BURHAN

Résumé : Calcul intégral

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/resume

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

L'intégrale d'une fonction continue

À retenir : Le réflexe : continuité sur un intervalle qui contient les bornes

Avant d'écrire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, nomme un intervalle I qui contient a et b, et sur lequel f est continue.

Cette phrase n'est pas décorative : elle garantit qu'une primitive existe sur I, et que l'écart $F(b) - F(a)$ a un sens.

Propriété : L'écart F(b) – F(a) ne dépend pas de la primitive choisie

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Remarque

Parmi les propriétés de calcul, un seul résultat est **admis** : toute fonction continue sur un intervalle y possède des primitives. Il vient du chapitre des primitives.

L'intégrale est construite à partir d'une primitive : on ne peut donc pas s'en servir pour prouver cette existence.

Les formules d'aire et de volume reposent en outre sur des propriétés admises (voir plus bas).

Définition : Intégrale d'une fonction continue de a à b

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et F une primitive de f sur I.

Le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle **l'intégrale de a à b de f**. On le note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'on écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[F(x)\Big]_a^b \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

D'après F01, ce réel ne dépend pas de la primitive F choisie. La lettre x est **muette** : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété : Premières conséquences de la définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Pour tout réel c : $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b-a)$.
- Si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I : $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Méthode : calculer une intégrale avec une primitive

1. **Continuité.** Écris l'intervalle de continuité et vérifie qu'il contient les deux bornes.
2. **Primitive.** Choisis une primitive F dans les tableaux ou les formes composées ; contrôle-la en dérivant.
3. **Crochet.** Écris $\Big[F(x)\Big]_a^b$, puis $F(b) - F(a)$.
4. **Valeur exacte.** Simplifie : fractions, $\ln$, e, π, radicaux. Aucune valeur approchée sans demande.

Rédaction : « la fonction … est continue sur …, qui contient … et … ; une primitive est … ; donc l'intégrale vaut … ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_1^2 \left(6x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Continuité. La fonction $x \mapsto 6x^2 - \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, qui contient 1 et 2.

Primitive. Sur cet intervalle, $x \mapsto 2x^3 - \ln x$ convient : sa dérivée est $x \mapsto 6x^2 - \dfrac{1}{x}$.

Crochet.

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \left(6x^2 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \Big[2x^3 - \ln x\Big]_1^2\\ &= (16 - \ln 2) - (2 - 0)\\ &= 14 - \ln 2.\end{aligned}$$

Attention : Une valeur interdite entre les bornes

Le calcul $\Big[-\dfrac{1}{x-2}\Big]_0^3 = -\dfrac{3}{2}$ donnerait une intégrale négative pour une fonction strictement positive, $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

L'erreur : cette fonction n'est pas définie en 2, qui est entre les bornes. Aucun intervalle de continuité ne contient 0 et 3 : l'intégrale n'est pas définie.

Relation de Chasles et linéarité

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et λ un réel. Alors :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Méthode : découper une intégrale

1. **Repérer** ce qui empêche un calcul direct : une valeur absolue, une définition par morceaux, une combinaison de plusieurs fonctions.
2. **Couper** l'intervalle là où le signe sous la valeur absolue change, ou là où la formule change : relation de Chasles (F04).
3. **Séparer** chaque somme en intégrales et sortir les facteurs constants : linéarité (F05).
4. **Additionner** les morceaux calculés.

Rédaction : « d'après la relation de Chasles, … ; sur $[a, c]$, on a $|u(x)| = \dots$ ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x$.

Signe. On a $x^2 - 1 \leq 0$ sur $[-1, 1]$ et $x^2 - 1 \geq 0$ sur $[1, 2]$. La fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Chasles.

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{2} |x^2-1|\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{1}^{2} (x^2-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Attention : Intégrale d'un produit

L'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales.

Sur $[0,1]$, l'intégrale de $x \mapsto x\,e^x$ vaut 1 (par parties), alors que $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = \frac{e-1}{2}$.

La linéarité ne concerne que les sommes et les facteurs constants.

