BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Application	12

Exercice 1

Dérivabilité à droite d'une fonction prolongée en 0

On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{3x}.$$

On rappelle que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

1.

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Fais apparaître le quotient $\frac{1 - \cos(4x)}{(4x)^2}$ dans l'écriture de $f(x)$; le facteur qui reste doit tendre vers 0.

CORRIGÉ

Écriture de $f(x)$. Pour $t \neq 0$, posons $\varphi(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$; d'après la limite rappelée, $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Comme $(4x)^2 = 16x^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{16x^2}{3x}\, \varphi(4x) \\ &= \frac{16x}{3}\, \varphi(4x). \end{aligned}$$

Limite en 0^+. Quand x tend vers 0^+, $4x$ tend vers 0, donc $\varphi(4x)$ tend vers $\frac{1}{2}$, tandis que $\frac{16x}{3}$ tend vers 0. Par produit :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

Conclusion. f est continue à droite en 0.

2.

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

INDICE

Forme le taux $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ pour $x>0$: le dénominateur devient $3x^2$. Fais de nouveau apparaître $(4x)^2$.

CORRIGÉ

Taux d'accroissement. Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Comme $f(0)=0$, le taux d'accroissement de f entre 0 et x vaut $\dfrac{f(x)}{x}$. Avec la fonction φ de la question 1 :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1-\cos(4x)}{3x^2} \\ &= \frac{16}{3}\,\varphi(4x).\end{aligned}$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, $\varphi(4x)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$, donc le taux tend vers $\dfrac{16}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{3}$, qui est un réel.

Conclusion. f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=\dfrac{8}{3}$.

3.

Interpréter graphiquement le résultat de la question 2.

INDICE

Une dérivée à droite finie donne une demi-tangente au point $O(0,f(0))$: écris son équation, sans oublier la condition sur x.

CORRIGÉ

Comme $f(0)=0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par $O(0,0)$. La fonction f est continue et dérivable à droite en 0 : d'après F04 (demi-tangentes), $\mathcal{C}_f$ admet en O une demi-tangente à droite de coefficient directeur $f'_d(0)=\dfrac{8}{3}$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ admet au point $O(0,0)$ une demi-tangente à droite d'équation $y=\dfrac{8}{3}x$, avec $x \geq 0$.

Exercice 2

Un point anguleux : continue sans être dérivable

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{5x - 1}{x + 1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1.

Montrer que f est continue en 1.

INDICE

Calcule $f(1)$, puis la limite à droite de $\dfrac{5x-1}{x+1}$ en 1. À gauche, f coïncide avec un polynôme.

CORRIGÉ

Valeur en 1. $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$.

Limite à gauche. Pour $x \leq 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$: par continuité de ce polynôme, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$.

Limite à droite. Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{5x - 1}{x + 1}$; cette fonction rationnelle est définie et continue en 1, donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{4}{2} = 2$.

Conclusion. Les deux limites latérales en 1 sont égales à $f(1)$: f est continue en 1.

2.

Calculer $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.

INDICE

Pour $x<1$, le numérateur du taux se factorise par $(x-1)$. Pour $x>1$, réduis $\dfrac{5x-1}{x+1}-2$ au même dénominateur avant de diviser par $x-1$.

CORRIGÉ

Pour $x\neq 1$, posons $\tau(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Nombre dérivé à gauche. Soit $x<1$:

$$\begin{aligned}\tau(x)&=\frac{x^2-2x+1}{x-1}\\&=\frac{(x-1)^2}{x-1}\\&=x-1.\end{aligned}$$

Ce taux tend vers 0 quand x tend vers 1^-.

Nombre dérivé à droite. Soit $x>1$:

$$\begin{aligned}\tau(x)&=\frac{5x-1-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{3(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\frac{3}{x+1}.\end{aligned}$$

Ce taux tend vers $\dfrac{3}{2}$ quand x tend vers 1^+.

Conclusion. $f'_g(1)=0$ et $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$.

3.

Conclure sur la dérivabilité de f en 1 et décrire $\mathcal{C}_f$ au point $A(1,2)$.

INDICE

Compare les deux nombres dérivés latéraux. S'ils diffèrent, le point de la courbe porte un nom précis.

