1)^2}, \\ f''(x) &= 4(x+1)^{-3} \\ &= \frac{4}{(x+1)^3}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x>-1$, $f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}$, $f'(x)=-\dfrac{2}{(x+1)^2}$ et $f''(x)=\dfrac{4}{(x+1)^3}$.

2.

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ sur $]-1,+\infty[$.

INDICE

Cherche le signe de $(x+1)^3$ quand $x>-1$, puis relie le signe de f'' à la convexité.

CORRIGÉ

Pour tout $x>-1$, $x+1>0$, donc $(x+1)^3>0$ et $f''(x)>0$. D'après la propriété « dérivée seconde et convexité » (F25), $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

3.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1. En déduire que, pour tout $x > -1$, $\dfrac{x+3}{x+1} \geq \dfrac{5-x}{2}$.

INDICE

Calcule $f(1)$ et $f'(1)$ avec la question 1, puis écris la tangente. Utilise ensuite la définition de la convexité.

CORRIGÉ

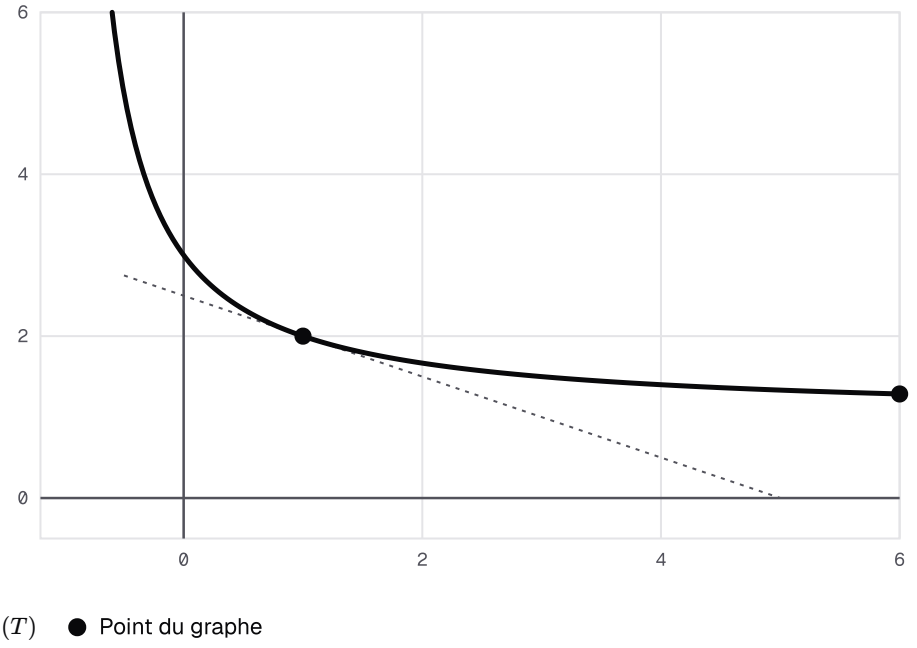
Tangente. $f(1) = \dfrac{4}{2} = 2$ et $f'(1) = -\dfrac{2}{2^2} = -\dfrac{1}{2}$. Une équation de (T) est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x-1) + 2 \\ &= \frac{5-x}{2}. \end{aligned}$$

Position. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-1, +\infty[$ (question 2) : par définition de la convexité (F24), elle est au-dessus de chacune de ses tangentes. Pour tout $x > -1$:

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1).$$

Conclusion. (T) : $y = \dfrac{5-x}{2}$ et, pour tout $x > -1$, $\dfrac{x+3}{x+1} \geq \dfrac{5-x}{2}$.



Courbe convexe de f(x) = (x + 3)/(x + 1) et sa tangente (T) : y = (5 - x)/2 au point d'abscisse 1 ; la courbe reste au-dessus.

4.

Retrouver ce résultat par un calcul direct et préciser le cas d'égalité.

INDICE

Réduis $\dfrac{x+3}{x+1} - \dfrac{5-x}{2}$ au même dénominateur : le numérateur est un carré.

CORRIGÉ

Numérateur. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &2(x+3) - (5-x)(x+1) \\ &= 2x + 6 + x^2 - 4x - 5 \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2. \end{aligned}$$

Différence. Soit $x > -1$. En réduisant au même dénominateur $2(x+1)$:

$$\frac{x+3}{x+1} - \frac{5-x}{2} = \frac{(x-1)^2}{2(x+1)}.$$

Signe. $(x-1)^2 \geq 0$ et $2(x+1) > 0$: la différence est positive, et nulle si et seulement si $x = 1$.

Conclusion. Pour tout $x > -1$, $\dfrac{x+3}{x+1} \geq \dfrac{5-x}{2}$, avec égalité si et seulement si $x = 1$, abscisse du point de contact de (T) avec $\mathcal{C}_f$.