BURHAN

Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/derivation-et-etude-de-fonctions/cours

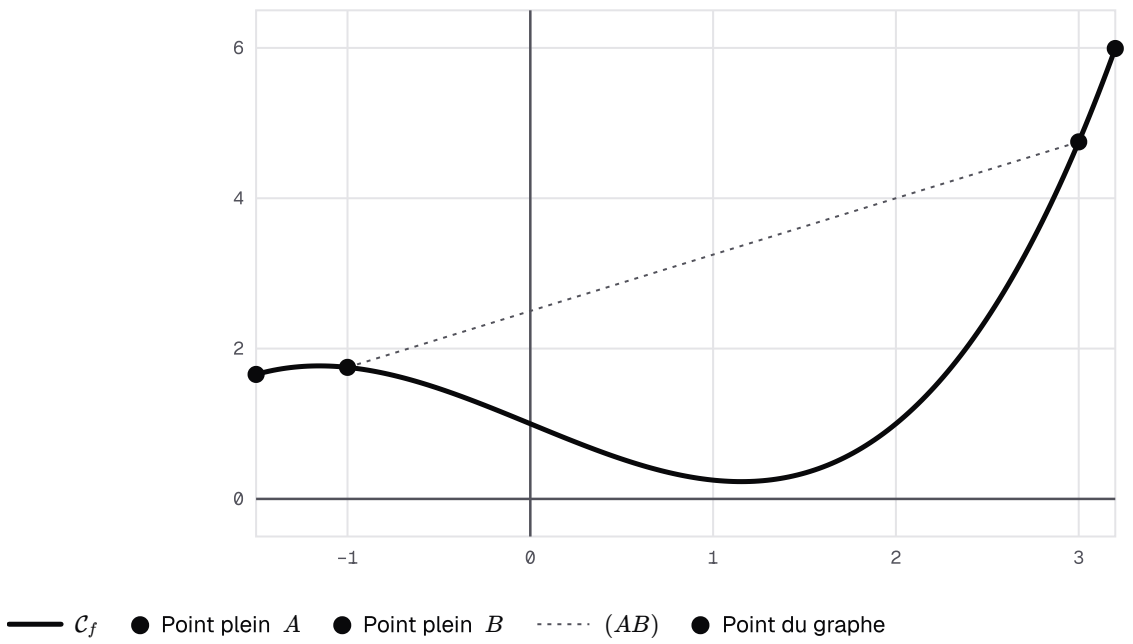
Chapitre	Semestre
Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions	Semestre 1

Une pente, une vitesse, une preuve

Regarde la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{4} - x + 1$ entre les points $A(-1, f(-1))$ et $B(3, f(3))$. La corde (AB) monte avec une pente de $\dfrac{3}{4}$. Entre A et B, la courbe descend d'abord, puis remonte.

Une question simple : existe-t-il un point de la courbe où la tangente est parallèle à (AB) ?

Dans ce chapitre, tu apprendras à répondre par une **preuve**, pas seulement par un dessin. Tu sauras démontrer qu'un tel point existe, puis t'en servir pour encadrer un nombre, étudier une fonction ou faire converger une suite.



Courbe de f entre A et B, avec la corde (AB).

Devine : Une tangente parallèle à la corde ?

Sans calcul, que penses-tu ? Existe-t-il un point de la courbe, entre A et B, où la tangente est parallèle à la corde (AB) ?

A. Non : la courbe descend d'abord, donc aucune tangente n'a la pente de (AB).
Faux.

La descente ne dure pas. Ensuite la courbe remonte de plus en plus vite : sa pente finit par dépasser $\frac{3}{4}$.

B. Seulement si la courbe est une droite.

Faux.
Pour une droite, c'est vrai partout. Mais une courbe sans saut ni pointe a aussi ce point : c'est tout l'intérêt du chapitre.

C. Oui : il existe au moins un tel point.

Juste.
C'est cela. Ici f' est un polynôme : sa pente passe de valeurs négatives à des valeurs plus grandes que $\frac{3}{4}$, et vaut $\frac{3}{4}$ au passage. Le théorème du chapitre se démontre autrement, par Rolle, sans rien supposer de f'.

Correction

Il existe un tel point, et ici on peut même le calculer. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3x^2}{4} - 1$, donc

$$f'(x) = \frac{3}{4} \iff x^2 = \frac{7}{3}.$$

Dans $]-1, 3[$, seule la valeur $x = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$ convient, soit environ $1{,}53$.

Le théorème des accroissements finis garantira un tel point pour toute fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il le garantira même quand on ne sait pas le calculer.

Dérivabilité en un point, à droite, à gauche

Le taux d'accroissement

Petit rappel. En première, tu as défini le nombre dérivé $f'(a)$ comme la limite du taux d'accroissement en a. C'est la pente de la tangente au point d'abscisse a. En SM, on va plus loin : on regarde aussi un seul côté de a, par exemple en une borne de l'ensemble de définition.

Vérifie : Du taux au nombre dérivé

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3x^2 - x$. Pour $h \neq 0$, on trouve $\dfrac{u(1+h) - u(1)}{h} = 5 + 3h$. Que vaut $u'(1)$?

A. $5 + 3h$

Faux.
C'est le taux, pas sa limite. Le nombre dérivé ne dépend pas de h.

B. 5

Juste.
Juste : quand h tend vers 0, $5 + 3h$ tend vers 5.

C. 8

Faux.
8 est la valeur du taux pour $h = 1$, pas sa limite.

D. Il n'existe pas, car on ne peut pas prendre $h = 0$.

Faux.
On ne remplace pas h par 0 : on calcule une limite, et elle existe.

Indice 1
Le nombre dérivé est une limite quand h tend vers 0.

Correction
Pour tout réel h :

$$\begin{aligned} u(1+h) &= 3(1+h)^2 - (1+h) \\ &= 2 + 5h + 3h^2, \end{aligned}$$

et $u(1) = 2$. Pour $h \neq 0$, le taux vaut donc $5 + 3h$, qui tend vers 5 quand h tend vers 0.

Ainsi u est dérivable en 1 et $u'(1) = 5$.

Définition : Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

On dit que f est **dérivable en** a lorsque le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, défini pour $x \in I$ et $x \neq a$, admet une limite **finie** quand x tend vers a. Cette limite est le **nombre dérivé** de f en a, noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

À droite et à gauche

Définition : Dérivabilité à droite, à gauche

Soit f une fonction et a un réel, et soit $\delta > 0$.

- Si f est définie sur $[a, a+\delta[$, f est **dérivable à droite en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_d(a)$.
- Si f est définie sur $]a-\delta, a]$, f est **dérivable à gauche en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est notée $f'_g(a)$.

Propriété : Dérivabilité et dérivabilités latérales

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$. On a alors $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Démonstration

Idée de la preuve. Une fonction admet une limite finie ℓ en a si et seulement si elle admet en a une limite à droite et une limite à gauche, toutes deux égales à ℓ. On applique ce fait au taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Étape omise : la démonstration de ce fait sur les limites, vu en première.

Devine : Le départ d'un demi-cercle

La fonction $r : x \mapsto \sqrt{4x - x^2}$ est définie sur $[0, 4]$; sa courbe est un demi-cercle qui part de l'origine. Pour $0 < x \leq 4$, son taux en 0 vaut $\dfrac{r(x)}{x} = \sqrt{\dfrac{4 - x}{x}}$. Que devient ce taux quand x tend vers 0 à droite ?

A. Il tend vers 0 : la courbe part à l'horizontale.

Faux.

Près de 0, $\dfrac{4 - x}{x}$ devient très grand : le taux grandit, il ne s'écrase pas.

B. Il tend vers 4.

Faux.

4 est la limite de $4 - x$. Mais on divise encore par x, qui tend vers 0.

C. Il tend vers $+\infty$: la courbe part à la verticale.

Juste.

Juste : $\dfrac{4 - x}{x}$ tend vers $+\infty$, sa racine aussi.

Correction

Quand x tend vers 0 à droite, $4 - x$ tend vers 4 et x tend vers 0 en restant positif. Donc $\dfrac{4 - x}{x}$ tend vers $+\infty$, et le taux aussi.

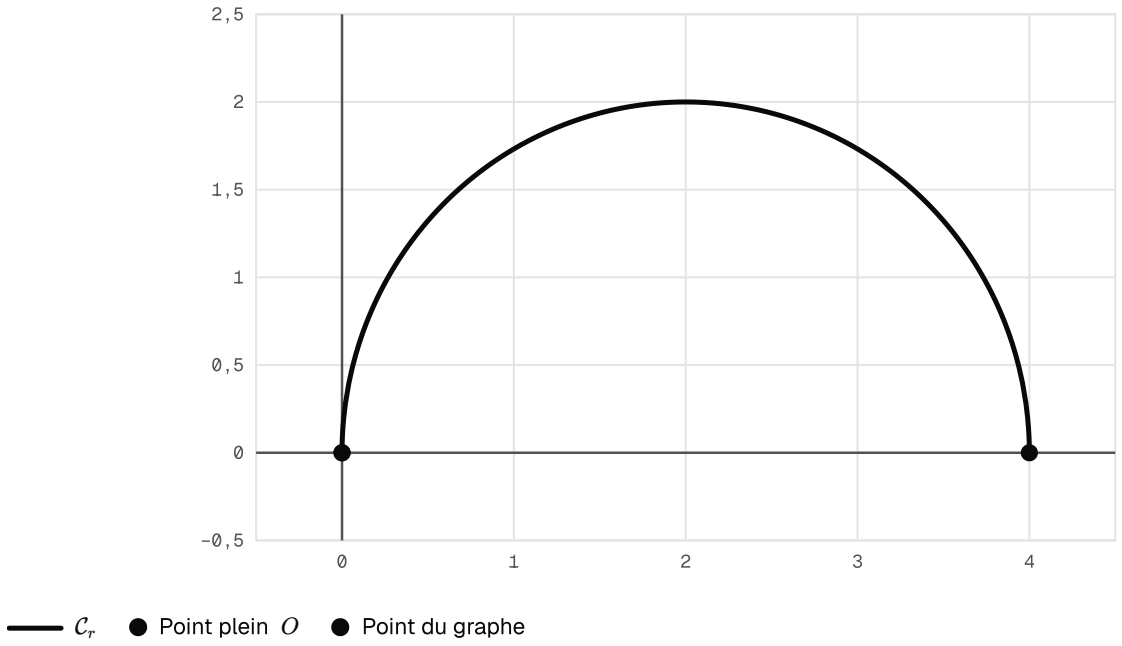
La fonction r n'est donc pas dérivable à droite en 0 : sa courbe y admet une demi-tangente verticale. La définition suivante donne le vocabulaire exact.

Définition : Demi-tangentes, demi-tangente verticale, point anguleux

Soit f une fonction continue en a, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère et A le point de coordonnées $(a, f(a))$.

- Si f est dérivable à droite en a, la **demi-tangente à droite** à $\mathcal{C}_f$ en A est la demi-droite d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ avec $x \geq a$. On définit de même la **demi-tangente à gauche**, avec $f'_g(a)$ et $x \leq a$.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable à droite en a et $\mathcal{C}_f$ admet en A une **demi-tangente verticale**. On définit de même une demi-tangente verticale à gauche. Si $\mathcal{C}_f$ admet en A une demi-tangente verticale à droite et une à gauche, on dit qu'elle admet en A une **tangente verticale**, d'équation $x = a$.
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, on dit que A est un **point anguleux** de $\mathcal{C}_f$.



Le demi-cercle de r part de l'origine à la verticale : en O, sa demi-tangente se confond avec l'axe des ordonnées.

Étudier une borne

Méthode : étudier la dérivabilité à droite en a

1. **Vérifier** que $f(a)$ est défini et que f est définie à droite de a.
2. **Écrire le taux** $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x > a$, puis le simplifier : factorisation, quantité conjuguée.
3. **Calculer sa limite** quand x tend vers a^+.
4. **Conclure.** Limite finie ℓ : « f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$ ». Limite infinie : « f n'est pas dérivable à droite en a ».
5. **Interpréter** dans une phrase à part : demi-tangente de coefficient directeur ℓ ; ou demi-tangente verticale, dirigée vers le haut ou vers le bas selon le signe de $f(x) - f(a)$ pour $x > a$.

Pour **montrer que** f est dérivable à droite en a, les phrases de l'étape 4 se recopient telles quelles.

Exemple : Exemple guidé : une fonction prolongée en 0

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Simplifier. Soit $x > 0$. En multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{x+1}+1$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}.$$

Taux. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{2} &= \frac{1-\sqrt{x+1}}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)} \\ &= \frac{-x}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}, \end{aligned}$$

d'où, en divisant par $x - 0 = x$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}.$$

Limite. Quand x tend vers 0^+, $\sqrt{x+1}+1$ tend vers 2 : ce taux tend vers $-\dfrac{1}{8}$.

Conclusion. f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\dfrac{1}{8}$. Sa courbe admet au point $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ une demi-tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{8}$.

À toi : Deux côtés qui ne s'accordent pas

Soit $\varphi : x \mapsto |x^2 - 4|$, définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x > 2$, le taux en 2 vaut $x + 2$; pour $-2 < x < 2$, il vaut $-(x+2)$. Que présente la courbe de φ au point $(2, 0)$?

A. Une tangente de coefficient directeur 4, car le taux à droite tend vers 4.

Faux.

4 n'est que la limite à droite. À gauche, le taux tend vers -4.

B. Une demi-tangente verticale, car le taux change de signe en 2.

Faux.

Les deux limites du taux sont finies : aucune n'est infinie.

C. Un point anguleux : demi-tangentes de pentes 4 et -4.

Juste.

Juste : $\varphi'_d(2) = 4$ et $\varphi'_g(2) = -4$ sont différents.

D. Rien de tout cela : φ n'est pas continue en 2.

Faux.

φ est continue en 2, comme composée de fonctions continues.

Indice 1
Calcule les limites du taux à droite et à gauche de 2.
Indice 2
Compare-les, puis relis la propriété sur les dérivabilités latérales.

Correction
À droite, $x+2$ tend vers 4 : $\varphi'_d(2)=4$. À gauche, $-(x+2)$ tend vers -4 : $\varphi'_g(2)=-4$.

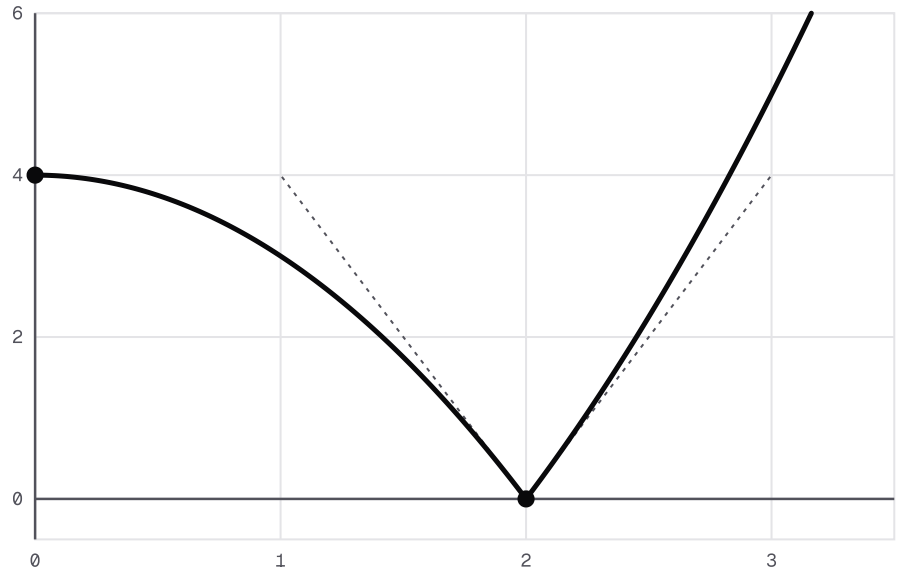
Les deux nombres dérivés latéraux existent et diffèrent. Donc φ n'est pas dérivable en 2, et le point $(2,0)$ est un point anguleux de sa courbe.

Remarque : Coin examen : dérivabilité à droite

Cette question figure dans 10 des 16 sujets consultés, pour 0,5 à 0,75 point. Rédige en trois temps, comme dans l'exemple guidé :

- « Pour tout $x>0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dots$ » ;
- « Or ce taux tend vers $-\dfrac{1}{8}$ quand x tend vers 0^+. Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=-\dfrac{1}{8}$ » ;
- « Interprétation : $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente de coefficient directeur $-\dfrac{1}{8}$ ».

Si le taux tend vers $-\infty$, écris : « f n'est pas dérivable à droite en 0 ; $\mathcal{C}_f$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale dirigée vers le bas ». L'interprétation est notée à part : ne l'oublie pas.



Courbe de φ(x) = |x² − 4| près de 2 : deux demi-tangentes de pentes −4 et 4 forment un coin au point (2, 0).

Dérivable implique continue ; la tangente

Dérivable, donc continue

Devine : Un saut est-il possible ?

Une fonction f est dérivable en a. Sa courbe peut-elle faire un saut au point d'abscisse a ?

A. Oui : la dérivabilité ne dit rien de la continuité.

Faux.

Avec un saut, le numérateur reste loin de 0 alors que $x - a$ tend vers 0 : le taux ne peut pas avoir de limite finie.

B. Non : une fonction dérivable en a est continue en a.

Juste.

Juste. La démonstration de l'énoncé suivant transforme cette intuition en preuve.

C. Seulement si $f'(a) = 0$.

Faux.

La valeur de $f'(a)$ n'y change rien : toute limite finie du taux empêche le saut.

Indice 1

Regarde le taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$: avec un saut, que fait son numérateur quand x tend vers a ?

Correction

Non. Pourquoi est-ce vrai ?

Si la courbe sautait en a, $f(x) - f(a)$ resterait loin de 0 quand x tend vers a, alors que $x - a$ tend vers 0. Le taux deviendrait aussi grand qu'on veut : il n'aurait pas de limite finie.