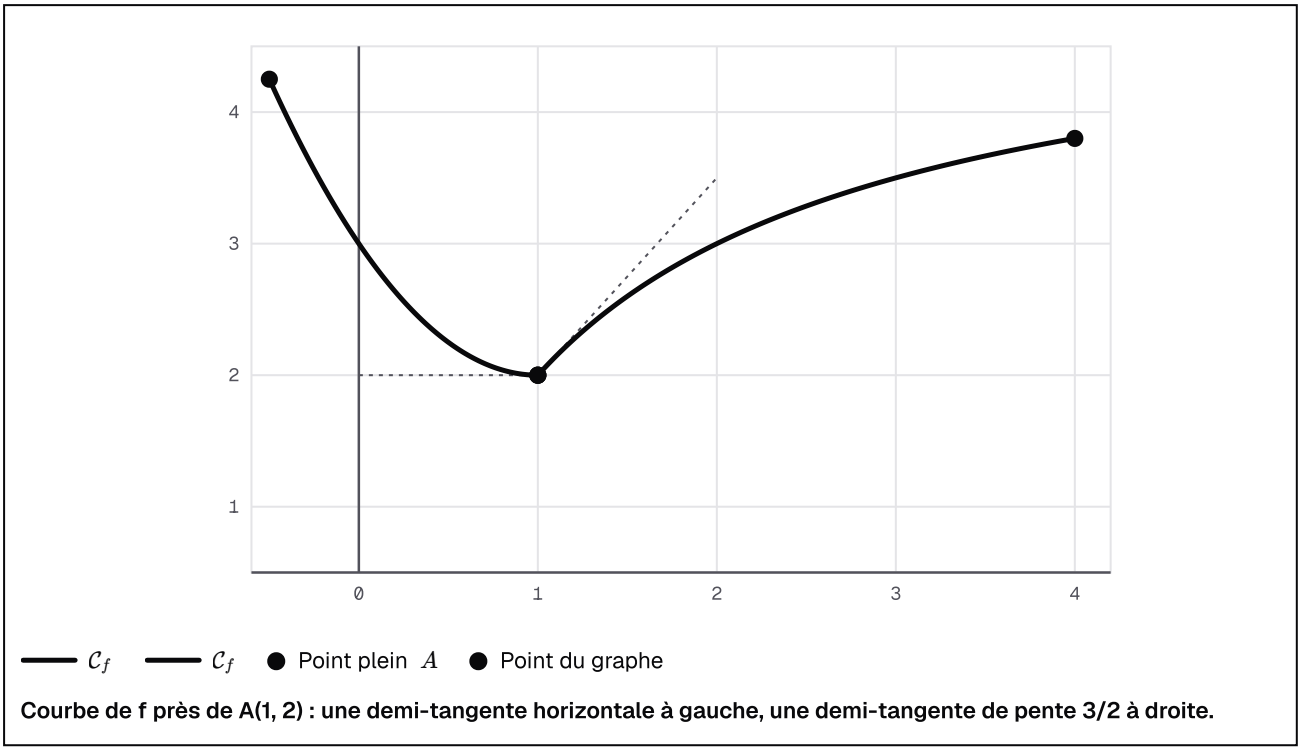
CORRIGÉ

Dérivabilité en 1. f est dérivable à gauche et à droite en 1, mais $f'_g(1)=0$ et $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$ sont différents. D'après F03 (dérivabilité et dérivabilités latérales), f n'est pas dérivable en 1, bien qu'elle y soit continue.

Courbe en $A(1,2)$. D'après F04 (demi-tangentes, point anguleux), $\mathcal{C}_f$ admet en A :

- à gauche, une demi-tangente horizontale d'équation $y=2$, avec $x\leq 1$;
- à droite, une demi-tangente d'équation $y=\dfrac{3}{2}(x-1)+2$, avec $x\geq 1$.

Conclusion. f n'est pas dérivable en 1 et $A(1,2)$ est un point anguleux de $\mathcal{C}_f$. Cet exemple montre que la réciproque de F05 (une fonction dérivable en un point y est continue) est fausse.



Courbe de f près de A(1, 2) : une demi-tangente horizontale à gauche, une demi-tangente de pente 3/2 à droite.

Exercice 3

Tangente et valeur approchée d'une racine carrée

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+13}$.

1.

Justifier que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Pose $u(x) = 3x + 13$: sur cet intervalle ouvert, $u(x) > 0$, et la dérivée de $\sqrt{u}$ s'applique.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 3x + 13$. La fonction u est affine, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 3$, et $u(x) > 0$ pour tout $x > -\dfrac{13}{3}$.

D'après F11 (dérivées composées usuelles, cas de $\sqrt{u}$), $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Conclusion. f est dérivable sur $\left]-\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$ et, pour tout $x > -\dfrac{13}{3}$:

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+13}}.$$

2.

Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

INDICE

Calcule $f(4)$ et $f'(4)$, puis remplace dans $y = f'(4)(x-4) + f(4)$.

CORRIGÉ

On a $f(4) = \sqrt{25} = 5$ et $f'(4) = \dfrac{3}{2 \times 5} = \dfrac{3}{10}$. D'après F06 (tangente et approximation affine), (T) a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4)$, soit :

$$y = \frac{3}{10}(x-4) + 5.$$

Conclusion. $(T) : y = \dfrac{3}{10}x + \dfrac{19}{5}$.

3.

À l'aide de l'approximation affine de f au voisinage de 4, donner une valeur approchée de $\sqrt{25{,}06}$.

INDICE

Cherche le réel h tel que $3 \times (4+h) + 13 = 25{,}06$, puis applique l'approximation affine de f en 4.

CORRIGÉ

Choix de h. $3 \times 4{,}02 + 13 = 25{,}06$, donc $\sqrt{25{,}06} = f(4+h)$ avec $h = 0{,}02$.

Approximation affine. D'après F06 (tangente et approximation affine), $f(4+h) \approx f(4) + f'(4)\,h$ pour h proche de 0. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sqrt{25{,}06} &\approx 5 + \frac{3}{10} \times 0{,}02 \\ &\approx 5{,}006.\end{aligned}$$

Conclusion. $\sqrt{25{,}06} \approx 5{,}006$.

Exercice 4

Trois dérivées composées, justifiées

Pour chacune des fonctions suivantes, justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$, puis calculer la dérivée.

1.

$f(x) = (2x^2 - x + 3)^4$.

INDICE

C'est u^4 avec $u(x) = 2x^2 - x + 3$; le facteur $u'(x)$ ne doit pas disparaître.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 2x^2 - x + 3$. Le polynôme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4x - 1$. D'après F11 (dérivées composées usuelles, cas de u^n) avec $n = 4$, $f = u^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 4u^3u'$.

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\,u(x)^3\,u'(x) \\ &= 4(4x - 1) \\ &\quad \times (2x^2 - x + 3)^3. \end{aligned}$$

2.

$g(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

INDICE

Avant la règle de la racine, prouve que $x^2 - 6x + 10 > 0$ pour tout réel x grâce à la forme canonique.

CORRIGÉ

Signe du trinôme. Posons $v(x) = x^2 - 6x + 10$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = (x - 3)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Dérivabilité. v est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = 2x - 6$. D'après F11 (dérivées composées usuelles, cas de $\sqrt{v}$), $g = \sqrt{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g' = \dfrac{v'}{2\sqrt{v}}$.

Conclusion. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x - 6}{2\sqrt{x^2 - 6x + 10}} \\ &= \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}. \end{aligned}$$

3.