Positivité, comparaison, valeur absolue

Propriété : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

- Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- Si $a < b$ et si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Propriété : Comparaison de deux intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété : Intégrale et valeur absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

À retenir : Intégrer une inégalité : bornes dans l'ordre croissant

> Point important : la positivité (F06), la comparaison (F07) et l'inégalité de la valeur absolue (F08) exigent $a \leq b$.
>
> Avant d'intégrer une inégalité, écris la phrase « comme $a \leq b$ ».
>
> Si les bornes sont dans l'autre ordre, échange-les d'abord grâce aux premières conséquences de la définition (F03), ce qui change le signe de l'intégrale.

Exemple

Énoncé. Montre que $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x \leq e-1$.

Comparer les fonctions. Soit $x \in [0,1]$. Alors $x^2 \leq x$; la fonction exponentielle est croissante, donc $e^{x^2} \leq e^x$.

Intégrer. Les deux fonctions sont continues sur $[0,1]$ et $0 \leq 1$. D'après la comparaison des intégrales (F07) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e-1.\end{aligned}$$

Attention : Bornes à l'envers : le signe s'inverse

La fonction $x \mapsto x+1$ est positive sur $[0,1]$, et pourtant $\displaystyle\int_1^0 (x+1)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}$.

Ici la borne du bas dépasse celle du haut : la positivité (F06) ne s'applique pas. Vérifie l'ordre des bornes avant toute conclusion sur un signe.

Encadrer une intégrale

Propriété : Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

- Si m et M sont deux réels tels que, pour tout $x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$\begin{aligned}m\,(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq M\,(b-a).\end{aligned}$$

- Si M est un réel tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,(b-a)$.

Méthode : encadrer une intégrale

1. **Ordre.** Vérifie $a \leq b$.

2. **Encadrer l'intégrande** sur tout $[a, b]$: par ses variations (minimum m et maximum M), ou par deux fonctions plus simples, $h \leq f \leq k$.
3. **Intégrer l'encadrement** : inégalité de la moyenne (F09) avec des constantes, comparaison (F07) avec des fonctions.
4. **Conclure** ; pour une valeur approchée, prends le centre de l'encadrement et la demi-amplitude comme précision.

Rédaction : « pour tout $x \in [a, b]$, … ; ces fonctions sont continues et $a \leq b$, donc, d'après la comparaison des intégrales (F07), … ».

Exemple

Énoncé. Encadre $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

Encadrer l'intégrande. Soit $u \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{u}{2}\right)^2 &= 1+u+\frac{u^2}{4}\\ &\geq 1+u.\end{aligned}$$

Par croissance de la racine carrée sur $[0, +\infty[$, on en déduit $1 \leq \sqrt{1+u} \leq 1+\dfrac{u}{2}$. Avec $u = x^4$, pour tout $x \in [0,1]$: $1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq 1+\dfrac{x^4}{2}$.

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $[0, 1]$ et $0 \leq 1$. D'après la comparaison des intégrales (F07) :

$$\begin{aligned}1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x &\leq 1+\frac{1}{10}\\ &= \frac{11}{10}.\end{aligned}$$

À retenir : Montrer que, puis en déduire

À maîtriser : « montrer que, pour tout x de $[a, b]$, … » sert à préparer un encadrement.

La question suivante, « en déduire un encadrement de l'intégrale », réutilise cette inégalité sans la redémontrer. Cite la comparaison (F07) ou l'inégalité de la moyenne (F09), puis l'ordre des bornes.

Valeur moyenne et théorème de la moyenne

Définition : Valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne de f sur** $[a, b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème : Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

Il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a).$$

Autrement dit, la valeur moyenne μ de f sur $[a, b]$ est une valeur prise par f sur $[a, b]$: $\mu = f(c)$.

Méthode : valeur moyenne et réel c

1. **Calculer** l'intégrale sur $[a, b]$, avec $a < b$, puis divise par la longueur $b - a$: c'est μ (F10).
2. **Existence de c.** Cite la continuité de la fonction sur $[a, b]$, puis le théorème de la moyenne (F11).
3. **Valeur de c.** Résous l'équation $f(c) = \mu$ et garde les solutions situées dans $[a, b]$.

Rédaction : « la fonction est continue sur $[a, b]$; d'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in [a, b]$ tel que … ».