Une fonction dérivable en a est donc continue en a. C'est l'énoncé suivant, démontré juste dessous.

Propriété : Dérivabilité et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a. De même, si f est définie sur un intervalle J qui contient a et dont a est l'extrémité gauche, et si f est dérivable à droite en a, alors f est continue à droite en a ; et de même à gauche.

La réciproque est fausse : une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a.

Démonstration

Étape 1. Pour $x \in I$ avec $x \neq a$, on écrit $f(x) = f(a) + (x-a) \times \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Étape 2. Quand x tend vers a, le quotient tend vers le réel $f'(a)$, car f est dérivable en a, et $x-a$ tend vers 0. Par produit, le second terme tend vers $0 \times f'(a) = 0$.

Étape 3. Donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$: f est continue en a. En une borne, le même calcul, pour $x > a$ (ou $x < a$) et avec $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$), donne la continuité à droite (ou à gauche).

Réciproque fausse. La fonction valeur absolue est continue en 0. Son taux d'accroissement en 0 vaut 1 pour $x > 0$ et -1 pour $x < 0$. Ainsi $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$: d'après F03, elle n'est pas dérivable en 0.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On écrit $f(x) - f(a)$ comme un produit : pour $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = (x-a) \times \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Le premier facteur tend vers 0, le second vers le **réel** $f'(a)$. Le produit tend donc vers 0. Cette écriture resservira pour la dérivée d'une composée.

Vérifie : L'argument clé

Dans la démonstration, pourquoi le produit $(x-a) \times \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend-il vers 0 ?

A. Parce que f est continue en a, donc $f(x) - f(a)$ tend vers 0.

Faux.

C'est ce qu'on veut démontrer : l'utiliser rendrait la preuve circulaire.

B. Parce que les deux facteurs, $x - a$ et le taux, tendent vers 0.

Faux.

Le taux tend vers $f'(a)$, qui n'a aucune raison d'être nul.

C. Parce que $x - a$ tend vers 0 et le taux vers le réel $f'(a)$.

Juste.

Juste : c'est le produit d'une limite nulle par une limite finie.

D. Parce que $f(a) = 0$, donc le produit vaut $f(x)$, qui tend vers 0.

Faux.

Rien n'impose $f(a) = 0$: la preuve vaut pour toute valeur de $f(a)$.

Correction

Le facteur $x - a$ tend vers 0. Le taux tend vers $f'(a)$, qui est un **réel** puisque f est dérivable en a.

Par produit des limites, le produit tend vers $0 \times f'(a) = 0$.

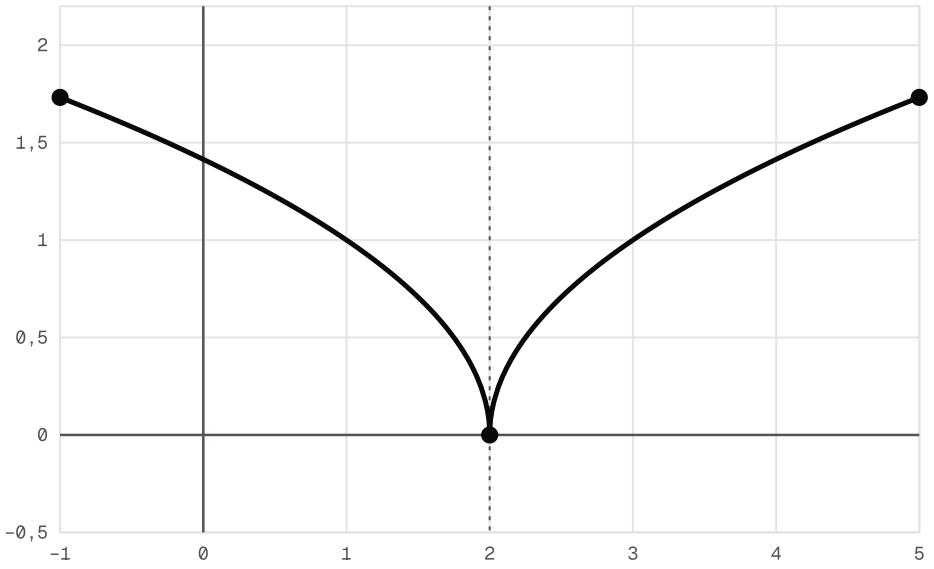
Si la limite du taux était infinie, l'argument tomberait : la finitude de $f'(a)$ est essentielle.

Exemple : Contre-exemple : continue, mais pas dérivable

Soit $w : x \mapsto \sqrt{|x-2|}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$, avec $w(2) = 0$.

- Pour $x > 2$, le taux en 2 vaut $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-2} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, qui tend vers $+\infty$.
- Pour $x < 2$, il vaut $\dfrac{\sqrt{2-x}}{x-2} = -\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$, qui tend vers $-\infty$.

Donc w n'est dérivable ni à droite ni à gauche en 2 : sa courbe y admet deux demi-tangentes verticales. La continuité ne suffit pas pour la dérivabilité.



Courbe de w(x) = √|x - 2| : continue en 2, elle y arrive et en repart à la verticale, de part et d'autre de la droite x = 2.

La tangente, une approximation

Attention : continue ne veut pas dire dérivable

✗ « f est continue en a, donc f est dérivable en a. »

✓ « f est dérivable en a, donc f est continue en a. » La réciproque est fausse : la continuité ne suffit pas. En un point où les théorèmes d'opérations ne s'appliquent pas (une borne, un raccord, une racine qui s'annule), étudie la limite du taux d'accroissement.

Propriété : Tangente et approximation affine

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, dérivable en $a \in I$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $A(a, f(a))$ est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$; son équation est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Il existe une fonction ε telle que, pour tout réel h tel que $a + h \in I$, $f(a + h) = f(a) + f'(a)\,h + h\,\varepsilon(h)$, et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. La fonction $h \mapsto f(a) + f'(a)\,h$ est l'**approximation affine** de f au voisinage de a ; on écrit aussi, au point a, $\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$, et en tout point x, $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

Idée de la preuve. Le premier point est la définition de la tangente. Pour le second, on pose $\varepsilon(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$ pour $h \neq 0$: la définition du nombre dérivé donne $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, et l'égalité s'obtient en multipliant par h. Étape omise : le choix $\varepsilon(0) = 0$ et la vérification en $h = 0$.

Exemple : approcher une racine carrée

Soit $q : x \mapsto \sqrt{2x+7}$. Elle est dérivable sur $\left]-\dfrac{7}{2}, +\infty\right[$ et, pour tout x de cet intervalle, $q'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+7}}$.

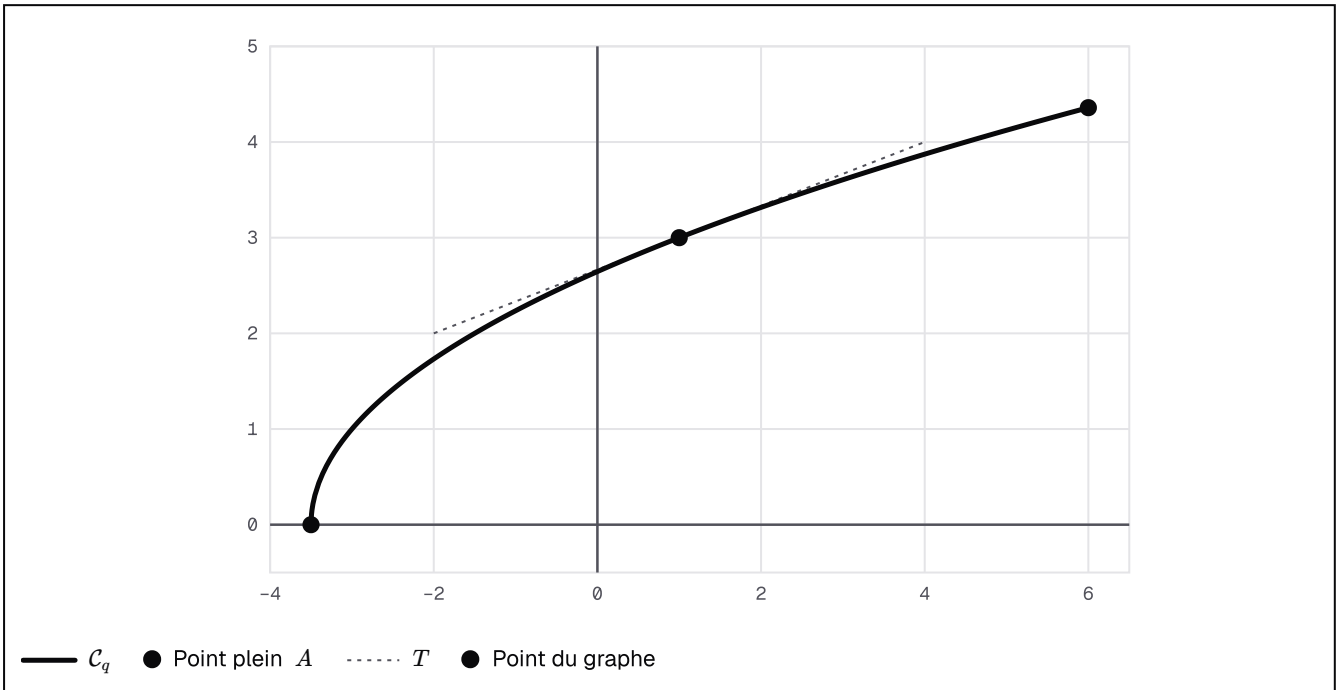
En 1 : $q(1) = 3$ et $q'(1) = \dfrac{1}{3}$. La tangente en 1 a pour équation

$$y = \frac{1}{3}(x-1) + 3.$$

Pour x proche de 1, on remplace la courbe par cette droite :

$$q(1{,}03) \approx 3 + \frac{0{,}03}{3} = 3{,}01.$$

La valeur exacte $\sqrt{9{,}06}$ vaut environ $3{,}00998$: l'écart est inférieur à 10^{-4}.



Courbe de q et sa tangente T au point A d'abscisse 1 : près de A, la droite et la courbe sont presque confondues.

À toi : Une autre valeur approchée

Avec la même tangente, quelle valeur approchée de $q(0{,}94) = \sqrt{8{,}88}$ obtiens-tu ?

A. $2{,}98$

Juste.
Juste : $3 + \dfrac{1}{3} \times (-0{,}06) = 2{,}98$.

B. $3{,}02$

Faux.
Le signe est faux : $0{,}94 - 1 = -0{,}06$ est négatif.

C. $2{,}94$

Faux.
Tu as oublié le coefficient $\dfrac{1}{3}$: l'écart à 1 se multiplie par $q'(1)$.

Indice 1
Calcule $h = 0{,}94 - 1$.
Indice 2
Utilise $q(1+h) \approx q(1) + q'(1)\,h$.

Correction
Ici $h = 0{,}94 - 1 = -0{,}06$. L'approximation affine donne $q(0{,}94) \approx 3 + \dfrac{1}{3} \times (-0{,}06) = 2{,}98$.

Une calculatrice donnerait $\sqrt{8{,}88} \approx 2{,}97993$: l'approximation est très bonne, car h est petit.

Calculer une dérivée en la justifiant

Rappel express

Vérifie : La dérivée d'un produit

Petit rappel de première. Quelle est la dérivée de la fonction $g : x \mapsto x^3 \sin x$ sur $\mathbb{R}$?

A. $3x^2 \cos x$

Faux.
On ne dérive pas un produit facteur par facteur : $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

B. $3x^2 \sin x - x^3 \cos x$

Faux.
Le signe moins appartient à la dérivée d'un quotient, pas à celle d'un produit.

C. $3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

Juste.
Juste : avec $u : x \mapsto x^3$ et $v = \sin$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.

Correction
Posons $u : x \mapsto x^3$ et $v = \sin$, dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après la dérivée d'un produit, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x. \end{aligned}$$

Définition : Fonction dérivée, dérivée seconde

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **dérivable sur** I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I ; en une borne de I qui appartient à I, on demande la dérivabilité à droite (borne gauche) ou à gauche (borne droite). La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f.

Si f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I ; la dérivée de f' est la **dérivée seconde** de f, notée f''.

Exemple : une dérivée seconde

Soit $p : x \mapsto x^4 - 6x^2 + 5x$. C'est un polynôme : p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $p'(x) = 4x^3 - 12x + 5$.

La fonction p' est encore un polynôme. Donc p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $p''(x) = 12x^2 - 12$. Tu retrouveras p'' dans la section sur la convexité.

Le formulaire de première

Propriété : Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Intervalle de dérivabilité
λ (constante réelle)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	tout intervalle sur lequel $\cos x \neq 0$

Propriété : Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel.

- $u + v$, $\lambda\,u$ et $u\,v$ sont dérivables sur I, et $(u+v)' = u' + v'$, $(\lambda\,u)' = \lambda\,u'$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.

- Une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Remarque

Ces résultats sont admis. Tu les as utilisés en première ; leurs preuves reposent sur des limites de taux d'accroissement, faites au cas par cas. Ils ne sont pas évidents pour autant : chaque formule a ses hypothèses, par exemple v qui ne s'annule pas sur I pour un quotient.

Devine : Une dérivée qui se cache

En développant, on trouve que la dérivée de $x \mapsto (2x-1)^3$ est $x \mapsto 6(2x-1)^2$. Un élève propose $3(2x-1)^2$, en imitant $(t^3)' = 3t^2$. Qu'en penses-tu ?

A. Il a raison : on dérive t^3 en $t = 2x-1$.

Faux.

Les deux expressions diffèrent : en $x = 1$, on trouve 6 d'un côté et 3 de l'autre.

B. Il manque le facteur 2, dérivée de $2x-1$.

Juste.

Juste : c'est la dérivée de la fonction intérieure.

C. Il faut ajouter 2, pas multiplier.

Faux.

En $x = 1$, cela donnerait 5, et non 6.

Correction

La formule naïve oublie la dérivée de la fonction intérieure $u : x \mapsto 2x-1$.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Le taux de $v \circ u$ est le produit d'un taux de v par un taux de u : c'est l'idée des énoncés suivants.

Ici, pour tout réel x, $\big(u^3\big)'(x) = 3u(x)^2\,u'(x) = 6(2x-1)^2$.

Dériver une composée

Théorème : Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J, telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Alors $v \circ u$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Démonstration

Idée de la preuve. Soit $a \in I$. Lorsque $u(x) \neq u(a)$, le taux d'accroissement de $v \circ u$ en a s'écrit

$$\frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \times \frac{u(x) - u(a)}{x - a}.$$

Comme u est continue en a (F05), $u(x)$ tend vers $u(a)$: par composition des limites, le premier facteur tend vers $v'(u(a))$, et le second tend vers $u'(a)$. Étape omise : le cas où $u(x) = u(a)$ pour des x arbitrairement proches de a, qui demande une fonction auxiliaire.

Propriété : Dérivées composées usuelles

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et a, b deux réels.

- Pour tout entier $n \neq 0$: $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ sur I ; si $n < 0$, on suppose que u ne s'annule pas sur I .
- Si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ sur I.
- $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$ sur I.
- Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto a\,f'(ax + b)$.

Démonstration

Étape 1. Chaque fonction est une composée $v \circ u$ (ou $f \circ w$ avec $w(x) = ax + b$), où v est usuelle (F08) : $v(t) = t^n$ avec $n \geq 1$; $v(t) = \sqrt{t}$ sur $]0, +\infty[$, qui contient $u(I)$ car $u > 0$; $v = \cos$ ou $v = \sin$ sur $\mathbb{R}$.

Étape 2. Pour $n \geq 1$, F10 donne $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$. Pour $n \leq -1$, u ne s'annule pas sur I, donc u^{-n} non plus ; on écrit $u^n = \dfrac{1}{u^{-n}}$, et F09 donne $(u^n)' = -\dfrac{(-n)\,u^{-n-1}\,u'}{u^{-2n}} = n\,u^{n-1}\,u'$.

Étape 3. F10 donne de même $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $(\cos u)' = -u' \sin u$, $(\sin u)' = u' \cos u$, et, avec $w' = a$, $(f \circ w)'(x) = a\,f'(ax + b)$.

Vérifie : Les exposants négatifs

Dans la démonstration de $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$, comment traite-t-on le cas $n \leq -1$?

A. On applique la dérivée d'une composée avec $v(t) = t^n$, prise dans le tableau des dérivées usuelles.

Faux.
Ce tableau ne donne t^n que pour n entier naturel non nul.

B. On le démontre par récurrence sur n.

Faux.

Aucune récurrence n'est utilisée : un seul calcul suffit.

C. Ce cas est admis.

Faux.

Il est démontré, à partir de la règle de l'inverse, qui est admise.

D. On écrit $u^n = \dfrac{1}{u^{-n}}$ et on dérive un inverse.

Juste.

Juste : $-n \geq 1$ ramène au premier cas, puis la règle de l'inverse conclut.

Correction

Pour $n \leq -1$, posons $m = -n$, de sorte que $m \geq 1$. Comme u ne s'annule pas sur I, $u^n = \dfrac{1}{u^m}$.

Le premier cas donne $(u^m)' = m\,u^{m-1}\,u'$. La règle de l'inverse donne alors, sur I :

$$\begin{aligned}(u^n)' &= -\frac{m\,u^{m-1}\,u'}{u^{2m}} \\ &= n\,u^{n-1}\,u'.\end{aligned}$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Chaque formule usuelle est une composée $v \circ u$ avec v connue : on applique la dérivée d'une composée. Pour un exposant négatif, on se ramène à un exposant positif en passant par l'inverse.

Exemple : Contre-exemple : la racine d'une fonction qui s'annule

Prends $u : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$: u est dérivable, mais s'annule en 0. Pour $x \neq 0$, la formule donnerait

$$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2|x|},$$

expression qui n'a pas de sens en 0. Et pour cause : $x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

L'hypothèse « $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$ » n'est pas décorative.

Rédiger un calcul de dérivée

Attention : la dérivée intérieure

✗ $\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(x^2)$.