$h(x) = \cos^2\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$; écrire $h'(x)$ à l'aide de $\sin\left(6x + \dfrac{2\pi}{5}\right)$.

INDICE

$h = w^2$ avec $w(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$, et w est elle-même une composée. Termine avec $2\sin a\cos a = \sin(2a)$.

CORRIGÉ

Dérivée de w. Posons $w(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$. D'après F11 (dérivées composées usuelles), w est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w'(x) = -3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

Dérivée de h. $h = w^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F11 avec $n = 2$). Soit $x \in \mathbb{R}$; posons $a = 3x + \dfrac{\pi}{5}$. Avec $2\sin a\cos a = \sin(2a)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\,w(x)\,w'(x) \\ &= -6\sin a\cos a \\ &= -3\sin(2a). \end{aligned}$$

Conclusion. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $2a = 6x + \dfrac{2\pi}{5}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = -3\sin\left(6x + \frac{2\pi}{5}\right).$$

Exercice 5

Nombre dérivé d'une réciproque en un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$.

1.

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Étudie le signe de $f'(x)$, puis les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; n'oublie pas la continuité.

CORRIGÉ

Variations. f est un polynôme, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 + 3 > 0$. D'après F20 (signe de la dérivée et variations), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites. En $-\infty$ et en $+\infty$, la limite du polynôme f est celle de son monôme dominant $2x^3$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. Continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2.

Calculer $f(2)$, puis justifier que f^{-1} est dérivable en 18 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(18)$.

INDICE

Le calcul de $f(2)$ te donne l'antécédent de 18. Vérifie que f' ne s'annule pas en cet antécédent : on divise par f' en l'antécédent, jamais en 18.

CORRIGÉ

Antécédent de 18. $f(2) = 16 + 6 - 4 = 18$, donc $f^{-1}(18) = 2$.

Hypothèse. f est dérivable en 2 et $f'(2) = 24 + 3 = 27$, qui est non nul.

Conclusion. D'après F12 (dérivée de la fonction réciproque), f^{-1} est dérivable en 18 et :

$$\left(f^{-1}\right)'(18) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{27}.$$

3.

En déduire une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 18.

INDICE

Le point de contact est $\left(18, f^{-1}(18)\right)$; sa pente vient de la question 2.

CORRIGÉ

La courbe de f^{-1} passe par le point $(18, 2)$, et sa tangente en ce point a pour coefficient directeur $\left(f^{-1}\right)'(18) = \frac{1}{27}$. Son équation est donc $y = \frac{1}{27}(x - 18) + 2$.

Conclusion. La tangente cherchée a pour équation $y = \frac{1}{27}x + \frac{4}{3}$.

Exercice 6

Racine cubique et puissance rationnelle d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies par :

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2+6x+11}$ sur $\mathbb{R}$;
- $g(x) = (5-2x)^{\frac{3}{4}}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$.

1.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

Écris $x^2+6x+11$ sous forme canonique pour prouver qu'il reste strictement positif, puis dérive sa racine cubique.

CORRIGÉ

Signe. Posons $u(x) = x^2+6x+11$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = (x+3)^2 + 2 > 0$.

Dérivabilité. u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x) = 2x+6$. D'après F14 (dérivée de la racine n-ième) avec $n=3$, $f = \sqrt[3]{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{3\left(\sqrt[3]{u}\right)^2}$.

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2x+6}{3\left(\sqrt[3]{u(x)}\right)^2},$$

où $u(x) = x^2+6x+11$.

2.

Calculer $f'(2)$.

INDICE

Calcule d'abord la valeur de $x^2+6x+11$ en 2 : c'est un cube parfait.

CORRIGÉ

On a $u(2) = 4+12+11 = 27$ et $\sqrt[3]{27} = 3$, donc :

$$f'(2) = \frac{2\times 2+6}{3\times 3^2} = \frac{10}{27}.$$

Conclusion. $f'(2) = \dfrac{10}{27}$.

3.

Justifier que g est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$, calculer $g'(x)$, puis $g'\left(-\frac{11}{2}\right)$.

INDICE

La dérivée d'une puissance rationnelle de $5-2x$ exige $5-2x>0$: c'est la raison du choix de l'intervalle. Garde le facteur -2 de la dérivée intérieure.

CORRIGÉ

Dérivabilité. Posons $v(x)=5-2x$: v est dérivable sur $\mathbb{R}$, $v'(x)=-2$, et $v(x)>0$ pour tout $x<\frac{5}{2}$. D'après F15 (dérivée d'une puissance rationnelle) avec $r=\frac{3}{4}$, $g=v^{\frac{3}{4}}$ est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$.

Dérivée. Pour tout $x<\frac{5}{2}$, $g'(x)=\frac{3}{4}\,v(x)^{-\frac{1}{4}}\,v'(x)$, soit :

$$g'(x)=-\frac{3}{2}\,(5-2x)^{-\frac{1}{4}}.$$

Valeur en $-\frac{11}{2}$. On a $5-2\times\left(-\frac{11}{2}\right)=16$ et $16^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Conclusion. g est dérivable sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$, sa dérivée est donnée ci-dessus, et $g'\left(-\frac{11}{2}\right)=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$.

Exercice 7

Arctangente d'un trinôme : dérivée et variations

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(2x^2 - 6x + 1)$.

1.

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

INDICE

La dérivée de $\arctan u$ ne demande que la dérivabilité de u : aucune condition de signe sur u.

CORRIGÉ

Posons $u(x) = 2x^2 - 6x + 1$: le polynôme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 4x - 6$.

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ (F16, dérivée de la fonction arctangente).

D'après la dérivée d'une fonction composée (F10), $f = \arctan \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Conclusion. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{4x - 6}{1 + u(x)^2},$$

où $u(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

2.

Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f, limites comprises.

INDICE

Le dénominateur est strictement positif : seul $4x-6$ décide du signe. Pour les limites, cherche celles de $u(x)$, puis compose avec $\arctan$.

