BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Application	12

Exercice 1

Dérivabilité à droite d'une fonction prolongée en 0

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{3x}.$$

On rappelle que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

1.

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Fais apparaître le quotient $\frac{1 - \cos(4x)}{(4x)^2}$ dans l'écriture de $f(x)$; le facteur qui reste doit tendre vers 0.

2.

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

INDICE

Forme le taux $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ pour $x > 0$: le dénominateur devient $3x^2$. Fais de nouveau apparaître $(4x)^2$.

3.

Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.

INDICE

Une dérivée à droite finie donne une demi-tangente au point $O(0, f(0))$: écris son équation, sans oublier la condition sur x.

Exercice 2

Un point anguleux : continue sans être dérivable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{5x - 1}{x + 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1.

Montrer que f est continue en 1.

INDICE

Calcule $f(1)$, puis la limite à droite de $\dfrac{5x-1}{x+1}$ en 1. À gauche, f coïncide avec un polynôme.

2.

Calculer $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.

INDICE

Pour $x < 1$, le numérateur du taux se factorise par $(x-1)$. Pour $x > 1$, réduis $\dfrac{5x-1}{x+1} - 2$ au même dénominateur avant de diviser par $x - 1$.

3.

Conclure sur la dérivabilité de f en 1 et décrire $\mathcal{C}_f$ au point $A(1, 2)$.

INDICE

Compare les deux nombres dérivés latéraux. S'ils diffèrent, le point de la courbe porte un nom précis.

Exercice 3

Tangente et valeur approchée d'une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+13}$.

1.

Justifier que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Pose $u(x) = 3x + 13$: sur cet intervalle ouvert, $u(x) > 0$, et la dérivée de $\sqrt{u}$ s'applique.

2.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

INDICE

Calcule $f(4)$ et $f'(4)$, puis remplace dans $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.

3.

À l'aide de l'approximation affine de f au voisinage de 4, donner une valeur approchée de $\sqrt{25{,}06}$.

INDICE

Cherche le réel h tel que $3 \times (4+h) + 13 = 25{,}06$, puis applique l'approximation affine de f en 4.

Exercice 4

Trois dérivées composées, justifiées

Pour chacune des fonctions suivantes, justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$, puis calculer la dérivée.

1.

$f(x) = (2x^2 - x + 3)^4$.

INDICE

C'est u^4 avec $u(x) = 2x^2 - x + 3$; le facteur $u'(x)$ ne doit pas disparaître.

2.

$g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

INDICE

Avant la règle de la racine, prouve que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout réel x grâce à la forme canonique.

3.

$h(x) = \cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$; écrire $h'(x)$ à l'aide de $\sin\left(6x + \dfrac{2\pi}{5}\right)$.

INDICE

$h = w^2$ avec $w(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$, et w est elle-même une composée. Termine avec $2\sin a \cos a = \sin(2a)$.

Exercice 5

Nombre dérivé d'une réciproque en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$.

1.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Étudie le signe de $f'(x)$, puis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; n'oublie pas la continuité.

2.

Calculer $f(2)$, puis justifier que f^{-1} est dérivable en 18 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(18)$.

INDICE

Le calcul de $f(2)$ te donne l'antécédent de 18. Vérifie que f' ne s'annule pas en cet antécédent : on divise par f' en l'antécédent, jamais en 18.

3.

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 18.

INDICE

Le point de contact est $\left(18, f^{-1}(18)\right)$; sa pente vient de la question 2.

Exercice 6

Racine cubique et puissance rationnelle d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 11}$ sur $\mathbb{R}$;
- $g(x) = (5 - 2x)^{\frac{3}{4}}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$.

1.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Écris $x^2 + 6x + 11$ sous forme canonique pour prouver qu'il reste strictement positif, puis dérive sa racine cubique.

2.

Calculer $f'(2)$.

INDICE

Calcule d'abord la valeur de $x^2 + 6x + 11$ en 2 : c'est un cube parfait.

3.

Justifier que g est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$, calculer $g'(x)$, puis $g'\left(-\dfrac{11}{2}\right)$.

INDICE

La dérivée d'une puissance rationnelle de $5 - 2x$ exige $5 - 2x > 0$: c'est la raison du choix de l'intervalle. Garde le facteur -2 de la dérivée intérieure.

Exercice 7

Arctangente d'un trinôme : dérivée et variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(2x^2 - 6x + 1)$.