✓ $\big(\sin(x^2)\big)' = 2x\cos(x^2)$. Dans $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, le facteur u' ne disparaît jamais, même quand il vaut une constante.

Méthode : montrer que f'(x) = …

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-2x+3)^2}$. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{-4(x-1)}{(x^2-2x+3)^3}.$$

1. **Justifier la dérivabilité.** La fonction $u : x \mapsto x^2-2x+3$ est un polynôme et, pour tout réel x, $u(x) = (x-1)^2 + 2 \geq 2$: u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc $f = u^{-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. **Annoncer la forme.** $f = u^n$ avec $n = -2$.
3. **Calculer.** Pour tout réel x, $u'(x) = 2x-2$, donc $f'(x) = -2\,u(x)^{-3}\,u'(x) = \dfrac{-2(2x-2)}{(x^2-2x+3)^3}$.
4. **Simplifier et conclure.** Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)}{(x^2-2x+3)^3}$: c'est la forme demandée.

Dérivée d'une fonction réciproque

Une pente inversée

Devine : La pente d'une courbe symétrique

La courbe d'une fonction f strictement croissante passe par $A(1,3)$, avec une tangente de coefficient directeur 4. La courbe de f^{-1} est sa symétrique par rapport à la droite $y = x$: elle passe par $A'(3,1)$. Quel coefficient directeur prévois-tu pour sa tangente en A' ?

A. $\dfrac{1}{4}$

Juste.

Juste : la symétrie échange abscisses et ordonnées, donc inverse la pente.

B. 4

Faux.

La symétrie échange les rôles de x et de y : monter de 4 pour 1 devient monter de 1 pour 4.

C. -4

Faux.

La réciproque d'une fonction croissante est croissante : sa pente n'est pas négative.

D. $-\dfrac{1}{4}$

Faux.

Le signe est faux : f^{-1} est croissante, comme f.

Correction

La symétrie par rapport à la droite $y = x$ échange x et y. La tangente en A, de pente 4, devient une droite qui avance de 4 quand elle monte de 1 : sa pente vaut $\dfrac{1}{4}$.

> Pourquoi est-ce vrai en général ? Le taux de f^{-1} en 3 est l'inverse d'un taux de f en 1. La démonstration ci-dessous fait tendre ce taux vers sa limite.

Théorème : Dérivée de la fonction réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Soit $a \in I$ et $b = f(a)$.

- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

  Si a est une borne de I, ces dérivabilités s'entendent à droite ou à gauche.

- Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

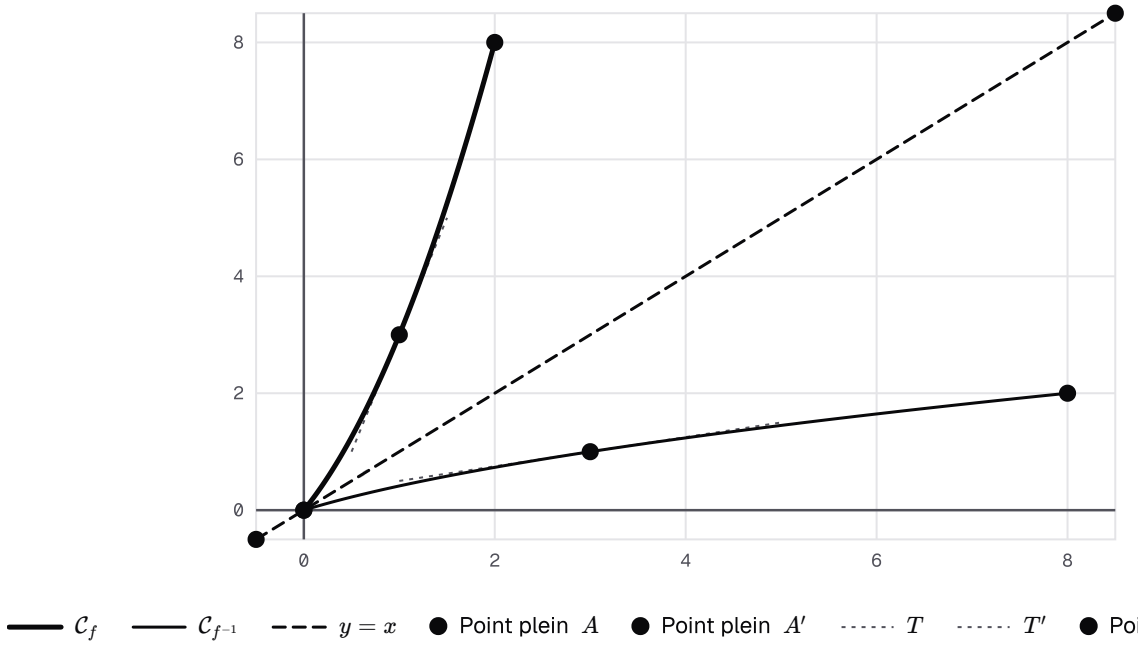
Étape 1. Soit $y \in J$, $y \neq b$, et $x = f^{-1}(y)$. Alors $y = f(x)$, et $x \neq a$ car f^{-1} est injective ; de même $f(x) \neq f(a)$. Donc

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = 1 \Big/ \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Étape 2. f^{-1} est continue sur J (théorème de la fonction réciproque, chapitre Limites et continuité). Donc $x = f^{-1}(y)$ tend vers a quand y tend vers b.

Étape 3. Par composition des limites, le taux de f en a tend vers $f'(a) \neq 0$; son inverse tend vers $\frac{1}{f'(a)}$. Ainsi f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Étape 4. Le second point s'obtient en appliquant le premier en chaque point de J.



La symétrie d'axe y = x envoie A sur A' et la tangente de pente 4 sur une tangente de pente 1/4.

Propriété : Dérivée nulle et tangente verticale de la réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$, et $b = f(a)$.

Si $f'(a) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en b (ni à droite ni à gauche si b est une borne de $f(I)$; « dérivable en a » s'entend alors à droite ou à gauche) : la courbe de f^{-1} admet au point (b, a) une **tangente verticale**, ou une demi-tangente verticale si b est une borne de $f(I)$.

Démonstration

Étape 1. Comme dans la preuve de F12, pour $y \in f(I)$, $y \neq b$, et $x = f^{-1}(y)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = 1 \Big/ \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

et le dénominateur tend vers $f'(a) = 0$ quand y tend vers b.

Étape 2. f est strictement monotone : le taux $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est strictement positif si f est strictement croissante, strictement négatif si elle est strictement décroissante.

Étape 3. Son inverse tend donc vers $+\infty$ dans le premier cas, vers $-\infty$ dans le second. Le taux de f^{-1} en b n'a pas de limite finie : f^{-1} n'est pas dérivable en b, et sa courbe admet une tangente (ou demi-tangente) verticale (F04).

Vérifie : À quoi sert la continuité ?

Dans la démonstration du théorème, l'étape 2 utilise la continuité de f^{-1}. À quoi sert-elle ?

A. À garantir que $x = f^{-1}(y)$ tend vers a quand y tend vers b.

Juste.

Juste : sans cela, on ne pourrait pas passer du taux de f^{-1} au taux de f en a.

B. À garantir que f^{-1} est dérivable, puisqu'elle est continue.

Faux.

La continuité ne donne jamais la dérivabilité : c'est la conclusion cherchée.

C. À garantir que $f'(a) \neq 0$, sans quoi le taux n'aurait pas de limite.

Faux.

$f'(a) \neq 0$ est une hypothèse du théorème, pas une conséquence.

Correction

Le taux de f^{-1} en b s'écrit comme l'inverse du taux de f en a, pris en $x = f^{-1}(y)$. Pour que ce dernier tende vers $f'(a)$, il faut que x tende vers a quand y tend vers b : c'est la continuité de f^{-1} en b. La composition des limites conclut.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour $y \in J$, $y \neq b$, posons $x = f^{-1}(y)$; alors $x \neq a$, et le taux de f^{-1} en b est l'**inverse** du taux de f en $a = f^{-1}(b)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - a}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Si $f'(a) \neq 0$, cet inverse tend vers $\dfrac{1}{f'(a)}$. Si $f'(a) = 0$, la stricte monotonie donne un taux de signe constant ; son inverse tend alors vers $+\infty$ ou vers $-\infty$: d'où la tangente verticale.

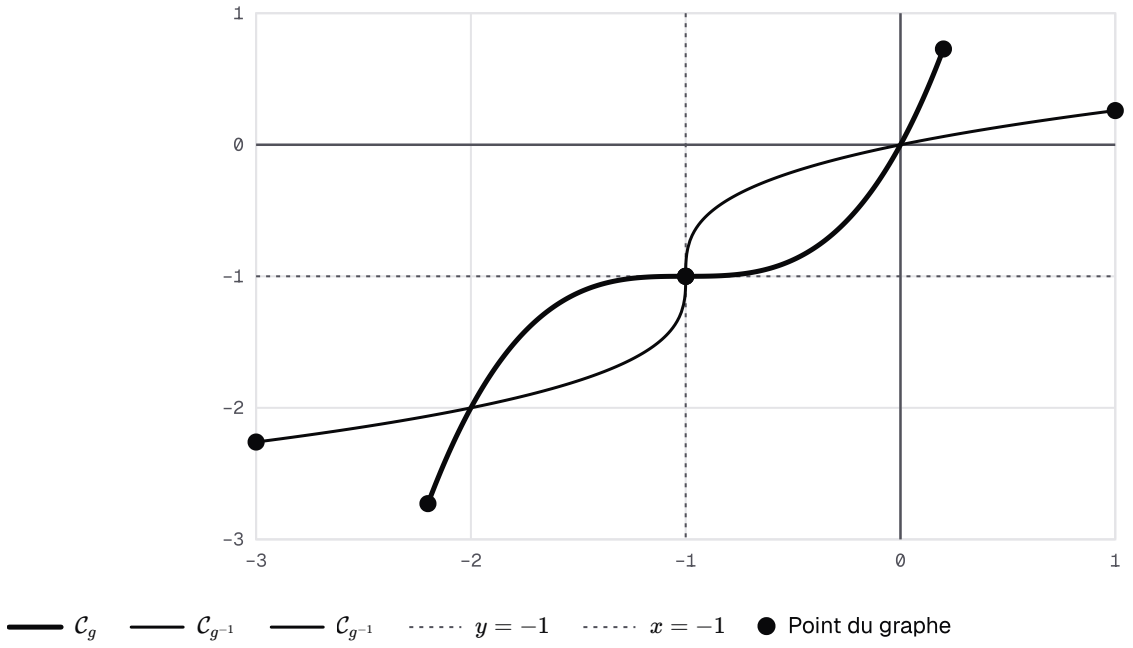
Calculer un nombre dérivé de la réciproque

Exemple : Contre-exemple : quand la dérivée s'annule

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x = (x+1)^3 - 1$. Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme $x \mapsto (x+1)^3$.

Pour tout réel x, $g'(x) = 3(x+1)^2$: g' s'annule en -1, et $g(-1) = -1$.

Comme $g'(-1) = 0$, la propriété sur la dérivée nulle s'applique : g^{-1} n'est pas dérivable en -1, et sa courbe admet au point $(-1, -1)$ une tangente verticale, au sens de la définition des demi-tangentes. L'hypothèse $f'(a) \neq 0$ du théorème est donc indispensable.



Au point (-1, -1), la courbe de g a une tangente horizontale et celle de sa réciproque une tangente verticale.

Remarque : Coin examen : le nombre dérivé de la réciproque

Cette question figure dans 1 des 16 sujets consultés, pour 0,5 point. Modèle, avec $f(x)=x^5+3x-2$ sur $\mathbb{R}$; on cherche d'abord l'antécédent de 2 : $f(1)=1+3-2=2$.

- « f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions strictement croissantes. Elle admet une réciproque f^{-1}, définie sur $f(\mathbb{R})$, qui contient $2=f(1)$. »
- « f est dérivable en 1 et $f'(1)=5\times 1^4+3=8\neq 0$. »
- « Donc f^{-1} est dérivable en 2 et $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{8}$. »

Attention : l'antécédent, pas l'image

✗ $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(2)}$.

✓ $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'(a)}$, où a est l'antécédent de 2 : $f(a)=2$. Et f^{-1} n'est jamais $\dfrac{1}{f}$: l'exposant -1 désigne la réciproque, pas l'inverse.

À toi : Un autre point

Avec la même fonction $f(x)=x^5+3x-2$, que vaut $\left(f^{-1}\right)'(-2)$?

A. $\dfrac{1}{83}$
Faux.

C'est $\dfrac{1}{f'(-2)}$: tu as dérivé en l'image au lieu de l'antécédent.

B. $\dfrac{1}{3}$

Juste.

Juste : $f(0) = -2$ et $f'(0) = 3$.

C. 3

Faux.

C'est $f'(0)$: il faut son inverse.

D. $-\dfrac{1}{3}$

Faux.

f^{-1} est croissante : son nombre dérivé n'est pas négatif.

Indice 1

Cherche d'abord l'antécédent a de -2 par f.

Indice 2

Vérifie que $f'(a) \neq 0$, puis prends l'inverse.

Correction

$f(0) = -2$: l'antécédent de -2 est $a = 0$. De plus, $f'(0) = 3 \neq 0$.

Donc f^{-1} est dérivable en -2 et $\left(f^{-1}\right)'(-2) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$.

Racine n-ième, puissances rationnelles, arctangente

Dériver une racine n-ième

Devine : La pente de la racine cubique

Petit rappel (chapitre Limites et continuité). Pour $n \geq 2$, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la réciproque de $t \mapsto t^n$ sur $[0, +\infty[$. La racine cubique vaut 2 en 8. Quel est son nombre dérivé en 8 ?

A. 12

Faux.

C'est la dérivée de t^3 en 2 : il faut son inverse.

B. $\dfrac{1}{3}$

Faux.

Tu as oublié t^2 : la dérivée de t^3 en 2 vaut 12, pas 3.

C. $\dfrac{1}{192}$

Faux.

Tu as dérivé t^3 en 8 au lieu de 2 : $3 \times 8^2 = 192$.

D. $\dfrac{1}{12}$

Juste.
Juste : $\dfrac{1}{3\times 2^2}=\dfrac{1}{12}$.

Indice 1
Dérive $t\mapsto t^3$ en $t=2$, puis pense à la dérivée de la réciproque.

Correction
Le nombre 8 est l'image de 2 par $t\mapsto t^3$, dont la dérivée en 2 vaut $3\times 2^2=12\neq 0$. La dérivée de la réciproque donne $\dfrac{1}{12}$.

Pourquoi est-ce vrai pour toute racine n-ième ? Le même argument marche en tout $x>0$. En 0, la dérivée de t^n s'annule : la tangente devient verticale.

Propriété : Dérivée de la racine n-ième

Soit n un entier, $n\geq 2$.

- La fonction $x\mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.
- Si u est dérivable sur un intervalle I et $u(x)>0$ pour tout $x\in I$, alors $\sqrt[n]{u}$ est dérivable sur I et $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$.
- La fonction $x\mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0 : sa courbe admet en l'origine une demi-tangente verticale.

Démonstration
Étape 1. La fonction $g:t\mapsto t^n$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ (F08) ; elle y est continue, strictement croissante, et $g([0,+\infty[)=[0,+\infty[$: sa réciproque est la fonction racine n-ième (chapitre Limites et continuité).

Étape 2. Pour $t>0$, $g'(t)=n\,t^{n-1}\neq 0$. D'après F12, la racine n-ième est dérivable en tout $x>0$, et $\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\dfrac{1}{g'\left(\sqrt[n]{x}\right)}=\dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$.

Étape 3. Pour $\sqrt[n]{u}$, on applique F10 avec la racine n-ième, dérivable sur $]0,+\infty[$, qui contient $u(I)$.

Étape 4. En 0 : $g'(0)=0$ car $n\geq 2$. D'après F13, la courbe de la racine n-ième admet en $(0,0)$ une demi-tangente verticale, et la fonction n'est pas dérivable à droite en 0.

Propriété : Dérivée d'une puissance rationnelle

Soit r un rationnel non nul.

La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(x^r)'=r\,x^{r-1}$.

Si u est dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors u^r est dérivable sur I et $(u^r)' = r\,u^{r-1}\,u'$.

Démonstration

Étape 1. On écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec p entier non nul et q entier, $q \geq 1$. Pour $x > 0$, on pose $w(x) = \sqrt[q]{x}$ (avec $w(x) = x$ si $q = 1$) : $w(x) > 0$ et $x^r = w(x)^p$.

Étape 2. w est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $w' = \dfrac{1}{q\,w^{q-1}}$ (F14, ou $w' = 1$ si $q = 1$). D'après F11, $(w^p)' = p\,w^{p-1}\,w' = \dfrac{p}{q}\,w^{p-q}$.

Étape 3. Les règles de calcul sur les puissances rationnelles donnent $w^{p-q} = x^{\frac{p-q}{q}} = x^{r-1}$. Donc $(x^r)' = r\,x^{r-1}$.

Étape 4. Pour u^r, on applique F10 avec $v(t) = t^r$, dérivable sur $]0, +\infty[$, qui contient $u(I)$.

Vérifie : Quel énoncé sert où ?

La démonstration de la dérivée de $x \mapsto x^r$, avec $r = \dfrac{p}{q}$, écrit $x^r = w(x)^p$ où $w(x) = \sqrt[q]{x}$. Quels résultats utilise-t-elle ensuite ?

A. Le théorème des accroissements finis.

Faux.

Il n'intervient pas : tout se fait par des calculs de dérivées.

B. La dérivée de la racine q-ième, puis la formule $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$.

Juste.

Juste : on dérive w, puis la puissance entière w^p.

C. Seulement la dérivée de $t \mapsto t^n$ du tableau des dérivées usuelles.

Faux.

Ce tableau ne contient ni racine, ni exposant négatif : il faut aussi la dérivée de w.