CORRIGÉ

Signe de $f'(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+u(x)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $4x-6$:

- $f'(x) < 0$ si $x < \dfrac{3}{2}$;
- $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x > \dfrac{3}{2}$.

Variations. D'après F20 (signe de la dérivée et variations), f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$.

Limites. $u(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \arctan t = \dfrac{\pi}{2}$. Par composition, f tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Minimum. $u\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2} - 9 + 1 = -\dfrac{7}{2}$ et $\arctan$ est impaire, d'où $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\arctan\dfrac{7}{2}$.

Tableau de variations.

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$\dfrac{\pi}{2}$	décroissante	$-\arctan\dfrac{7}{2}$	croissante	$\dfrac{\pi}{2}$

3.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

INDICE

$\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$: l'équation se ramène à $2x^2 - 6x + 1 = 1$.

CORRIGÉ

La fonction $\arctan$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective, et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow u(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-3) = 0. \end{aligned}$$

Les solutions sont 0 et 3 : il y en a une de chaque côté de $\dfrac{3}{2}$, où f atteint son minimum, ce qui concorde avec le tableau de la question 2.

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ est $S = \{0, 3\}$.

Exercice 8

Rolle : hypothèses vérifiées, hypothèse manquante

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x$, et g la fonction définie sur $[1, 4]$ par :

$$g(x) = 4 - \sqrt[3]{(2x-5)^2}.$$

1.

Vérifier que $f(1) = f\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

INDICE

Factorise $f(x)$ par x, puis cherche les racines du trinôme qui reste.

CORRIGÉ

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(2x^2 - 9x + 7) \\ &= x(x-1)(2x-7). \end{aligned}$$

Donc $f(1) = 0$ et $f\left(\dfrac{7}{2}\right) = 0$.

Conclusion. $f(1) = f\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

2.

Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]1, \dfrac{7}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$, puis déterminer c.

INDICE

Vérifie une à une les trois hypothèses du théorème de Rolle. Pour trouver c, résous $f'(x) = 0$ et ne garde que la racine de l'intervalle ouvert.

CORRIGÉ

Existence. f est un polynôme : elle est continue sur $\left[1, \dfrac{7}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]1, \dfrac{7}{2}\right[$. De plus $f(1) = f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ d'après la question 1. D'après le théorème de Rolle (F18), il existe $c \in \left]1, \dfrac{7}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

Racines de f'. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 18x + 7$. Le discriminant vaut $324 - 168 = 156 = 4 \times 39$, d'où deux racines $x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{39}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{39}}{6}$.

Choix de la racine. Comme $6 < \sqrt{39} < 7$:

- $\dfrac{1}{3} < x_1 < \dfrac{1}{2}$, donc x_1 n'appartient pas à $\left]1, \dfrac{7}{2}\right[$;
- $\dfrac{5}{2} < x_2 < \dfrac{8}{3}$, donc x_2 appartient à $\left]1, \dfrac{7}{2}\right[$.

Conclusion. Il existe un unique réel $c \in \left]1, \dfrac{7}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$: c'est $c = \dfrac{9 + \sqrt{39}}{6}$.

3.

Vérifier que $g(1) = g(4)$ et calculer $g'(x)$ pour $x \in [1,4]$ avec $x \neq \dfrac{5}{2}$.

INDICE

Pour $x \neq \dfrac{5}{2}$, $(2x-5)^2$ est strictement positif : la dérivée de la racine cubique s'applique.

CORRIGÉ

Égalité des valeurs. $g(1) = 4 - \sqrt[3]{(-3)^2} = 4 - \sqrt[3]{9}$ et $g(4) = 4 - \sqrt[3]{3^2} = 4 - \sqrt[3]{9}$, donc $g(1) = g(4)$.

Dérivabilité. Posons $w(x) = (2x-5)^2$: w est dérivable sur $\mathbb{R}$, $w'(x) = 4(2x-5)$, et $w(x) > 0$ pour $x \neq \dfrac{5}{2}$. D'après F14 (dérivée de la racine n-ième) avec $n = 3$, $\sqrt[3]{w}$, donc g, est dérivable sur $\left[1, \dfrac{5}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{5}{2}, 4\right]$.

Conclusion. Pour tout $x \in [1,4]$ tel que $x \neq \dfrac{5}{2}$:

$$g'(x) = -\frac{4(2x-5)}{3\left(\sqrt[3]{w(x)}\right)^2},$$

où $w(x) = (2x-5)^2$. Ce quotient n'est jamais nul, car $2x - 5 \neq 0$.

4.

Étudier la dérivabilité de g en $\dfrac{5}{2}$. Expliquer pourquoi le théorème de Rolle ne s'applique pas à g sur $[1,4]$.

INDICE

Pose $t = 2x-5$ dans le taux $\dfrac{g(x)-g\left(\frac{5}{2}\right)}{x-\frac{5}{2}}$, puis distingue $t>0$ et $t<0$.

CORRIGÉ

Taux en $\dfrac{5}{2}$. On a $g\left(\dfrac{5}{2}\right)=4$. Soit $x\in[1,4]$ avec $x\neq\dfrac{5}{2}$; posons $t=2x-5$, de sorte que $t\neq 0$ et $x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{t}{2}$. Alors :