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

La dérivée de $\arctan u$ ne demande que la dérivabilité de u : aucune condition de signe sur u.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

INDICE

Le dénominateur est strictement positif : seul $4x - 6$ décide du signe. Pour les limites, cherche celles de $u(x)$, puis compose avec $\arctan$.

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

INDICE

$\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$: l'équation se ramène à $2x^2 - 6x + 1 = 1$.

Exercice 8

Rolle : hypothèses vérifiées, hypothèse manquante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x$, et g la fonction définie sur $[1, 4]$ par :

$$g(x) = 4 - \sqrt[3]{(2x-5)^2}.$$

1.

Vérifier que $f(1) = f\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

INDICE

Factorise $f(x)$ par x, puis cherche les racines du trinôme qui reste.

2.

Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]1, \dfrac{7}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$, puis déterminer c.

INDICE

Vérifie une à une les trois hypothèses du théorème de Rolle. Pour trouver c, résous $f'(x) = 0$ et ne garde que la racine de l'intervalle ouvert.

3.

Vérifier que $g(1) = g(4)$ et calculer $g'(x)$ pour $x \in [1, 4]$ avec $x \neq \dfrac{5}{2}$.

INDICE

Pour $x \neq \dfrac{5}{2}$, $(2x-5)^2$ est strictement positif : la dérivée de la racine cubique s'applique.

4.

Étudier la dérivabilité de g en $\dfrac{5}{2}$. Expliquer pourquoi le théorème de Rolle ne s'applique pas à g sur $[1, 4]$.

INDICE

Pose $t = 2x - 5$ dans le taux $\dfrac{g(x) - g\left(\frac{5}{2}\right)}{x - \frac{5}{2}}$, puis distingue $t > 0$ et $t < 0$.

Exercice 9

Accroissements finis sur un polynôme : localiser c

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 - x$.

1.

Justifier qu'il existe $c \in \,]-1, 2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$.

INDICE

Deux hypothèses à vérifier pour le théorème des accroissements finis : continuité sur le segment, dérivabilité sur l'intervalle ouvert.

2.

Calculer $f(2)$ et $f(-1)$, puis déterminer toutes les valeurs possibles de c.

INDICE

Calcule la pente de la corde $\dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$, puis résous l'équation « $f'(x)$ égale cette pente » ; ne garde que les solutions de $]-1, 2[$.

3.

Montrer que $\dfrac{2}{3} < c < 1$.

INDICE

Encadre $\sqrt{37}$ entre deux entiers consécutifs.

Exercice 10

Inégalité des accroissements finis sur une fraction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$.

1.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

C'est un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) = x^2+5$, qui ne s'annule jamais.

2.

Montrer que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$ pour tout réel x.

INDICE

Majore d'abord $|5 - x^2|$ par x^2+5, puis simplifie une fois par x^2+5.

3.

En déduire que, pour tous réels x et y, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{2}{5}|x-y|$, puis que $|f(x)| \leq \dfrac{2}{5}|x|$.

INDICE

Utilise l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $\mathbb{R}$, puis choisis pour y un point où f est connue.

Exercice 11

Asymptote oblique d'une fraction et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Déterminer trois réels a, b et r tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{r}{x - 1}$.

INDICE

Développe $(ax + b)(x - 1) + r$ et identifie les coefficients avec ceux de $2x^2 - 3x + 4$.

2.

Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Pour une asymptote oblique, il suffit de montrer que $f(x) - (2x - 1)$ tend vers 0.

3.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D). Quelle autre asymptote $\mathcal{C}_f$ possède-t-elle ?

INDICE

Le signe de $\dfrac{3}{x - 1}$ est celui de $x - 1$. Pour l'autre asymptote, étudie les limites de f à gauche et à droite de 1.

Exercice 12

Concavité d'un polynôme de degré 4 et points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.

INDICE

Dérive deux fois, puis factorise $f''(x)$ par 12 : il reste un trinôme à racines entières.

2.

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion.

INDICE

Le signe de f'' donne la concavité sur chaque intervalle ; pour un point d'inflexion, f'' doit s'annuler en changeant de signe.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^4 + 2x$. Montrer que $g''(1) = 0$, mais que le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1 n'est pas un point d'inflexion.

INDICE

Calcule $g''(x)$ et regarde son signe autour de 1. Pour exclure l'inflexion, compare la courbe à sa tangente en 1, des deux côtés.