Correction

On dérive d'abord $w = \sqrt[q]{x}$, grâce à la propriété sur la racine n-ième. Puis $x^r = w^p$ est une puissance entière de w. On la dérive avec $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$, valable même si $p < 0$, car $w > 0$. Les règles sur les puissances rationnelles simplifient enfin w^{p-q} en x^{r-1}.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La racine n-ième se dérive comme une **réciproque** : on prend $\dfrac{1}{n\,t^{n-1}}$ en $t = \sqrt[n]{x}$. Une puissance rationnelle s'écrit comme une puissance entière d'une racine. En 0, la dérivée de t^n est nulle : la racine y a une demi-tangente verticale.

Un exemple, puis l'arctangente

Exemple : une racine cubique, une puissance rationnelle

Soit $g : x \mapsto \sqrt[3]{2x^2+6}$. La fonction $u : x \mapsto 2x^2+6$ est dérivable et **strictement positive** sur $\mathbb{R}$: l'hypothèse $u > 0$ est vérifiée. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{4x}{3\left(\sqrt[3]{2x^2+6}\right)^2}.$$

En 1 : $\sqrt[3]{8} = 2$, donc $g'(1) = \dfrac{4}{3 \times 4} = \dfrac{1}{3}$.

De même, avec $r = \dfrac{2}{3}$ et $u : x \mapsto x^2+4$, strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $k : x \mapsto (x^2+4)^{\frac{2}{3}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{2}{3}(x^2+4)^{-\frac{1}{3}} \times 2x \\ &= \frac{4x}{3}(x^2+4)^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Sans l'hypothèse $u > 0$, ces formules pourraient diviser par 0 : la racine cubique n'est pas dérivable à droite en 0.

Devine : La pente de l'arctangente en 0

Petit rappel. $\arctan$ est la réciproque de la restriction de $\tan$ à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et $\tan'(0) = 1$. Quelle pente prévois-tu pour la courbe de $\arctan$ à l'origine ?

A. 0

Faux.

La courbe de $\tan$ n'est pas horizontale en 0 : sa symétrique ne l'est pas non plus.

B. 1

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{\tan'(0)} = 1$.

C. $\dfrac{\pi}{4}$

Faux.

$\dfrac{\pi}{4}$ est la valeur $\arctan 1$, pas une pente.

Correction

L'origine est sur les deux courbes. La pente de $\arctan$ en 0 est l'inverse de $\tan'(0) = 1$, soit 1.

Pourquoi est-ce vrai en tout réel ? Parce que, pour tout $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t \geq 1$: cette dérivée ne s'annule jamais, et $\arctan$ est dérivable partout. Il restera à exprimer $1 + \tan^2(\arctan x)$ en fonction de x.

La dérivée de l'arctangente

Propriété : Dérivée de la fonction arctangente

La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Si u est dérivable sur un intervalle I, alors $\arctan u$ est dérivable sur I et $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Démonstration

Étape 1. On rappelle que $\arctan$ est la réciproque de la restriction de $\tan$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, continue et strictement croissante, dont l'image est $\mathbb{R}$ (chapitre Limites et continuité).

Étape 2. Sur cet intervalle, $\tan$ est dérivable et $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t \geq 1$: sa dérivée ne s'annule pas. D'après F12, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$.

Étape 3. Comme $\tan(\arctan x) = x$ pour tout réel x, on obtient $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Étape 4. Pour $\arctan u$, F10 s'applique avec $v = \arctan$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On dérive $\arctan$ comme la réciproque de $\tan$, puis on simplifie avec $\tan(\arctan x) = x$. Le même schéma sert pour toute réciproque : dériver la fonction directe, composer, simplifier.

Vérifie : Une égalité à bien lire

Dans la démonstration, l'étape 3 remplace $\tan(\arctan x)$ par x. Pour quels réels x cette égalité est-elle vraie ?

A. Pour tout réel x.

Juste.
Juste : $\arctan x$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, où $\tan$ et $\arctan$ sont réciproques.

B. Seulement pour x dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Faux.
Tu confonds avec $\arctan(\tan t) = t$, vrai seulement pour t dans cet intervalle.

C. Seulement pour $x \geq 0$.

Faux.
Aucune restriction de signe : $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction

Pour tout réel x, $\arctan x$ est l'unique réel t de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan t = x$. Donc $\tan(\arctan x) = x$ pour tout réel x. En revanche, $\arctan(\tan t) = t$ n'est vrai que pour t dans cet intervalle : par exemple, $\arctan(\tan \pi) = 0$.

Exemple : arctangente d'un quotient

Soit $v : x \mapsto \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, définie sur $]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

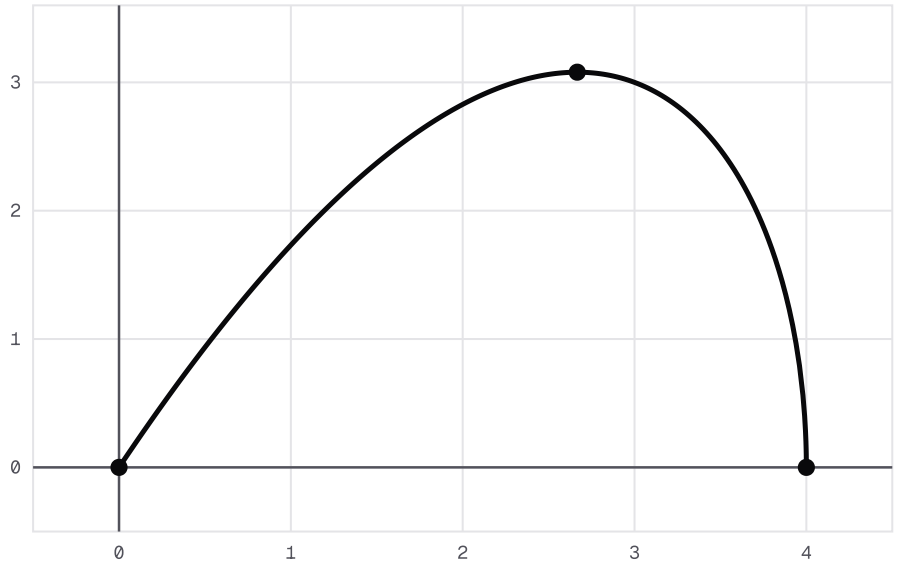
Sur chacun des **intervalles** $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$, la fonction $u : x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est dérivable et $u'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. Or $1 + u(x)^2 = \frac{2(x^2+1)}{(x+1)^2}$. Donc, pour tout $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} v'(x) &= \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2} \\ &= \frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Surprise : v a la même dérivée que $\arctan$, mais seulement sur chaque intervalle. La formule exige un intervalle : en -1, v n'est même pas définie.

Le théorème de Rolle

Au sommet, la pente est nulle



$\mathcal{C}_s$ ● Point plein S ● Point du graphe

Courbe de s(x) = x√(4 − x) sur [0, 4], et son point le plus haut S.

Devine : La pente au sommet

La figure montre la courbe de $s(x) = x\sqrt{4-x}$ sur $[0, 4]$. Au sommet S, d'abscisse $\dfrac{8}{3}$, quelle est la pente de la tangente ?

A. Elle est positive, car la courbe vient de monter.

Faux.

La courbe monte avant S et descend après : la pente en S ne peut être ni positive, ni négative.

B. On ne peut rien dire sans calculer s'.

Faux.

Le calcul confirmerait, mais l'argument des cordes suffit, dès que s est dérivable en ce point.

C. Elle est nulle : la tangente en S est horizontale.

Juste.

Juste : les pentes à gauche et à droite encadrent 0.

Indice 1

Compare les pentes des cordes qui aboutissent en S, depuis la gauche puis depuis la droite.

Correction

Pourquoi est-ce vrai en tout sommet ? Le taux de s en $\dfrac{8}{3}$ est positif ou nul à gauche, négatif ou nul à droite. Sa limite à gauche est donc positive ou nulle, sa limite à droite négative ou nulle. Elles sont égales, puisque s est dérivable en $\dfrac{8}{3}$: la pente vaut 0.

Le calcul le confirme : pour tout $x \in [0, 4[$,

$$s'(x) = \frac{8 - 3x}{2\sqrt{4-x}},$$

qui s'annule en $\dfrac{8}{3}$.

Extremum et dérivée

Propriété : Extremum en un point intérieur et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'est pas une borne de I. On suppose que f admet un **extremum local** en a : il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$ et, pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leq f(a)$ (maximum local), ou bien $f(x) \geq f(a)$ pour tout x de cet intervalle (minimum local).

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Étape 1. Supposons que f admet un maximum local en a, avec δ comme dans l'énoncé.

Étape 2. Pour $a < x < a + \delta$, $f(x) - f(a) \leq 0$ et $x - a > 0$: le taux d'accroissement est négatif ou nul. Par passage à la limite dans une inégalité, $f'_d(a) \leq 0$, et $f'(a) = f'_d(a)$ (F03).

Étape 3. Pour $a - \delta < x < a$, le numérateur est négatif ou nul et $x - a < 0$: le taux est positif ou nul. Donc $f'(a) = f'_g(a) \geq 0$ (FO3).

Étape 4. Ainsi $f'(a) = 0$. Pour un minimum local, on applique ce qui précède à $-f$, qui admet un maximum local en a et dérivable en a : son taux d'accroissement est l'opposé de celui de f, donc $(-f)'(a) = -f'(a)$, et l'on obtient $f'(a) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

En un maximum local, le taux est positif ou nul à gauche, négatif ou nul à droite. Le passage à la limite donne $f'(a) \geq 0$ et $f'(a) \leq 0$, donc $f'(a) = 0$. Aucun tableau de variations n'est utilisé.

Vérifie : Pourquoi un point intérieur ?

La démonstration utilise des x des deux côtés de a. Que se passe-t-il si a est une borne de I ?

A. Un seul côté existe : une seule inégalité, et $f'(a)$ peut être non nul.

Juste.

Juste : l'exemple suivant le montre.

B. Rien ne change : l'inégalité d'un seul côté suffit pour obtenir $f'(a) = 0$.

Faux.

D'un seul côté, on n'obtient qu'une inégalité, par exemple $f'_g(a) \geq 0$.

C. La fonction n'est plus dérivable en a, donc la propriété ne dit rien.

Faux.

Elle peut l'être à droite ou à gauche : le problème est ailleurs.

Correction

Si a est la borne droite de I, seuls les $x < a$ existent. Pour un maximum, on obtient seulement $f'_g(a) \geq 0$, sans l'inégalité inverse. Donc $f'(a) = 0$ n'est plus garanti : un extremum en une borne peut avoir une pente non nulle.

Exemple : Contre-exemple : un maximum en une borne

Soit $h : x \mapsto 3x - x^2$ sur $I = [0, 1]$. Pour tout $x \in I$:

$$h(1) - h(x) = (1 - x)(2 - x) \geq 0.$$

Le maximum de h sur I est donc atteint en 1, une borne. Pourtant $h'(1) = 3 - 2 = 1 \neq 0$. La propriété exige un point qui n'est pas une borne de I.

Le théorème de Rolle

Devine : Une tangente horizontale garantie ?

Une balle lancée vers le haut retombe à sa hauteur de départ : à un instant, elle ne monte ni ne descend. En mathématiques : f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $f(a) = f(b)$. Sa courbe a-t-elle forcément une tangente horizontale entre a et b ?

A. Non : le maximum peut être atteint en a ou en b, où la pente n'est pas nulle.

Faux.

Si le maximum et le minimum sont tous deux atteints aux bornes, ils valent tous deux $f(a)$: f est constante, et ses tangentes sont horizontales.

B. Oui, toujours.

Juste.

Juste, et la démonstration est courte : un extremum atteint à l'intérieur, puis la propriété précédente.

C. Oui, mais seulement si f n'est pas constante.

Faux.

Une fonction constante a aussi des tangentes horizontales, en tout point de $]a, b[$.

Correction

Oui. Pourquoi est-ce vrai ?

Une fonction continue sur un segment atteint un maximum et un minimum : c'est l'image d'un segment, résultat admis au chapitre Limites et continuité. Comme $f(a) = f(b)$, l'un des deux est atteint à l'intérieur, sauf si f est constante. En ce point, la pente est nulle d'après la propriété précédente.

Théorème : Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction telle que :

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est dérivable sur $]a, b[$;
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

Étape 1. f est continue sur le segment $[a, b]$: son image est un segment $[m, M]$ (image d'un segment, admise au chapitre Limites et continuité). Il existe donc x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que $f(x_1) = m$ et $f(x_2) = M$.

Étape 2. Si $m = M$, f est constante sur $[a, b]$: tout $c \in]a, b[$ convient, car le taux d'accroissement d'une constante est nul.

Étape 3. Sinon $m < M$, et l'une au moins de ces deux valeurs diffère de $f(a) = f(b)$. Supposons $M \neq f(a)$; le cas $m \neq f(a)$ est symétrique, avec x_1. Alors $x_2 \neq a$ et $x_2 \neq b$: $c = x_2$ appartient à $]a, b[$.

Étape 4. f admet en c un maximum, donc un maximum local, en un point qui n'est pas une borne de $[a, b]$, et f est dérivable en c. D'après F17, $f'(c) = 0$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un extremum atteint **à l'intérieur** du segment donne une tangente horizontale. L'existence de cet extremum vient de l'image d'un segment par une fonction continue, résultat **admis** au chapitre Limites et continuité. La preuve de Rolle s'appuie donc sur ce résultat admis.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la démonstration du théorème de Rolle, à quoi sert l'hypothèse $f(a) = f(b)$?

A. À garantir que f atteint un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

Faux.
Cela vient de la continuité sur le segment, pas de $f(a) = f(b)$.

B. À garantir que f est dérivable au point trouvé.

Faux.
Cela vient de la dérivabilité sur $]a, b[$.

C. À garantir qu'un des extremums est atteint en un point de $]a, b[$.

Juste.
Juste : si les deux étaient atteints aux bornes, ils vaudraient tous deux $f(a)$, et f serait constante.

Correction
La continuité sur $[a, b]$ donne un maximum M et un minimum m. Si $m < M$, l'hypothèse $f(a) = f(b)$ assure que l'une de ces valeurs diffère de $f(a)$ et de $f(b)$.

Il existe donc $c \in]a, b[$ où elle est atteinte. La dérivabilité sur $]a, b[$ permet enfin d'appliquer la propriété des extremums en c.

Exemple : Contre-exemples : chaque hypothèse compte

Chaque fonction ci-dessous, définie sur $[0, 1]$, vérifie deux hypothèses sur trois, et sa dérivée ne s'annule jamais.

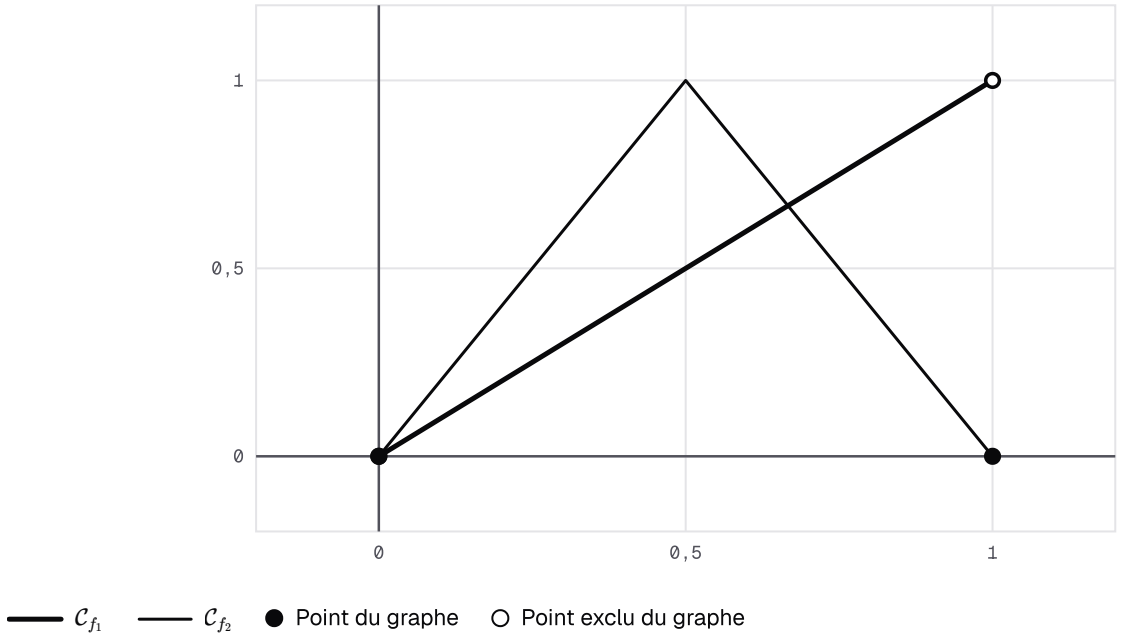
Sans la continuité sur le segment. Soit

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Alors $f_1(0) = f_1(1) = 0$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $f_1'(x) = 1$.

Sans la dérivabilité. $f_2 : x \mapsto 1 - |2x - 1|$ vaut 0 en 0 et en 1. Elle n'est pas dérivable en $\dfrac{1}{2}$, et ailleurs sa dérivée vaut 2 ou -2.

Sans l'égalité aux bornes. $f_3 : x \mapsto x$ vérifie $f_3(0) \neq f_3(1)$ et a pour dérivée 1 partout.



Courbes de f1 et f2 sur [0, 1] : aucune n'a de tangente horizontale, l'une parce qu'elle saute en 1, l'autre à cause de son coin en 1/2.

Borne exclue en x = 1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 1.

Appliquer le théorème

À toi : Rédige une application de Rolle

Soit $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$. Rédige la preuve de : « P' s'annule au moins deux fois sur $]-1, 3[$ », sans calculer les racines de P'.

Indice 1
Repère les trois zéros de P, puis deux segments aux bornes desquels P prend la même valeur.
Indice 2
Sur chaque segment, vérifie les trois hypothèses dans une phrase, puis écris « D'après le théorème de Rolle, il existe… ».
Indice 3
Point délicat : justifie que les deux réels obtenus sont distincts.