$$\frac{g(x)-4}{x-\frac{5}{2}} = -\frac{2\sqrt[3]{t^2}}{t}.$$

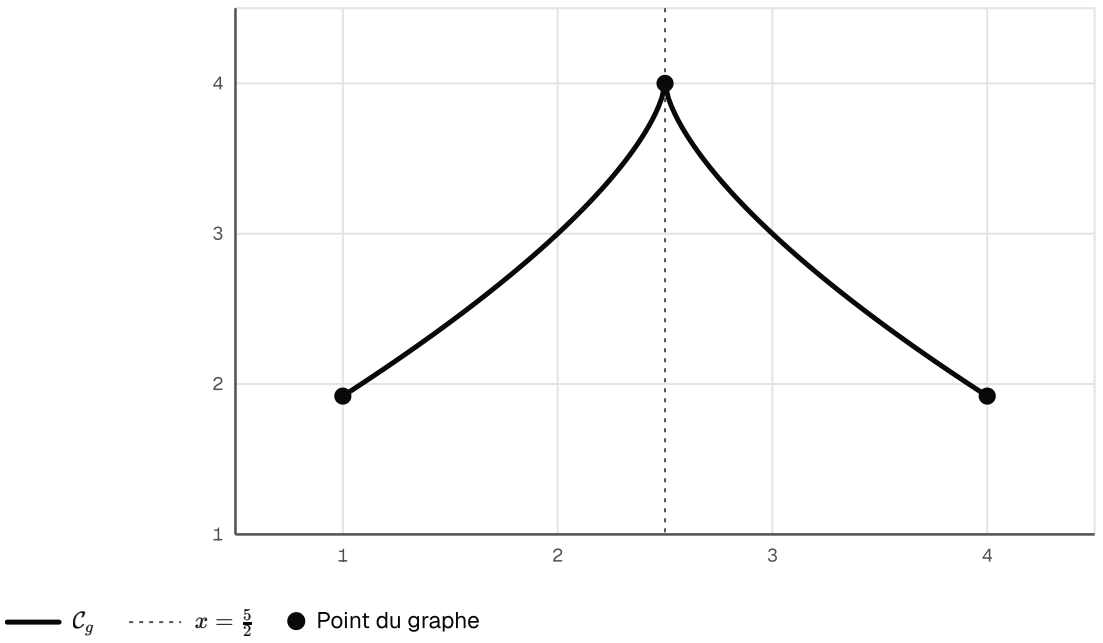
Limites latérales.

- Si $x>\dfrac{5}{2}$, alors $t>0$ et $\dfrac{\sqrt[3]{t^2}}{t}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$: le taux vaut $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{t}}$ et tend vers $-\infty$ quand x tend vers $\dfrac{5}{2}$ par valeurs supérieures.
- Si $x<\dfrac{5}{2}$, posons $s=-t>0$: $\sqrt[3]{t^2}=\sqrt[3]{s^2}$, donc le taux vaut $\dfrac{2}{\sqrt[3]{s}}$ et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $\dfrac{5}{2}$ par valeurs inférieures.

Non-dérivabilité. Les limites du taux sont infinies : g n'est pas dérivable en $\dfrac{5}{2}$, et sa courbe y admet deux demi-tangentes verticales (F04, demi-tangente verticale).

Hypothèses de Rolle. g est continue sur $[1,4]$, comme composée de $x\mapsto(2x-5)^2$, continue et positive, et de la racine cubique, continue sur $[0,+\infty[$. De plus $g(1)=g(4)$. Mais g n'est pas dérivable sur $]1,4[$, puisqu'elle ne l'est pas en $\dfrac{5}{2}$.

Conclusion. g n'est pas dérivable en $\dfrac{5}{2}$, et le théorème de Rolle ne s'applique pas à g sur $[1,4]$: l'hypothèse de dérivabilité sur $]1,4[$ manque. Sa conclusion tombe d'ailleurs aussi : d'après la question 3, g' ne s'annule nulle part.



Courbe de g sur [1, 4] : mêmes hauteurs aux deux bouts, mais une pointe verticale en 5/2 au lieu d'une tangente horizontale.

Exercice 9

Accroissements finis sur un polynôme : localiser c

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 - x$.

1.

Justifier qu'il existe $c \in \,]-1, 2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$.

INDICE

Deux hypothèses à vérifier pour le théorème des accroissements finis : continuité sur le segment, dérivabilité sur l'intervalle ouvert.

CORRIGÉ

f est un polynôme : elle est continue sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $]-1, 2[$. D'après le théorème des accroissements finis (F19), il existe $c \in \,]-1, 2[$ tel que $f(2) - f(-1) = f'(c)\,\big(2 - (-1)\big)$, c'est-à-dire :

$$f(2) - f(-1) = 3\,f'(c).$$

Conclusion. Il existe $c \in \,]-1, 2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$.

2.

Calculer $f(2)$ et $f(-1)$, puis déterminer toutes les valeurs possibles de c.

INDICE

Calcule la pente de la corde $\dfrac{f(2) - f(-1)}{3}$, puis résous l'équation « $f'(x)$ égale cette pente » ; ne garde que les solutions de $]-1, 2[$.

CORRIGÉ

Pente de la corde. $f(2) = 8 + 16 - 2 = 22$ et $f(-1) = -1 + 4 + 1 = 4$, donc $\dfrac{f(2) - f(-1)}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$.

Équation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 8x - 1$. Les valeurs possibles de c sont les solutions dans $]-1, 2[$ de $f'(x) = 6$, c'est-à-dire de :

$$3x^2 + 8x - 7 = 0.$$

Le discriminant vaut $64 + 84 = 148 = 4 \times 37$; les solutions sont $\dfrac{-4 - \sqrt{37}}{3}$ et $\dfrac{-4 + \sqrt{37}}{3}$.

Tri. $\dfrac{-4 - \sqrt{37}}{3} < -\dfrac{4}{3} < -1$: cette solution est exclue. D'après la question 1, au moins un réel c convient dans $]-1, 2[$: c'est donc l'autre solution.

Conclusion. La seule valeur possible est $c = \dfrac{\sqrt{37} - 4}{3}$.

3.

Montrer que $\frac{2}{3} < c < 1$.

INDICE

Encadre $\sqrt{37}$ entre deux entiers consécutifs.

CORRIGÉ

On a $36 < 37 < 49$, donc $6 < \sqrt{37} < 7$, puis $2 < \sqrt{37} - 4 < 3$. En divisant par $3 > 0$, on obtient $\frac{2}{3} < c < 1$.

Conclusion. $\frac{2}{3} < c < 1$; en particulier, c appartient bien à $]-1, 2[$.

Exercice 10

Inégalité des accroissements finis sur une fraction rationnelle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$.

1.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

INDICE

C'est un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) = x^2+5$, qui ne s'annule jamais.

CORRIGÉ

Le dénominateur x^2+5 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$: quotient de deux polynômes, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (F09, opérations sur les fonctions dérivables). Avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, où $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2+5$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x^2 + 10 - 4x^2}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{2(5-x^2)}{(x^2+5)^2}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2(5-x^2)}{(x^2+5)^2}$.

2.

Montrer que $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$ pour tout réel x.

INDICE

Majore d'abord $|5-x^2|$ par x^2+5, puis simplifie une fois par x^2+5.

CORRIGÉ

Majoration du numérateur. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $-(x^2+5) \leq 5 - x^2 \leq x^2+5$, donc $|5-x^2| \leq x^2+5$.

Majoration de $|f'(x)|$. D'après la question 1, $|f'(x)| = \dfrac{2|5-x^2|}{(x^2+5)^2}$. En divisant la majoration précédente par $(x^2+5)^2 > 0$, puis en utilisant $x^2+5 \geq 5$:

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq \frac{2(x^2+5)}{(x^2+5)^2} \\ &= \frac{2}{x^2+5} \\ &\leq \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.

3.

En déduire que, pour tous réels x et y, $|f(x)-f(y)| \leq \frac{2}{5}|x-y|$, puis que $|f(x)| \leq \frac{2}{5}|x|$.

INDICE

Utilise l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $\mathbb{R}$, puis choisis pour y un point où f est connue.

CORRIGÉ

Inégalité des accroissements finis. f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et, d'après la question 2, $|f'(x)| \leq \frac{2}{5}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après F22 (inégalité des accroissements finis, seconde forme), pour tous réels x et y :

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{2}{5}|x-y|.$$

Cas $y=0$. Comme $f(0)=0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq \frac{2}{5}|x|$.

Conclusion. Pour tous réels x et y, $|f(x)-f(y)| \leq \frac{2}{5}|x-y|$; en particulier, pour tout réel x, $|f(x)| \leq \frac{2}{5}|x|$.

Exercice 11

Asymptote oblique d'une fraction et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1.

Déterminer trois réels a, b et r tels que, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = ax + b + \dfrac{r}{x - 1}$.

INDICE

Développe $(ax + b)(x - 1) + r$ et identifie les coefficients avec ceux de $2x^2 - 3x + 4$.

CORRIGÉ

Identification. Pour tous réels a, b, r et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&(ax + b)(x - 1) + r \\ &= ax^2 + (b - a)x + r - b.\end{aligned}$$

Ce polynôme est égal à $2x^2 - 3x + 4$ lorsque $a = 2$, $b - a = -3$ et $r - b = 4$, c'est-à-dire $a = 2$, $b = -1$ et $r = 3$.

Vérification. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(2x - 1)(x - 1) + 3 = 2x^2 - 3x + 4$. En divisant par $x - 1 \neq 0$, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x - 1}.$$

Conclusion. $a = 2$, $b = -1$ et $r = 3$ conviennent.

2.

Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

INDICE

Pour une asymptote oblique, il suffit de montrer que $f(x) - (2x - 1)$ tend vers 0.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x - 1}.$$

Cette quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

Conclusion. D'après F28 (asymptote oblique), la droite $(D) : y = 2x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

3.

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (D). Quelle autre asymptote $\mathcal{C}_f$ possède-t-elle ?

INDICE

Le signe de $\dfrac{3}{x-1}$ est celui de $x-1$. Pour l'autre asymptote, étudie les limites de f à gauche et à droite de 1.