Réponse

« P est un polynôme : il est continu et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continu sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $]-1, 2[$. De plus, $P(-1) = P(2) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]-1, 2[$ tel que $P'(c_1) = 0$.

De même, P est continu sur $[2, 3]$, dérivable sur $]2, 3[$, et $P(2) = P(3) = 0$: il existe $c_2 \in]2, 3[$ tel que $P'(c_2) = 0$.

Comme $c_1 < 2 < c_2$, ces deux réels sont distincts : P' s'annule au moins deux fois sur $]-1, 3[$. »

Méthode : Méthode et coin examen : appliquer Rolle

Pour **montrer qu'il existe** $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$:

1. **Nommer** la fonction et le segment $[a, b]$, avec $a < b$.
2. **Vérifier chaque hypothèse** : « f est continue sur $[a, b]$ car… », « dérivable sur $]a, b[$ car… », « $f(a) = f(b)$ ».
3. **Conclure** : « D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. » Cette phrase se recopie telle quelle à l'examen.

Fonction auxiliaire. Pour montrer que $E(x) = 0$ a une solution dans $]a, b[$, cherche g continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $g' = E$ et $g(a) = g(b)$.

Exemple : la fonction $g : x \mapsto x^4 - 3x^3 + 2x$ est un polynôme, donc continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. De plus $g(0) = g(1) = 0$ et, pour tout réel x, $g'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2$. Donc l'équation $4x^3 - 9x^2 + 2 = 0$ a une solution dans $]0, 1[$.

Attention : la continuité sur le segment fermé

✗ « f est dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$, donc il existe c… »

✓ Vérifie aussi la continuité sur $[a, b]$, **bornes comprises**. La dérivabilité sur $]a, b[$ ne dit rien de f en a et en b : la fonction f_1 ci-dessus le prouve.

Le théorème des accroissements finis

Vitesse moyenne, vitesse instantanée

Devine : Le compteur du train

Un train parcourt 150 km en 2 heures, sans jamais changer brusquement de vitesse. Sa vitesse moyenne vaut 75 km/h. Le compteur a-t-il affiché exactement 75 km/h à un instant du trajet ?

A. Non, pas forcément : il a pu rouler à 60, puis à 90 km/h.

Faux.
Rouler à 60 puis à 90 km/h ne contredit rien : le théorème affirme qu'à un instant au moins, la vitesse égale la moyenne.

B. Oui, à au moins un instant.

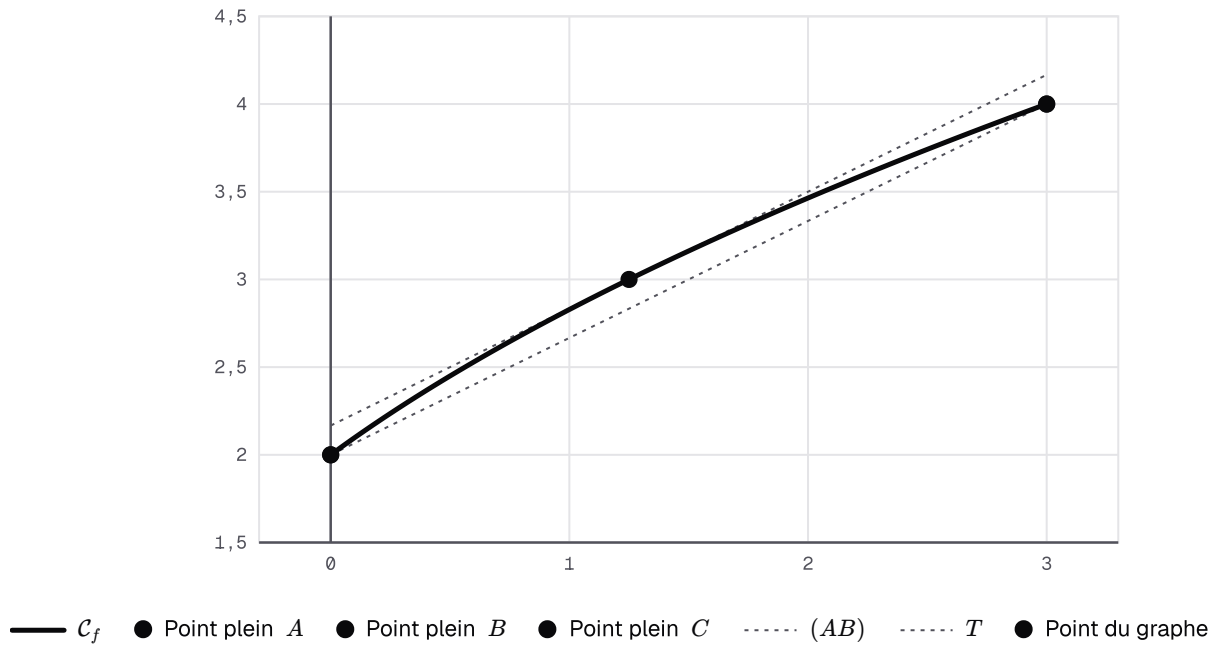
Juste.
Juste. Toujours sous 75, le train ferait moins de 150 km ; toujours au-dessus, il en ferait plus.

C. Seulement s'il a roulé à vitesse constante.

Faux.
Une vitesse constante est un cas particulier : le résultat vaut sans elle.

Correction
Oui. La vitesse moyenne est la pente de la corde entre le départ et l'arrivée ; la vitesse instantanée est la pente de la tangente. Le théorème des accroissements finis (TAF) affirme qu'une tangente au moins est parallèle à la corde.

Pourquoi est-ce vrai ? On retranche à f la fonction affine de la corde : la différence prend la même valeur aux deux bornes, et Rolle s'applique.



Courbe de f(x) = 2√(x + 1) sur [0, 3], corde (AB) et tangente T au point C, parallèle à (AB).

Le théorème

Théorème : Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a),\quad \text{c'est-à-dire}\quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration

Étape 1. On pose $p=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, pente de la corde, et, pour $x\in[a,b]$, $g(x)=f(x)-f(a)-p\,(x-a)$.

Étape 2. g est la différence de f et d'une fonction affine : elle est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ (F09), et $g'(x)=f'(x)-p$.

Étape 3. $g(a)=0$ et $g(b)=f(b)-f(a)-p\,(b-a)=0$. Les trois hypothèses du théorème de Rolle (F18) sont donc vérifiées par g sur $[a,b]$.

Étape 4. Il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, c'est-à-dire $f'(c)=p$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On fabrique une **fonction auxiliaire** : on retranche à f la fonction affine dont la courbe porte la corde (AB). La différence s'annule en a et en b, donc Rolle s'applique à elle. Retiens le geste : retrancher la corde pour se ramener à Rolle.

Vérifie : Le rôle de la corde

Dans la démonstration, pourquoi la fonction auxiliaire g vérifie-t-elle $g(b)=0$?

A. Parce que $f(b)=f(a)$, comme dans le théorème de Rolle.

Faux.
Le théorème ne suppose pas $f(a)=f(b)$: c'est justement la différence avec Rolle.

B. Parce que g est dérivable sur $]a,b[$, donc continue en b.

Faux.
La dérivabilité ne donne aucune valeur de g : elle sert à appliquer Rolle.

C. Parce que la pente retranchée est celle de la corde (AB).

Juste.
Juste : la fonction affine retranchée vaut $f(b)$ en b.

Correction

La fonction affine retranchée a pour pente $p=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et vaut $f(a)$ en a. En b, elle vaut

$$f(a)+p\,(b-a)=f(b).$$

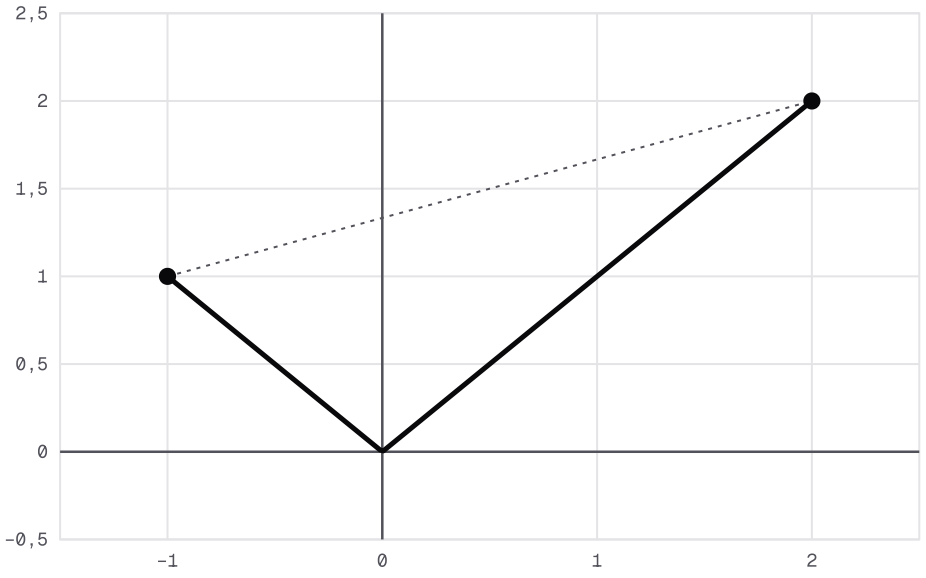
Donc $g(b)=0$, comme $g(a)=0$. Les trois hypothèses de Rolle sont réunies pour g : il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $g'(c)=0$, c'est-à-dire $f'(c)=p$.

Exemple : Contre-exemple : sans la dérivabilité

Soit $d : x \mapsto |x|$ sur $[-1, 2]$; d est continue. La corde a pour pente

$$\frac{d(2) - d(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}.$$

Or, pour tout $x \neq 0$, $d'(x)$ vaut -1 ou 1 : jamais $\frac{1}{3}$. Le théorème ne s'applique pas, car d n'est pas dérivable en 0, point de $]-1, 2[$.



Courbe de |x| sur [-1, 2] et sa corde de pente 1/3 : aucune portion de la courbe n'a cette pente.

Rédiger

Attention : le réel c n'est pas connu

✗ Utiliser c sans l'avoir introduit par « il existe », ou lui donner une valeur au hasard.

✓ « Il existe $c \in]a, b[$ tel que… », puis on **encadre** c : $a < c < b$. Le théorème ne donne ni la valeur de c, ni son unicité. Quand f' est explicite, on peut parfois trouver c en résolvant $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, comme au début du chapitre.

Remarque : Coin examen : encadrer avec le TAF

Le théorème de Rolle ou le TAF est cité par son nom dans 4 des 16 sujets consultés, pour 0,5 point environ. Exemple : montrer que, pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

- « $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\arctan b - \arctan a = \dfrac{b-a}{1+c^2}$. »
- « Or $0 < a < c < b$, donc $1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$. Ces trois réels sont strictement positifs, et le passage à l'inverse renverse l'ordre entre eux : $\dfrac{1}{1+b^2} < \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+a^2}$. »
- « Comme $b-a>0$, on multiplie par $b-a$: c'est l'encadrement demandé. »

À toi : Encadre à ton tour

Sur le même modèle, montre que $\dfrac{1}{2\sqrt{17}} < \sqrt{17} - 4 < \dfrac{1}{8}$. Rédige comme dans le Coin examen.

Indice 1

Applique le TAF à la racine carrée sur $[16,17]$.

Indice 2

Écris $\sqrt{17} - \sqrt{16} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$, avec $16 < c < 17$.

Indice 3

Point délicat : passe à la racine, puis à l'inverse, en vérifiant le sens des inégalités.

Réponse

« La fonction racine carrée est continue sur $[16,17]$ et dérivable sur $]16,17[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]16,17[$ tel que $\sqrt{17} - \sqrt{16} = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$.

Or $16 < c < 17$, donc $4 < \sqrt{c} < \sqrt{17}$, car la racine carrée est strictement croissante. Ces réels sont strictement positifs, et le passage à l'inverse renverse l'ordre entre eux, donc $\dfrac{1}{2\sqrt{17}} < \dfrac{1}{2\sqrt{c}} < \dfrac{1}{8}$.

Comme $\sqrt{16} = 4$, on obtient $\dfrac{1}{2\sqrt{17}} < \sqrt{17} - 4 < \dfrac{1}{8}$. »

Signe de la dérivée et variations, enfin démontré

Le signe de la dérivée

Vérifie : Une règle de première

Petit rappel. Depuis la première, tu utilises : « si $f' \geq 0$ sur un intervalle, alors f y est croissante ». Quel outil de ce chapitre permet enfin de le démontrer ?

A. Le théorème des accroissements finis.

Juste.

Juste : il relie $f(y) - f(x)$ à une valeur de f'.

B. La définition du nombre dérivé, seule.

Faux.

Le nombre dérivé est local : il parle de f près d'un point, pas sur tout un intervalle.

C. Le théorème de Rolle seul, avec $f(x) = f(y)$.

Faux.

On ne sait pas que $f(x) = f(y)$: c'est le TAF, conséquence de Rolle, qui sert.

Correction

Pourquoi est-ce vrai ? Soit x et y deux réels de l'intervalle, avec $x < y$. Le TAF affirme qu'il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x).$$

Le signe de $f'(c)$ donne alors le signe de $f(y) - f(x)$. C'est le cœur de la démonstration qui suit.

Théorème : Signe de la dérivée et variations

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I, alors f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Démonstration

Étape 1. Soit $x < y$ dans I. f est continue sur $[x, y]$ (F05) et dérivable sur $]x, y[$. Le TAF (F19) donne $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$.

Étape 2. Si $f' \geq 0$ sur I, alors $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$, donc $f(y) \geq f(x)$: f est croissante.

Étape 3. Supposons de plus que f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Soit $x < y$ dans I ; l'étape 2 donne $f(x) \leq f(y)$. Supposons par l'absurde que $f(x) = f(y)$. Pour tout $t \in [x, y]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(y) = f(x)$: f est constante sur $[x, y]$, donc f' est nulle en tout point de $]x, y[$, qui en compte une infinité. C'est absurde, donc $f(x) < f(y)$.

Étape 4. Le cas $f' \leq 0$ s'obtient avec $-f$. Si $f' = 0$ sur I, l'étape 1 donne $f(y) = f(x)$; la réciproque vient de F08.

Propriété : Extremum et changement de signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On suppose que f' s'annule en a **en changeant de signe** : il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta, a+\delta[\subset I$, avec $f' \geq 0$ sur $]a-\delta, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+\delta[$, ou l'inverse.

Alors f admet un extremum local en a : un maximum dans le premier cas, un minimum dans le second.

La réciproque de F17 est fausse : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour que f admette un extremum local en a.

Démonstration

Étape 1. Premier cas : $f' \geq 0$ sur $]a-\delta, a]$ et $f' \leq 0$ sur $[a, a+\delta[$. D'après F20, f est croissante sur $]a-\delta, a]$ et décroissante sur $[a, a+\delta[$.

Étape 2. Donc $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in]a-\delta, a]$ et pour tout $x \in [a, a+\delta[$: f admet un maximum local en a. Le second cas s'obtient avec $-f$.

Réciproque fausse. La fonction cube a une dérivée nulle en 0. Mais $x^3 < 0$ pour $x < 0$ et $x^3 > 0$ pour $x > 0$: elle n'admet pas d'extremum local en 0.

Vérifie : La stricte croissance

Dans l'étape 3 de la démonstration, on suppose $f(x) = f(y)$ avec $x < y$. Quelle contradiction obtient-on ?

A. f n'est pas dérivable.
Faux.
La dérivabilité n'est jamais remise en cause dans ce raisonnement.

B. f' est strictement négative quelque part.
Faux.
On a supposé $f' \geq 0$: la contradiction porte sur le nombre de zéros de f'.

C. f' s'annule en une infinité de points.
Juste.
Juste : f serait constante sur $[x, y]$, donc f' serait nulle sur tout $]x, y[$.

Correction
Comme f est croissante, pour tout $t \in [x, y]$, $f(x) \leq f(t) \leq f(y) = f(x)$: f est constante sur $[x, y]$.

Sa dérivée est alors nulle en chaque point de $]x, y[$, qui en compte une infinité. Or f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points : contradiction.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

> Le TAF transforme une information sur f' en une inégalité entre $f(x)$ et $f(y)$. Pour un extremum, on applique ce résultat de part et d'autre de a : f croît puis décroît, donc $f(a)$ est un maximum local.

Deux pièges

Exemple : Contre-exemple : un intervalle est indispensable

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^2} > 0$.

Pourtant $f(-1) = 2$ et $f(1) = -2$: $f(-1) > f(1)$, donc f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}^*$. Elle l'est sur chacun des deux **intervalles**, mais $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Attention : une dérivée nulle ne suffit pas

✗ « $f'(a) = 0$, donc f admet un extremum en a. »

✓ Pour conclure à un extremum, vérifie que f' **change de signe** en a. Par exemple, $g : x \mapsto (x-1)^3 + 2$ vérifie $g'(1) = 0$. Mais, pour tout réel x, $g'(x) = 3(x-1)^2 \geq 0$, nulle seulement en 1 : g est strictement croissante, sans extremum en 1.

Méthode : prouver une inégalité par l'étude d'une fonction

Pour **montrer que** $A(x) \leq B(x)$ pour tout $x \in I$:

1. **Ramener à un signe** : pose $g(x) = B(x) - A(x)$; il s'agit de montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
2. **Étudier g** : dérivée, signe de g', variations justifiées par le signe de la dérivée.
3. **Lire le minimum** de g sur I, ou sa valeur en une borne, et montrer qu'il est positif ou nul.
4. **Conclure** par une phrase : « donc, pour tout $x \in I$, $A(x) \leq B(x)$ ».

Démontrer une inégalité

Exemple : Exemple guidé : minorer l'arctangente

Montrons que, pour tout $x \geq 0$:

$$\arctan x \geq x - \frac{x^3}{3}.$$

Fonction. Pour $x \geq 0$, posons $g(x) = \arctan x - x + \dfrac{x^3}{3}$. La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

Dérivée. Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 \\ &= \frac{1 - (1-x^2)(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{x^4}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Variations. Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $[0, +\infty[$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire $\arctan x \geq x - \dfrac{x^3}{3}$.