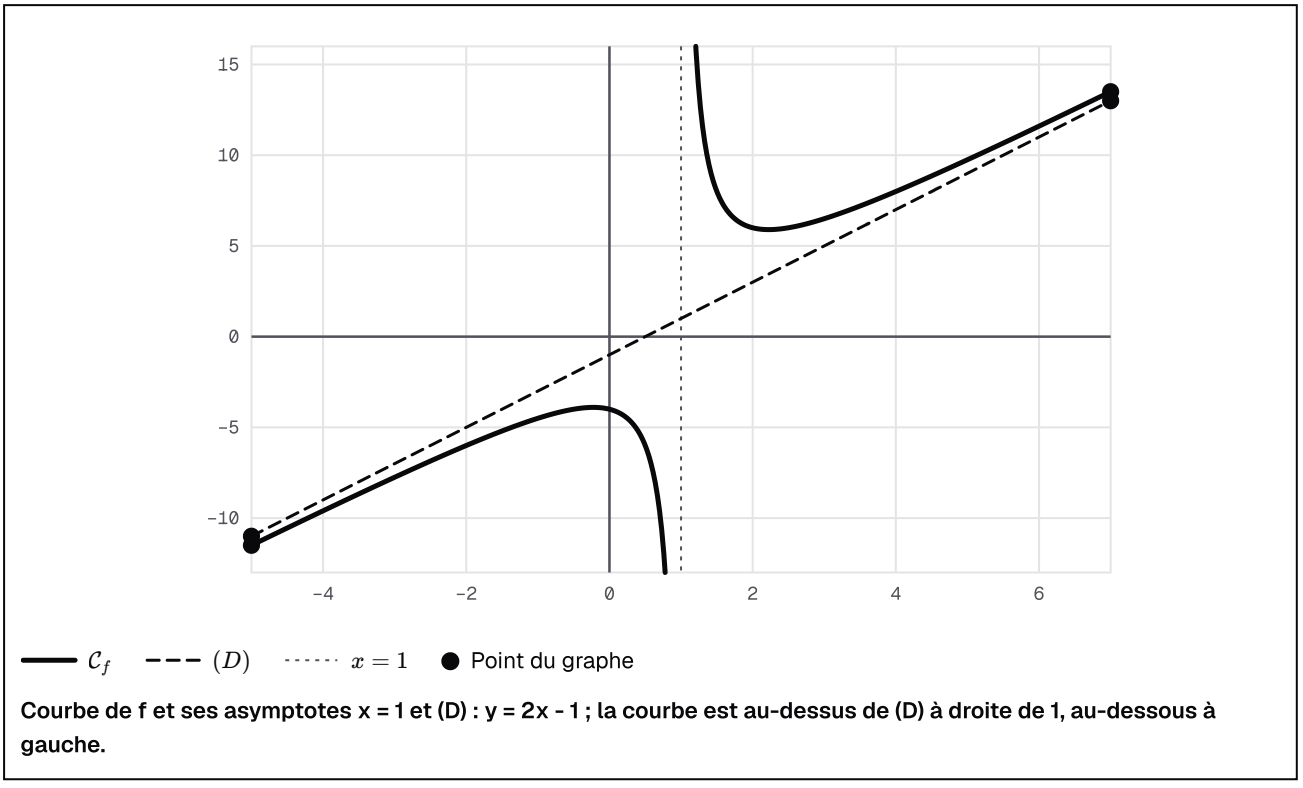
CORRIGÉ

Position relative. D'après F30 (position relative d'une courbe et d'une droite), on étudie le signe de $f(x)-(2x-1)=\dfrac{3}{x-1}$, qui est celui de $x-1$:

- sur $]1,+\infty[$, $\dfrac{3}{x-1}>0$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de (D) ;
- sur $]-\infty,1[$, $\dfrac{3}{x-1}<0$: $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de (D).

Asymptote verticale. Le numérateur $2x^2-3x+4$ tend vers $3>0$ quand x tend vers 1, et le dénominateur $x-1$ tend vers 0 avec son signe. Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) sur $]1,+\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty,1[$. D'après F27 (asymptotes verticale et horizontale), $\mathcal{C}_f$ admet aussi la droite d'équation $x=1$ pour asymptote verticale.



Courbe de f et ses asymptotes x = 1 et (D) : y = 2x - 1 ; la courbe est au-dessus de (D) à droite de 1, au-dessous à gauche.

Exercice 12

Concavité d'un polynôme de degré 4 et points d'inflexion

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1.

Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.

INDICE

Dérive deux fois, puis factorise $f''(x)$ par 12 : il reste un trinôme à racines entières.

CORRIGÉ

f est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 18x^2 \\ &\quad + 24x - 5, \\ f''(x) &= 12x^2 - 36x + 24 \\ &= 12(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Signe. Le facteur 12 est positif, et le trinôme $(x-1)(x-2)$ est positif à l'extérieur de ses racines 1 et 2, négatif entre elles.

Conclusion. $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]2, +\infty[$, $f''(x) < 0$ sur $]1, 2[$, et f'' s'annule en 1 et en 2.

2.

En déduire la concavité de $\mathcal{C}_f$ et ses points d'inflexion.

INDICE

Le signe de f'' donne la concavité sur chaque intervalle ; pour un point d'inflexion, f'' doit s'annuler en changeant de signe.

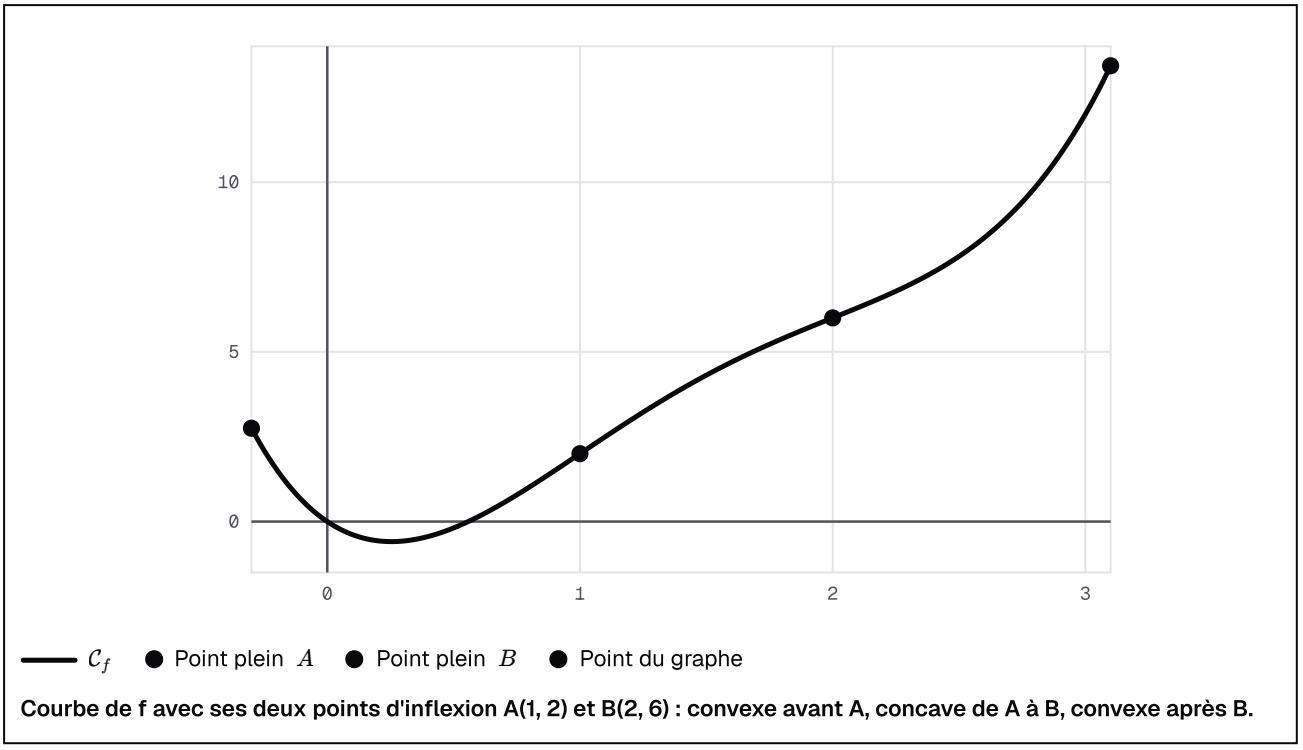
CORRIGÉ

Concavité. D'après F25 (dérivée seconde et convexité), $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$, et concave sur $[1, 2]$.