À toi : À ton tour

On veut montrer que $\arctan x \leq x$ pour tout $x \geq 0$. On pose $h(x) = x - \arctan x$. Quel argument conclut ?

A. $h(0) = 0$, donc $h(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

Faux.

La valeur en 0 ne suffit pas : il faut savoir que h croît à partir de 0.

B. $h' \geq 0$ sur $[0, +\infty[$, donc h croît et $h(x) \geq h(0) = 0$.

Juste.

Juste : dérivée, signe, variations, valeur en 0.

C. $h'(0) = 0$ et $h'' \geq 0$, donc h admet un minimum local en 0, et $h(x) \geq h(0)$.

Faux.

Un minimum local ne dit rien loin de 0 ; de plus, 0 est une borne de l'intervalle, où la propriété des extremums ne s'applique pas.

Indice 1

Calcule $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$, puis réduis au même dénominateur.

Correction

Pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc h est croissante sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \geq 0$, $h(x) \geq h(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $\arctan x \leq x$.

Remarque **: Coin examen : l'inégalité préparatoire**

Forme d'examen : une inégalité est démontrée d'abord, puis réutilisée dans l'étude. Rédige-la en quatre phrases : la fonction posée, sa dérivée simplifiée, son signe et la conséquence sur les variations, puis la conclusion écrite avec « pour tout ».

À la question « en déduire », nomme la substitution et vérifie sa condition. Modèle : « Pour $x > 0$, $t = \dfrac{1}{x}$ est positif, donc l'inégalité précédente s'applique à t : $\arctan \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{x}$. »

L'inégalité des accroissements finis

Majorer la pente

Devine : Une vitesse limitée

Une voiture ne dépasse jamais 90 km/h. Quelle distance peut-elle parcourir, au plus, en 20 minutes ?

A. 90 km au plus.

Faux.

90 km est la distance maximale en une heure, pas en vingt minutes.

B. $4{,}5$ km au plus.

Faux.

Tu as divisé 90 par 20 : or 20 minutes font un tiers d'heure.

C. 30 km au plus.

Juste.

Juste : $90 \times \dfrac{1}{3} = 30$.

Correction

En 20 minutes, soit un tiers d'heure, la voiture parcourt au plus $90 \times \dfrac{1}{3} = 30$ km.

Pourquoi est-ce vrai ? Une vitesse toujours majorée par 90 majore aussi la vitesse moyenne. En langage de fonctions : si $|f'| \leq M$, la pente de chaque corde est majorée par M en valeur absolue. C'est l'inégalité des accroissements finis (IAF), conséquence directe du TAF.

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Première forme. Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe deux réels m et M tels que $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors

$$m\,(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M\,(b - a).$$

Seconde forme. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. S'il existe un réel M tel que $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$, alors, pour tous x et y de I :

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|.$$

Démonstration

Étape 1. Première forme : le TAF (F19) donne $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$. Or $m \leq f'(c) \leq M$ et $b - a > 0$: on multiplie cet encadrement par $b - a$.

Étape 2. Seconde forme : soit x et y dans I. Si $x = y$, les deux membres sont nuls. Sinon, quitte à les échanger, $x < y$. Comme I est un intervalle, $[x, y] \subset I$; f est continue sur $[x, y]$ (F05) et dérivable sur $]x, y[$.

Étape 3. Le TAF donne $c \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)\,(y - x)$. Donc $|f(x) - f(y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leq M\,|x - y|$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le TAF affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

On ne cherche pas c : on remplace $f'(c)$ par ses bornes m et M, valables **sur tout l'intervalle**. Retiens le geste : un encadrement de f' donne un encadrement des accroissements de f.

Vérifie : Pourquoi un intervalle ?

Dans la seconde forme, la démonstration affirme $[x, y] \subset I$. Pourquoi ?

A. Parce que f est dérivable sur I, donc définie entre x et y.

Faux.
La dérivabilité ne dit rien de la forme de I.

B. Parce que I est un intervalle.

Juste.
Juste : un intervalle contient tout réel compris entre deux de ses éléments. C'est ce qui permet d'appliquer le TAF sur $[x, y]$.

C. Parce que $|f'| \leq M$ sur I, donc f ne sort pas de I.

Faux.
Cette majoration ne concerne que les valeurs de f', pas la forme de I.

Correction
Le TAF s'applique sur un segment où f est continue et dérivable. Si $x < y$ sont dans I et que I est un intervalle, tout le segment $[x, y]$ est dans I : f y est dérivable, donc continue. Sur un ensemble troué, cet argument tombe, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : Contre-exemple : un ensemble qui n'est pas un intervalle

Sur $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, soit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur D et, pour tout $x \in D$, $f'(x) = 0$: on peut prendre $M = 0$.

Pourtant $|f(1) - f(-1)| = 2$, alors que $M\,|1 - (-1)| = 0$. L'inégalité est fausse, car D n'est pas un intervalle.

Encadrer un nombre

Méthode : encadrer avec l'inégalité des accroissements finis

Pour **montrer que** $m\,(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M\,(b-a)$:

1. **Choisir** la fonction f et le segment $[a, b]$, avec $a < b$.
2. **Encadrer f'** sur tout $]a, b[$: $m \leq f'(x) \leq M$, par exemple grâce aux variations de f'.
3. **Vérifier** que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, puis citer l'IAF.
4. **Réécrire** l'encadrement sous la forme demandée.

Remarque : Coin examen : encadrer avec l'IAF

À maîtriser : l'inégalité des accroissements finis sert dans les études et dans les suites, qu'elle soit nommée ou non. Modèle, pour encadrer $\arctan \dfrac{11}{10}$:

- « $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\left[1, \dfrac{11}{10}\right]$ et dérivable sur $\left]1, \dfrac{11}{10}\right[$. »
- « Pour $1 < x < \dfrac{11}{10}$, $2 < 1 + x^2 < \dfrac{221}{100}$, donc $\dfrac{100}{221} \leq \arctan'(x) \leq \dfrac{1}{2}$. »
- « D'après l'inégalité des accroissements finis, $\dfrac{10}{221} \leq \arctan \dfrac{11}{10} - \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{1}{20}$. »

Valeurs approchées : $0{,}830 \leq \arctan \dfrac{11}{10} \leq 0{,}836$.

À toi : Rédige une majoration

Rédige la preuve de : pour tous réels x et y, $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$.

Indice 1
Quelle forme de l'inégalité des accroissements finis, et sur quel intervalle ?
Indice 2
Majore $|\arctan'(t)|$ pour tout réel t.
Indice 3

Point délicat : dis que $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $\arctan$ y est dérivable.

Réponse

« La fonction $\arctan$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\arctan'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. Or $1+t^2 \geq 1$, donc $0 < \arctan'(t) \leq 1$, c'est-à-dire $|\arctan'(t)| \leq 1$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (seconde forme, avec $M = 1$), pour tous réels x et y : $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$. »

Attention : majorer sur tout l'intervalle

✗ « $|f'(a)| \leq M$ et $|f'(b)| \leq M$, donc… »

✓ La majoration doit valoir pour **tout** x de l'intervalle, pas seulement aux bornes. Entre a et b, $|f'|$ peut dépasser ses valeurs aux bornes : étudie f' avant de conclure.

Suites récurrentes contractantes

Des termes qui se rapprochent

Petit rappel (chapitre Suites). Une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans un intervalle I dès que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$: on dit que I est **stable**.

Si la suite converge vers un réel α de I et que f est continue, alors $f(\alpha) = \alpha$: α est un **point fixe**. Reste à prouver la convergence, et à mesurer sa vitesse.

Devine : Des distances qui fondent

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Le point fixe est $\alpha = 3$. À 10^{-3} près : $u_1 \approx 2{,}236$, $u_2 \approx 2{,}734$, $u_3 \approx 2{,}910$. Que fait la distance $|u_n - 3|$ d'un terme au suivant ?

A. Elle est au moins divisée par 2 à chaque étape.

Juste.

Juste : 2, puis environ $0{,}764$, $0{,}266$ et $0{,}090$.

B. Elle diminue de la même quantité à chaque étape.

Faux.

Les baisses successives valent environ $1{,}236$, puis $0{,}497$: elles ne sont pas égales. La distance est multipliée, pas diminuée d'une quantité fixe.

C. Elle diminue, mais de moins en moins vite, sans tendre vers 0.

Faux.

Les rapports successifs restent proches de $0{,}35$: la distance est multipliée à chaque fois par moins de $\dfrac{1}{2}$.

Correction

Les distances à 3 valent 2, puis environ $0{,}764$, $0{,}266$ et $0{,}090$. Chacune est inférieure à la moitié de la précédente.

Pourquoi est-ce vrai ? Sur $[1,4]$, $|f'| \leq \dfrac{1}{2}$. L'IAF entre u_n et 3 donne alors $|u_{n+1}-3| \leq \dfrac{1}{2}|u_n-3|$.

La propriété de contraction

Propriété : Suite récurrente contractante

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha)=\alpha$, et k un réel tel que $0 \leq k < 1$ et $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \in I, \qquad |u_{n+1}-\alpha| \leq k\,|u_n-\alpha|, \qquad |u_n-\alpha| \leq k^n\,|u_0-\alpha|,$$

et la suite (u_n) converge vers α.

Démonstration

Étape 1. Par récurrence. Initialisation : $u_0 \in I$. Hérédité : si $u_n \in I$, alors $u_{n+1}=f(u_n) \in I$ car $f(I) \subset I$. Conclusion : $u_n \in I$ pour tout n.

Étape 2. u_n et α sont dans I. L'IAF (F22, seconde forme, avec $M=k$) donne $|f(u_n)-f(\alpha)| \leq k\,|u_n-\alpha|$, soit $|u_{n+1}-\alpha| \leq k\,|u_n-\alpha|$ car $f(\alpha)=\alpha$.

Étape 3. Par récurrence. Initialisation : $k^0=1$, l'inégalité est une égalité pour $n=0$. Hérédité : si $|u_n-\alpha| \leq k^n|u_0-\alpha|$, l'étape 2 et $k \geq 0$ donnent $|u_{n+1}-\alpha| \leq k^{n+1}|u_0-\alpha|$. Conclusion : l'inégalité vaut pour tout n.

Étape 4. Comme $0 \leq k < 1$, k^n tend vers 0. Puisque $0 \leq |u_n-\alpha| \leq k^n|u_0-\alpha|$, par comparaison $|u_n-\alpha|$ tend vers 0 : (u_n) converge vers α.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve enchaîne quatre gestes. L'intervalle stable garde les termes dans I ; l'IAF entre u_n et α donne l'inégalité d'un pas ; une récurrence l'itère ; la comparaison avec k^n conclut. C'est la chaîne que découpent les sujets d'examen qui la proposent.

Vérifie : Pourquoi un intervalle stable ?

Dans l'étape 2, on applique l'IAF entre u_n et α. Quelle hypothèse garantit que u_n appartient à I ?

A. $|f'(x)| \leq k$ sur I, qui empêche u_n de s'éloigner.
Faux.
Cette majoration sert à l'IAF, pas à rester dans I.

B. $f(\alpha) = \alpha$, car les termes s'approchent du point fixe.

Faux.

Le point fixe sert à remplacer $f(\alpha)$ par α, pas à localiser u_n.

C. $f(I) \subset I$, avec $u_0 \in I$, par récurrence.

Juste.

Juste : c'est l'étape 1.

Correction

L'IAF ne s'applique qu'à des points de I, où $|f'| \leq k$. L'étape 1 prouve par récurrence que tous les u_n sont dans I : $u_0 \in I$, et $f(I) \subset I$ fait passer de u_n à u_{n+1}. Sans intervalle stable, un terme pourrait sortir de la zone où f' est majorée.

Exemple : Contre-exemple : sans constante inférieure à 1

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2}$, de point fixe $\alpha = 1$; pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{3}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3}{2}(u_n - 1)$, donc

$$u_n - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 - 1).$$

Avec $u_0 = \dfrac{11}{10}$, la distance à 1 vaut $\dfrac{1}{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ et tend vers $+\infty$. Sans $k < 1$, aucune convergence n'est garantie.

La chaîne complète

Méthode : la chaîne de la contraction

Pour **montrer que** (u_n) converge vers α :

1. **Intervalle stable** : montrer que $f(I) \subset I$, par exemple avec les variations de f.
2. **Point fixe** : vérifier que $\alpha \in I$ et $f(\alpha) = \alpha$.
3. **Majorer** : $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$, avec $0 \leq k < 1$.
4. **Rester dans I** : par récurrence, $u_n \in I$ pour tout n (initialisation : $u_0 \in I$; hérédité : $f(I) \subset I$).
5. **Un pas** : l'IAF donne $|u_{n+1} - \alpha| \leq k\,|u_n - \alpha|$.
6. **Récurrence** : $|u_n - \alpha| \leq k^n\,|u_0 - \alpha|$.
7. **Conclure** : k^n tend vers 0, donc (u_n) converge vers α par comparaison.

Exemple : Exemple guidé : préparer la chaîne

On reprend $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$, $u_0 = 1$ et $I = [1, 4]$.

Stable. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0$: f est continue et croissante sur I. Donc

$$f(I) = \left[\sqrt{5}, \sqrt{11}\right] \subset [1, 4].$$

Point fixe. $f(3) = \sqrt{9} = 3$ et $3 \in I$.

Majorer. Pour tout $x \in I$, $0 < f'(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}} \leq \dfrac{1}{2}$, donc $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$: on prend $k = \dfrac{1}{2}$.

Rester dans I. $u_0 = 1 \in I$; si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$. Donc $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À toi : Rédige le pas et la récurrence

Toujours avec $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$, $u_0 = 1$ et $I = [1, 4]$, rédige :

- (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 3|$;
- (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$;
- (c) la limite de (u_n).

Indice 1

Pour (a), cite l'inégalité des accroissements finis : sur quel intervalle, avec quelle constante, entre quels points ?

Indice 2

Pour (b), une récurrence : initialisation en $n = 0$, puis hérédité avec (a).

Indice 3

Point délicat : en (a), remplace $f(3)$ par 3 en le disant.

Réponse

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et $|f'| \leq \dfrac{1}{2}$ sur I. Les réels u_n et 3 appartiennent à I. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u_n) - f(3)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 3|$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(3) = 3$:

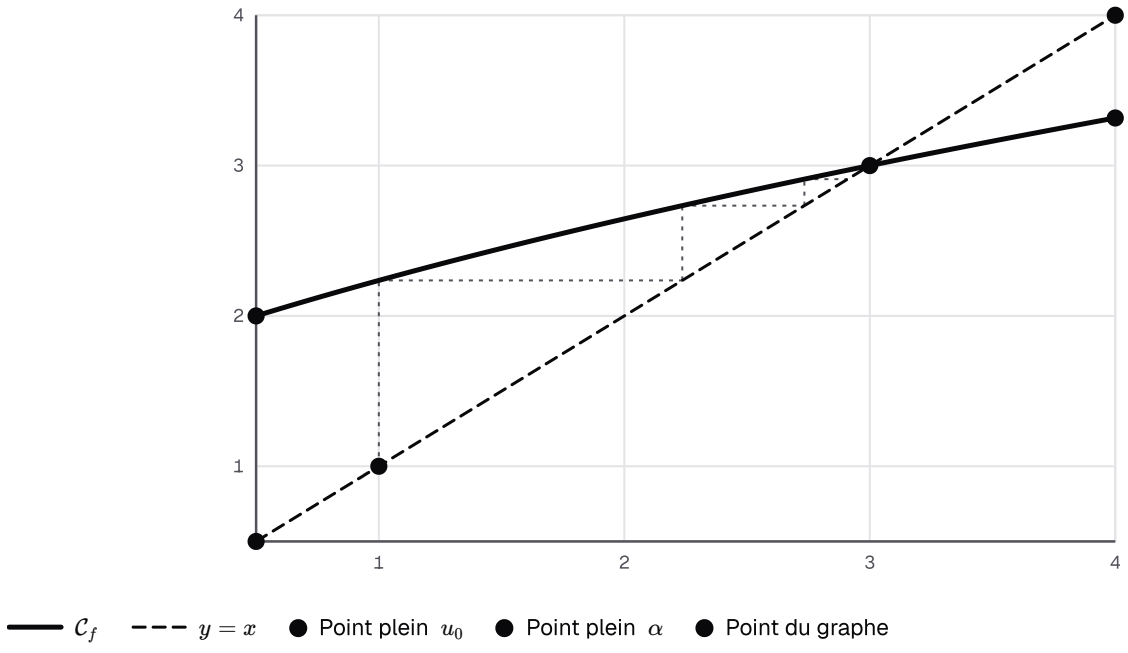
$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{2}|u_n - 3|.$$

(b) Initialisation : $|u_0 - 3| = 2 = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$. Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. D'après (a) :

$$\begin{aligned} &|u_{n+1} - 3| \\ &\leq \frac{1}{2} \times 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Conclusion : l'inégalité vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0. Par comparaison, $|u_n - 3|$ tend vers 0 : (u_n) converge vers 3.



Construction en escalier des premiers termes : la suite monte vers le point fixe 3.

S'entraîner et rédiger

Attention : la majoration sur tout l'intervalle stable

✗ Majorer $|f'|$ seulement en α, ou sur un intervalle qui ne contient pas tous les u_n.

✓ Il faut $|f'(x)| \leq k$ pour **tout** x d'un intervalle stable qui contient u_0 et α, avec $k < 1$. Sinon, l'IAF entre u_n et α n'est pas justifiée.

À toi : Trouver la constante

Soit $g(x) = 1 + \dfrac{\cos x}{3}$ sur $I = [0, 2]$. On admet que $g(I) \subset I$ et que g a un point fixe $\alpha \in I$. Quelle constante k permet d'appliquer la propriété de contraction ?

A. $k = 1$

Faux.

$k = 1$ majore bien $|g'|$, mais la propriété exige $k < 1$.