Points d'inflexion. f'' s'annule en changeant de signe en 1 et en 2 : d'après F26 (point d'inflexion), les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses 1 et 2 sont des points d'inflexion. Or $f(1) = 1 - 6 + 12 - 5 = 2$ et :

$$f(2) = 16 - 48 + 48 - 10 = 6.$$

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$, concave sur $[1, 2]$, et admet deux points d'inflexion : $A(1, 2)$ et $B(2, 6)$.



Courbe de f avec ses deux points d'inflexion A(1, 2) et B(2, 6) : convexe avant A, concave de A à B, convexe après B.

3.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^4 + 2x$. Montrer que $g''(1) = 0$, mais que le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1 n'est pas un point d'inflexion.

INDICE

Calcule $g''(x)$ et regarde son signe autour de 1. Pour exclure l'inflexion, compare la courbe à sa tangente en 1, des deux côtés.

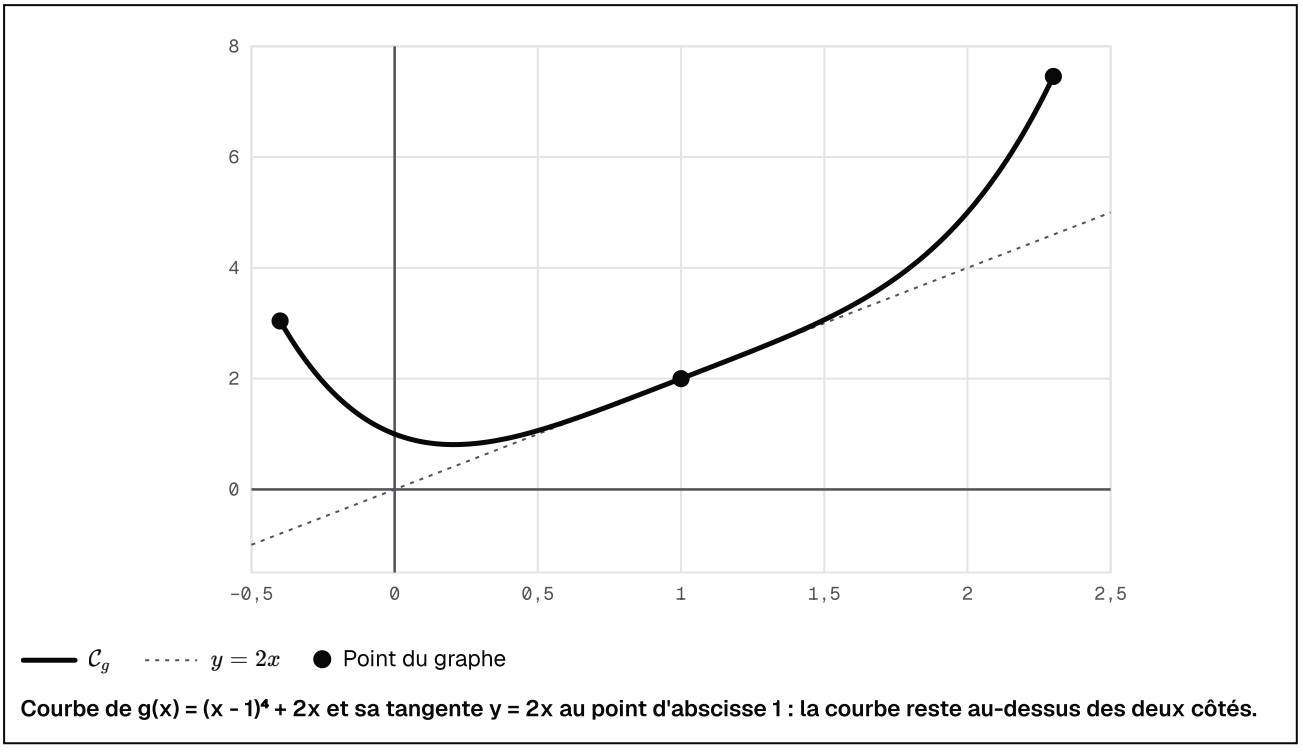
CORRIGÉ

Dérivées. g est un polynôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4(x-1)^3 + 2$ et $g''(x) = 12(x-1)^2$. Donc $g''(1) = 0$, mais $g''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: g'' ne change pas de signe en 1.

Tangente en 1**.** $g(1) = 2$ et $g'(1) = 2$: la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 2(x-1) + 2$, soit $y = 2x$.

Position. Pour tout $x \neq 1$, $g(x) - 2x = (x-1)^4 > 0$. Soit $\delta > 0$: sur $]1-\delta, 1[$ comme sur $]1, 1+\delta[$, la courbe est strictement au-dessus de cette tangente. D'après F24 (convexité, concavité), elle n'est donc concave ni sur $]1-\delta, 1]$, ni sur $[1, 1+\delta[$.

Conclusion. $g''(1) = 0$, mais $\mathcal{C}_g$ ne change pas de concavité au point d'abscisse 1 : d'après F26 (point d'inflexion), ce point n'est pas un point d'inflexion. L'annulation de g'' ne suffit pas.



Courbe de g(x) = (x - 1)⁴ + 2x et sa tangente y = 2x au point d'abscisse 1 : la courbe reste au-dessus des deux côtés.