B. $k = \dfrac{4}{3}$

Faux.

Tu as majoré g, pas g' : la constante porte sur la dérivée.

C. Aucune : on ne connaît pas α.

Faux.

La valeur exacte de α est inutile : seule compte la majoration de $|g'|$ sur I.

D. $k = \dfrac{1}{3}$

Juste.

Juste : $|g'(x)| = \dfrac{|\sin x|}{3} \leq \dfrac{1}{3}$.

Indice 1

Calcule $g'(x)$.

Indice 2

Majore $|\sin x|$ par 1.

Correction

Pour tout réel x, $g'(x) = -\dfrac{\sin x}{3}$, donc $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{3}$ pour tout $x \in I$.

Avec $k = \dfrac{1}{3} < 1$, la propriété s'applique à toute suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Une telle suite converge vers α.

Remarque : Coin examen : la chaîne de la contraction

On retrouve cette chaîne dans 7 des 16 sujets consultés, à raison de 0,5 à 0,75 point par question. L'énoncé la découpe en « montrer que » successifs : stabilité, majoration de $|f'|$, inégalité d'un pas, inégalité en k^n, limite. Chaque question se rédige avec la méthode ci-dessus. À la question « d'un pas », cite l'IAF et ses hypothèses.

Dérivée seconde, convexité, inflexion

Au-dessus de ses tangentes

Devine : Une parabole et ses tangentes

La courbe de $x \mapsto x^2$ est-elle au-dessus ou au-dessous de sa tangente au point d'abscisse a ? Cette tangente a pour équation $y = 2ax - a^2$.

A. Au-dessous, quel que soit a.

Faux.

Calcule la différence en $x = a + 1$: elle vaut $1 > 0$.

B. Au-dessus, quel que soit a.

Juste.

Juste : $x^2 - (2ax - a^2) = (x - a)^2 \geq 0$.

C. Au-dessus pour $a > 0$, au-dessous pour $a < 0$.

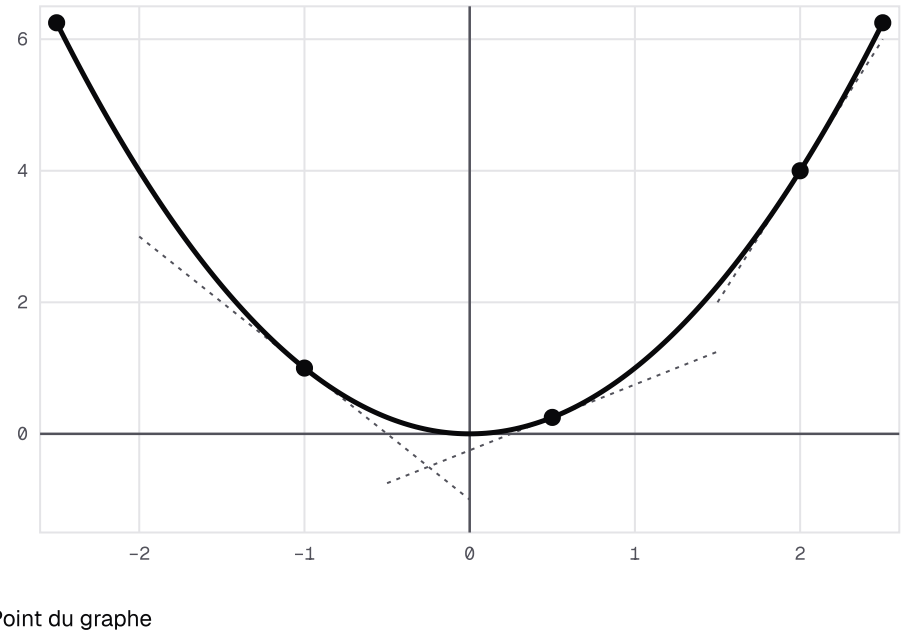
Faux.
La différence $(x-a)^2$ ne dépend pas du signe de a.

Correction
$x^2-(2ax-a^2)=(x-a)^2\geq 0$ pour tout réel x : la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes. On dit qu'elle est **convexe**.

Définition : Convexité, concavité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

- $\mathcal{C}_f$ est **convexe** sur I lorsqu'elle est au-dessus de chacune de ses tangentes aux points d'abscisse dans I : pour tous a et x de I, $f(x)\geq f(a)+f'(a)(x-a)$.
- $\mathcal{C}_f$ est **concave** sur I lorsqu'elle est au-dessous de chacune de ces tangentes : pour tous a et x de I, $f(x)\leq f(a)+f'(a)(x-a)$.



La parabole y = x² et trois de ses tangentes : la courbe reste au-dessus de chacune.

Exemple : une courbe concave

Soit $h : x\mapsto 4x-x^2$ et a un réel. La tangente en a a pour équation $y=T_a(x)$, où $T_a(x)=(4-2a)(x-a)+4a-a^2$. Pour tout réel x, la différence entre la courbe et cette tangente vaut

$$h(x)-T_a(x)=-(x-a)^2,$$

qui est négative ou nulle : la courbe de h est **concave** sur $\mathbb{R}$.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Ce calcul direct est rarement possible. Le critère suivant dit : si $f'' \geq 0$, alors f' croît, et l'écart entre courbe et tangente est minimal au point de contact.

Le critère de la dérivée seconde

Théorème : Dérivée seconde et convexité

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\mathcal{C}_f$ est concave sur I.

Démonstration

Étape 1. Supposons $f'' \geq 0$ sur I et fixons $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$: il s'agit de montrer que $g(x) \geq 0$.

Étape 2. g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Comme $(f')' = f'' \geq 0$ sur I, f' est croissante sur I (F20).

Étape 3. Donc $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq a$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq a$. D'après F20, g est décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur $I \cap [a, +\infty[$: elle admet en a son minimum sur I, $g(a) = 0$.

Étape 4. Ainsi $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$: $\mathcal{C}_f$ est convexe sur I. Le cas $f'' \leq 0$ s'obtient avec $-f$.

Propriété : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que le point $A(a, f(a))$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ lorsque $\mathcal{C}_f$ change de concavité en A : il existe $\delta > 0$ tel que $\mathcal{C}_f$ est convexe sur $]a-\delta, a]$ et concave sur $[a, a+\delta[$, ou l'inverse.

Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$. En revanche, $f''(a) = 0$ ne suffit pas.

Démonstration

Étape 1. Si f'' s'annule en a en changeant de signe, il existe $\delta > 0$ tel que $f'' \geq 0$ sur $]a-\delta, a]$ et $f'' \leq 0$ sur $[a, a+\delta[$, ou l'inverse.

Étape 2. F25, appliqué à chacun de ces deux intervalles, donne une courbe convexe sur l'un et concave sur l'autre : A est un point d'inflexion.

Étape 3. Pour la fonction $x \mapsto x^4$, la dérivée seconde $12x^2$ s'annule en 0. La tangente en l'origine a pour équation $y = 0$, et $x^4 > 0$ pour tout $x \neq 0$. Pour tout $\delta > 0$, la courbe est strictement au-dessus de cette tangente en des points de $]-\delta, 0[$ et de $]0, \delta[$: elle n'est concave ni sur $]-\delta, 0]$, ni sur $[0, \delta[$ (F24). L'origine n'est pas un point d'inflexion : $f''(a) = 0$ ne suffit pas.

Vérifie : Quel résultat sert où ?

Dans la démonstration du critère, comment montre-t-on que f' est croissante sur I ?

A. Par la définition de la convexité, puisque la courbe est au-dessus de ses tangentes.
Faux.
Ce serait circulaire : la convexité est la conclusion.

B. En appliquant à f' le théorème du signe de la dérivée.
Juste.
Juste : la dérivée de f' est f'', positive ou nulle sur I.

C. Par le théorème de Rolle, appliqué à f entre deux points de I.
Faux.
Rolle n'intervient pas directement : c'est le signe de la dérivée, appliqué à f', qui sert.

Correction
f'' est la dérivée de f'. Si $f'' \geq 0$ sur l'intervalle I, le théorème sur le signe de la dérivée, appliqué à f', montre que f' est croissante sur I. On en déduit le signe de $g' = f' - f'(a)$ de part et d'autre de a, puis le minimum de g en a.

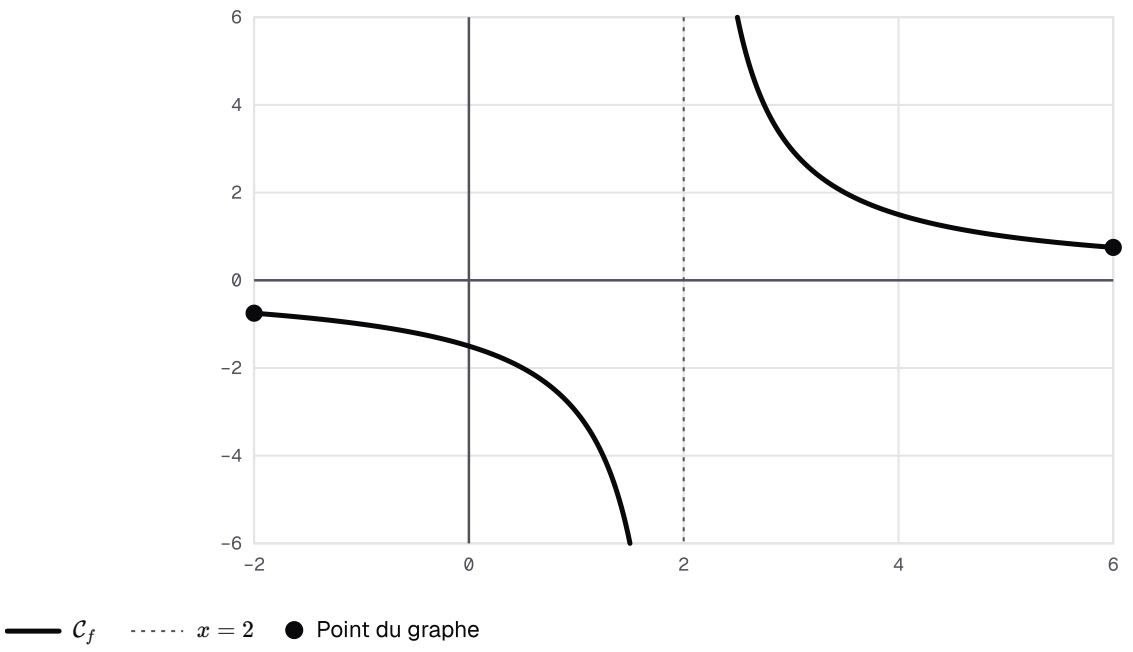
À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On étudie l'**écart** $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ entre la courbe et sa tangente en a. Il est nul en a, et $f'' \geq 0$ le rend décroissant puis croissant : son minimum vaut 0. Pour une inflexion, on applique ce critère de chaque côté de a.

Exemple : Contre-exemple : un changement de concavité sans point d'inflexion

Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{x - 2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour tout $x \neq 2$, $f''(x) = \dfrac{6}{(x-2)^3}$: la courbe est concave sur $]-\infty, 2[$ et convexe sur $]2, +\infty[$.

Pourtant, elle n'a **aucun** point d'inflexion d'abscisse 2 : f n'y est pas définie. La propriété exige un point a d'un intervalle ouvert où f est deux fois dérivable.



Courbe de 3/(x - 2) : concave à gauche de l'asymptote x = 2, convexe à droite, sans aucun point d'inflexion.

Étudier la concavité

Méthode : Méthode et coin examen : étudier la concavité

Exemple : la fonction $p : x \mapsto x^4 - 6x^2 + 5x$, déjà rencontrée ; pour tout réel x, $p''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$.

1. **Calculer f″** sur chaque intervalle où la fonction est deux fois dérivable : ici $\mathbb{R}$.
2. **Étudier son signe** dans un tableau de signes (ci-dessous).
3. **Conclure** avec le critère : la courbe est convexe sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, concave sur $[-1, 1]$.
4. **Inflexion** seulement là où f'' s'annule en changeant de signe : ici aux abscisses -1 et 1.

Coin examen. Concavité ou inflexion sont demandées dans 6 des 16 sujets consultés, pour 0,25 à 0,75 point. Rédige : « p'' s'annule en 1 en changeant de signe, donc le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_p$ ».

Signe de p″(x) = 12(x − 1)(x + 1) : positif, puis négatif, puis positif.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$p''(x)$		+	0	−	0	+	

Attention : une dérivée seconde nulle ne suffit pas

✗ « $f''(a) = 0$, donc $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion. »

✓ Pour conclure à une inflexion, vérifie que f'' **change de signe** en a. Pour $f : x \mapsto (x+1)^4$, on a, pour tout réel x, $f''(x) = 12(x+1)^2$: f'' s'annule en -1 sans changer de signe.

La tangente en -1 a pour équation $y = 0$, et la courbe est strictement au-dessus d'elle des deux côtés de -1 : elle n'est concave d'aucun côté, il n'y a pas d'inflexion.

À toi : L'inflexion de l'arctangente

La courbe de $\arctan$ admet-elle un point d'inflexion ? On donne $\arctan''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

A. Non, car $\arctan''$ ne s'annule jamais.

Faux.

$\arctan''(0) = 0$: relis la formule.

B. Non, car $\arctan$ est croissante.

Faux.

La croissance ne dit rien de la concavité.

C. Oui, au point $\left(1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Faux.

$\arctan''(1) = -\dfrac{1}{2} \neq 0$: aucun changement de signe en 1.

D. Oui, à l'origine.

Juste.

Juste : $\arctan''$ s'annule en 0 en changeant de signe.

Correction

Pour tout réel x, $\arctan''(x)$ a le signe de $-x$: positive sur $]-\infty, 0[$, négative sur $]0, +\infty[$. Elle s'annule en 0 en changeant de signe.

La courbe est convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$: l'origine est un point d'inflexion.

Branches infinies et position relative

Des courbes qui s'approchent d'une droite

Devine : Loin vers la droite

Soit h la fonction définie pour $x \neq 1$ par $h(x) = \dfrac{2x^2 + x}{x - 1}$. Une division donne $h(x) = 2x + 3 + \dfrac{3}{x-1}$. Quand x tend vers $+\infty$, que fait la courbe de h ?

A. Elle s'approche de la droite $y = 2x$.

Faux.

L'écart entre $h(x)$ et $2x$ tend vers 3, pas vers 0.

B. Elle s'approche de la droite $y = 2x + 3$.

Juste.

Juste : l'écart $\dfrac{3}{x-1}$ tend vers 0.

C. Elle s'approche de l'axe des abscisses.

Faux.

$h(x)$ tend vers $+\infty$: la courbe monte sans limite.

Correction

Pour $x \neq 1$, $h(x) - (2x+3) = \dfrac{3}{x-1}$, qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$: la courbe se rapproche de la droite $y = 2x + 3$. C'est une asymptote **oblique**.

Quand x tend vers 1, $|h(x)|$ tend vers $+\infty$: la droite $x = 1$ est une asymptote verticale.

Définition : Asymptotes verticale et horizontale

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère.

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ avec b réel, la droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$. On définit de même une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

Exemple : l'asymptote verticale de h

Quand x tend vers 1^+, $2x^2 + x$ tend vers 3 et $x - 1$ tend vers 0^+ : $h(x)$ tend vers $+\infty$. Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_h$.

Et sans division ? La propriété suivante repère une asymptote oblique par deux limites.

Pourquoi est-ce vrai ? Si l'écart à la droite tend vers 0, cet écart divisé par x tend encore vers 0.

Asymptote oblique, branche parabolique

Propriété : Asymptote oblique

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, et a, b deux réels avec $a \neq 0$.

La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$.

C'est le cas si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$. On définit et on caractérise de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

Démonstration

Étape 1. Supposons $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax-b\big)=0$. Alors $f(x)-ax=\big(f(x)-ax-b\big)+b$ tend vers b.

Étape 2. Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=a+\dfrac{f(x)-ax}{x}$. Le numérateur tend vers b et x tend vers $+\infty$: le quotient tend vers 0, donc $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a.

Étape 3. Réciproquement, si $f(x)-ax$ tend vers b, alors $f(x)-(ax+b)$ tend vers 0. La seconde limite suffit donc ; la première sert à trouver a.

Étape 4. Au voisinage de $-\infty$, la preuve est identique.

Définition : Branches paraboliques

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées**.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses**.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ avec a réel non nul, et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y=ax$.

On définit de même les branches paraboliques au voisinage de $-\infty$.

Vérifie : La première limite

La démonstration affirme : si $f(x)-ax$ tend vers b, alors $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a. Quel argument ?

A. $\dfrac{f(x)}{x}=a+\dfrac{f(x)-ax}{x}$, et le dernier quotient tend vers 0.
Juste.
Juste : un numérateur qui tend vers b, divisé par x qui tend vers $+\infty$.

B. $f(x)$ tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a.
Faux.
Savoir que $f(x)$ tend vers $+\infty$ ne donne pas la limite du quotient.

C. On applique le TAF à f.
Faux.
Aucun théorème de dérivation ici : seulement des opérations sur les limites.

Correction

Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = a + \dfrac{f(x) - ax}{x}$. Le numérateur $f(x) - ax$ tend vers le réel b et x tend vers $+\infty$: le quotient tend vers 0. Donc $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers a. Cette limite sert à **trouver** a ; c'est la seconde qui prouve l'asymptote.

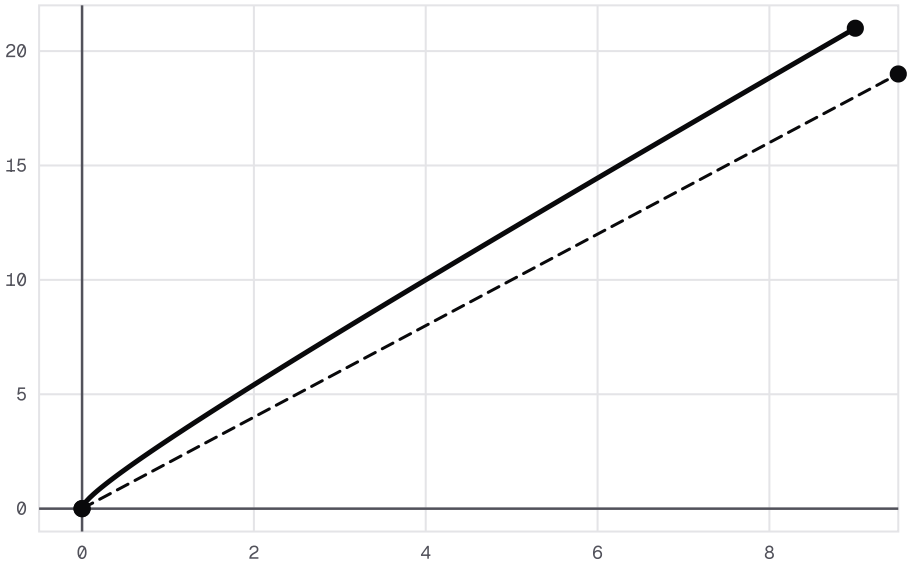
À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une asymptote oblique se cherche en deux temps : $\dfrac{f(x)}{x}$ donne la pente a, puis $f(x) - ax$ donne b. Seule la seconde limite prouve l'asymptote : la première ne fait que proposer a.

Exemple : Contre-exemple : la pente ne suffit pas

Soit $j : x \mapsto 2x + \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$. Pour $x > 0$, $\dfrac{j(x)}{x} = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 2.

Mais $j(x) - 2x = \sqrt{x}$ tend vers $+\infty$: il n'y a **pas** d'asymptote. La courbe admet une branche parabolique de direction la droite $y = 2x$.



Courbe de j(x) = 2x + √x et droite y = 2x : les pentes se ressemblent, mais l'écart entre elles ne cesse de grandir.

Position relative

Méthode : étudier une branche infinie

Pour une branche en $+\infty$:

1. **Limite de f** : finie, c'est une asymptote horizontale ; infinie, on continue.
2. **Limite de** $\dfrac{f(x)}{x}$: infinie ou nulle, c'est une branche parabolique ; un réel $a \neq 0$, on continue.
3. **Limite de** $f(x) - ax$: un réel b donne l'asymptote $y = ax + b$; une limite infinie, une branche parabolique de direction $y = ax$.
4. **Rédiger** : « $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$, donc la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ ».

Définition : Position relative d'une courbe et d'une droite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (D) la droite d'équation $y = ax + b$.

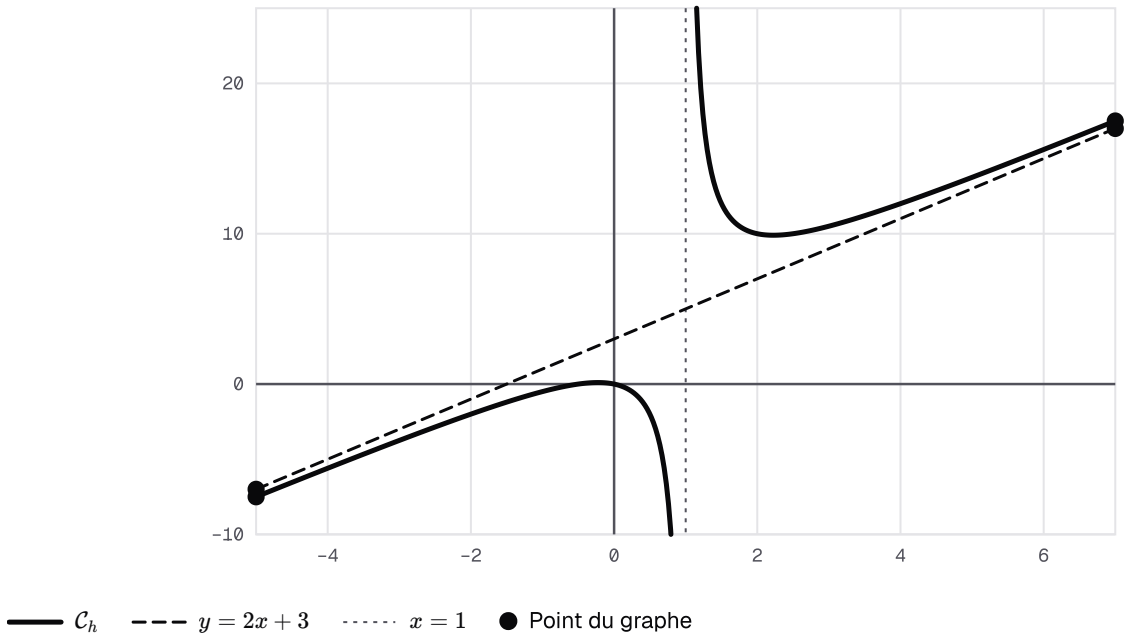
- $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax+b) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et **strictement au-dessus** lorsque cette différence est strictement positive.
- $\mathcal{C}_f$ est **au-dessous** de (D) sur I lorsque $f(x) - (ax+b) \leq 0$ pour tout $x \in I$, et **strictement au-dessous** lorsque cette différence est strictement négative.
- Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (D) ont pour abscisses les solutions de l'équation $f(x) = ax + b$.

Exemple : la position de la courbe de h

Pour $x \neq 1$, $h(x) - (2x+3) = \dfrac{3}{x-1}$.

- Sur $]1, +\infty[$, cette différence est strictement positive : $\mathcal{C}_h$ est strictement au-dessus de la droite $(D) : y = 2x + 3$.
- Sur $]-\infty, 1[$, elle est strictement négative : $\mathcal{C}_h$ est strictement au-dessous de (D).

L'équation $h(x) = 2x + 3$ n'a aucune solution : la courbe ne coupe jamais (D).



Courbe de h avec ses deux asymptotes : la droite x = 1 et la droite (D) : y = 2x + 3, que la courbe ne coupe jamais.

À toi : Au-dessus ou au-dessous ?

Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$. Pour tout $x > -2$, $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x + 2}$.
Quelle est la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y = x - 2$ sur cet intervalle ?

A. Strictement au-dessus.

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{x + 2} > 0$ pour $x > -2$.

B. Strictement au-dessous.

Faux.

Pour $x > -2$, $x + 2 > 0$: la différence est positive.

C. Elle la coupe au point d'abscisse -1.

Faux.

$f(-1) = -2$ et $-1 - 2 = -3$: les deux valeurs diffèrent.

Indice 1

Étudie le signe de $f(x) - (x - 2)$.

Correction

Pour tout $x > -2$, $f(x) - (x - 2) = \dfrac{1}{x + 2} > 0$. Donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la droite d'équation $y = x - 2$ sur $]-2, +\infty[$.

Comme cette différence tend vers 0 en $+\infty$, cette droite est aussi une asymptote oblique.

Étude complète d'une fonction

Réduire l'étude

Devine : Une symétrie cachée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+12}$. Calcule $f(-x)$. Quelle symétrie prévois-tu pour sa courbe ?

A. Une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Faux.
Il faudrait $f(-x) = f(x)$; ici, le signe change.

B. Aucune symétrie.

Faux.
Le calcul de $f(-x)$ montre le contraire.

C. Une symétrie par rapport à l'origine O.

Juste.
Juste : $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

Correction

Pour tout réel x, $-x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2+12} \\ &= -\frac{x^3}{x^2+12} = -f(x). \end{aligned}$$

La courbe est symétrique par rapport à l'origine : c'est le centre de symétrie $\Omega(0,0)$ de la définition suivante, avec $a = b = 0$.

Définition : Éléments de symétrie et périodicité

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, et a, b, T trois réels avec $T > 0$.

- La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ lorsque, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$.
- Le point $\Omega(a,b)$ est un **centre de symétrie** de $\mathcal{C}_f$ lorsque, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) + f(x) = 2b$.
- f est **périodique de période** T lorsque, pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$; on étudie alors f sur un intervalle de longueur T.

Exemple : un centre de symétrie qui n'est pas l'origine

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

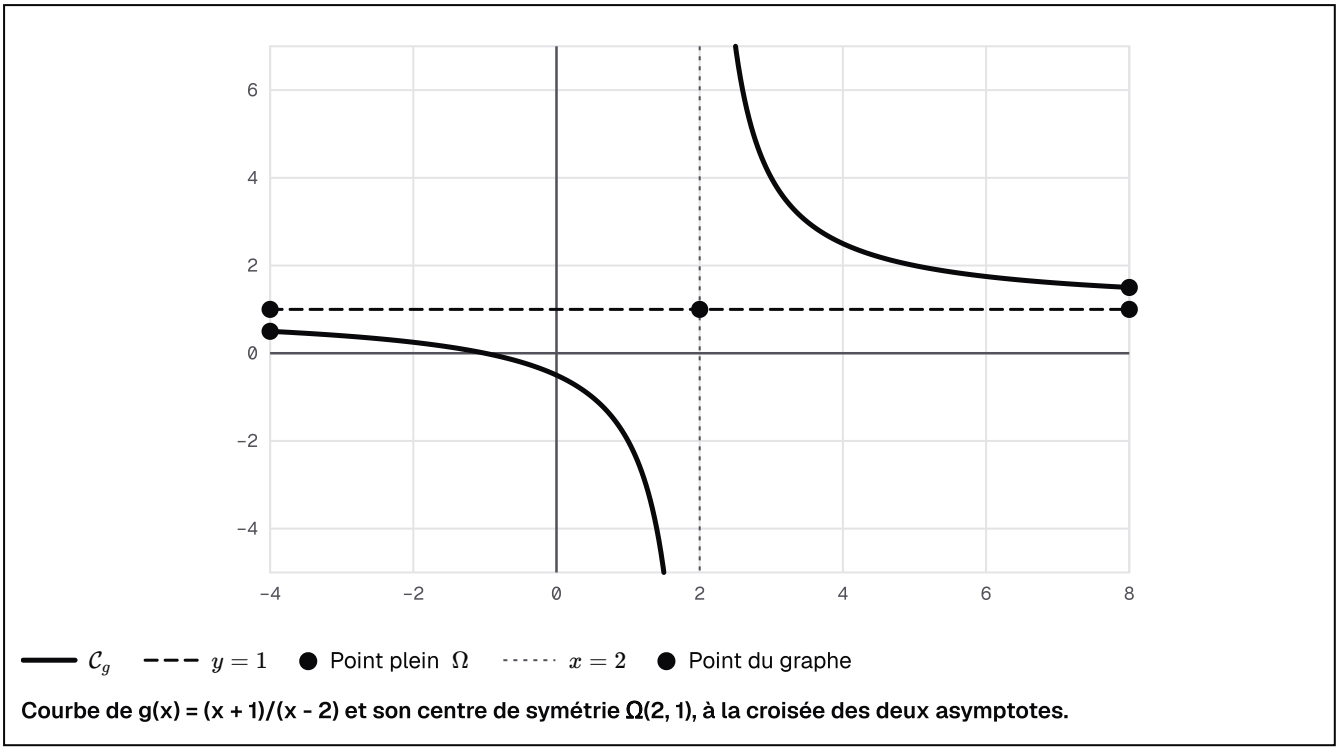
Soit $x \neq 2$. Alors $4 - x \neq 2$ et

$$g(4-x) = \frac{5-x}{2-x} = \frac{x-5}{x-2}.$$

En ajoutant $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$:

$$g(4-x) + g(x) = \frac{2x-4}{x-2} = 2.$$

Conclusion. Avec $a = 2$ et $b = 1$, la définition donne : $\Omega(2,1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$. On étudie alors g sur $]2, +\infty[$ seulement, puis on complète par symétrie.



Courbe de g(x) = (x + 1)/(x - 2) et son centre de symétrie Ω(2, 1), à la croisée des deux asymptotes.

Le plan d'étude

Méthode : plan d'étude d'une fonction

1. **Domaine**, symétries, périodicité : réduire l'intervalle d'étude.
2. **Limites** aux bornes, puis branches infinies.
3. **Continuité et dérivabilité**, en particulier aux bornes du domaine.
4. **Dérivée** et son signe, puis le **tableau de variations**, justifié par le signe de la dérivée.
5. **Concavité** et points d'inflexion, si l'énoncé les demande.
6. **Tracé** : asymptotes, tangentes remarquables, points d'inflexion, puis la courbe.

Chaque « montrer que » de l'énoncé est l'une de ces étapes : rédige-la comme une petite preuve, conclusion comprise.

Exemple : Étude guidée de la fonction impaire

On reprend la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+12}$, impaire : on l'étudie sur $[0, +\infty[$.

Limite et branche. Pour tout réel x, $f(x) = x - \dfrac{12x}{x^2+12}$, et $\dfrac{12x}{x^2+12}$ tend vers 0 en $+\infty$. Donc $f(x)$ tend vers $+\infty$, et la droite $y = x$ est asymptote à la courbe en $+\infty$. Pour $x > 0$, $f(x) - x < 0$: la courbe est au-dessous.

Dérivée. f est rationnelle, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+12) - 2x^4}{(x^2+12)^2} \\ &= \frac{x^4 + 36x^2}{(x^2+12)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2+36)}{(x^2+12)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x, avec égalité seulement en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sans extremum en 0.

Concavité. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \dfrac{12(12-x^2)}{(x^2+12)^2}$. En dérivant, on obtient

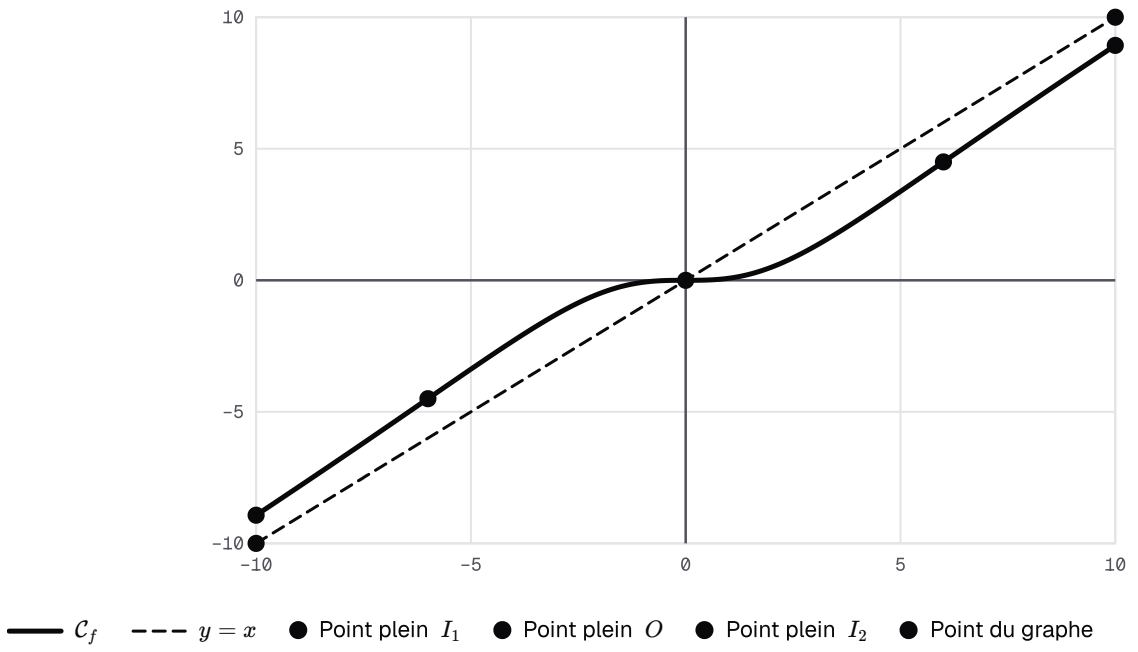
$$f''(x) = \frac{24x(36-x^2)}{(x^2+12)^3}.$$

f'' s'annule en changeant de signe en 0 et en 6 : la courbe a des points d'inflexion d'abscisses 0, 6 et, par symétrie, -6.

Tableau et courbe

Variations de f sur $\mathbb{R}$: la dérivée s'annule en 0 sans changer de signe.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



Courbe de f, symétrique par rapport à O, avec son asymptote y = x et ses trois points d'inflexion.

Remarque : Coin examen : l'étude et le tracé

Une étude avec tableau de variations figure dans 16 des 16 sujets consultés, et une courbe à tracer dans 14 des 16 sujets consultés. Le tableau rapporte en général 0,25 à 0,75 point, le tracé 0,5 à 1 point. Pour le tracé, place d'abord les asymptotes, les tangentes horizontales et les points d'inflexion, puis la courbe.

Ce que tu sais démontrer

À retenir : la dérivabilité

- Dérivable en a : le taux d'accroissement a une limite **finie** ; en une borne, on étudie un seul côté.
- Dérivable implique continue ; la réciproque est fausse : $\sqrt{|x-2|}$ est continue en 2 sans y être dérivable.
- Une composée se dérive avec la dérivée intérieure. Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle, dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$, alors $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.
- $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, et $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \dfrac{u'}{n\left(\sqrt[n]{u}\right)^{n-1}}$ si u est dérivable et $u > 0$.

À retenir : les accroissements finis

- Soit $a < b$ et f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. **Rolle** : si de plus $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. **TAF** : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$. En général, on ne connaît pas c : on l'encadre par $a < c < b$.
- Le TAF démontre le lien entre le signe de f' et les variations.
- L'IAF encadre $f(b) - f(a)$ dès que f' est encadrée sur tout l'intervalle.
- Contraction : intervalle stable, $|f'| \leq k < 1$, termes dans I, IAF, récurrence, comparaison.
- Pour conclure à un extremum ou à une inflexion, vérifie un **changement de signe** : une dérivée nulle ne suffit pas.

Le mot du prof. Au début du chapitre, tu devinais qu'une tangente parallèle à la corde existait. Maintenant, tu sais le démontrer, puis t'en servir pour encadrer, comparer et faire converger une suite. Ces gestes reviennent dans chaque étude de fonction : tu as les outils pour les rédiger.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Dérivabilité, accroissements finis et étude de fonctions » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)