Exemple

Énoncé. Calcule la valeur moyenne μ de la fonction racine carrée sur $[0, 9]$, puis un réel c tel que $\sqrt{c} = \mu$.

Calcul. La fonction est continue sur $[0, +\infty[$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{2}{3} \times 27 = 18$, et $\mu = \dfrac{18}{9} = 2$.

Réel c. L'équation $\sqrt{c} = 2$ donne $c = 4$, qui appartient bien à $[0, 9]$.

Remarque

Le théorème de la moyenne affirme une **existence**. Le réel c peut ne pas être unique : pour le sinus sur $[0, \pi]$, la moyenne $\dfrac{2}{\pi}$ est atteinte en deux points, symétriques par rapport à $\dfrac{\pi}{2}$.

La continuité sur $[a, b]$ est indispensable : c'est elle qui permet de définir μ et d'obtenir c.

Intégration par parties

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, et a, b deux éléments de I. Alors :

$$\begin{aligned}&\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x\\&=\Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b\\&\quad-\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Méthode : intégrer par parties

1. **Choisir** u et v' : pour u, le facteur qui se simplifie en dérivant (un polynôme, $\ln$, $\arctan$) ; pour v', un facteur dont tu connais une primitive (e^x, $\sin$, $\cos$, une puissance).
2. **Calculer** u' et une primitive v.
3. **Vérifier** les hypothèses de la formule d'intégration par parties (F12) : u et v dérivables sur un intervalle qui contient les bornes, u' et v' continues.
4. **Appliquer** : le crochet, puis la nouvelle intégrale précédée du signe moins. Recommence si un polynôme reste à dériver.
5. **Cas particuliers.** Pour $\ln$ seul, pose $v' : x \mapsto 1$. Si l'intégrale de départ réapparaît, écris une équation dont elle est l'inconnue.

Rédaction : « on pose … ; ces fonctions sont dérivables sur …, de dérivées continues ; d'après la formule d'intégration par parties, … ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Choix. $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, d'où $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues.

Formule.

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\Big[2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^{\pi}\\&\quad-\int_0^{\pi} 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=2\pi-\Big[-4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_0^{\pi}\\&=2\pi-4.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_1^{e} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.

Première fois. Sur $]0,+\infty[$, on pose $u : x \mapsto (\ln x)^2$ et $v' : x \mapsto 1$; alors $u' : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v : x \mapsto x$. Ces fonctions sont dérivables, de dérivées continues. On obtient :

$$\begin{aligned}&\int_1^e (\ln x)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e - 2\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= e - 2\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Deuxième fois. Avec $u : x \mapsto \ln x$ et $v' : x \mapsto 1$, l'intégrale de $\ln$ sur $[1,e]$ vaut $\Big[x\ln x\Big]_1^e - (e-1) = 1$.

Conclusion. L'intégrale vaut $e-2$.

Attention : Le crochet, le signe moins, le bon choix

Deux oublis faussent une intégration par parties : le crochet $\Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b$, et le signe moins devant la nouvelle intégrale. Un mauvais choix de u fait grimper le degré du polynôme au lieu de le faire baisser : si la nouvelle intégrale est plus dure, échange les rôles.

Changement de variable

Théorème : Changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction dérivable sur un intervalle J, de dérivée φ' continue sur J, telle que $\varphi(t) \in I$ pour tout $t \in J$. Pour tous α et β dans J :

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Méthode : changer de variable

1. **Poser** la relation $x = \varphi(t)$ et nommer l'intervalle J où varie t. Si l'énoncé donne t en fonction de x, exprime x en fonction de t.
2. **Vérifier** : φ dérivable sur J, φ' continue sur J, $\varphi(t)$ dans l'intervalle de continuité de l'intégrande pour tout $t \in J$.
3. **Transformer** trois choses : l'intégrande, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et les bornes α, β, avec $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ égales aux anciennes bornes.
4. **Calculer** la nouvelle intégrale en t.

Rédaction : « on pose $x = \varphi(t)$, $t \in J$; φ est dérivable sur J, de dérivée continue, et $\varphi(J) \subset I$; d'après le théorème de changement de variable (F13), … ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t=\sqrt{x+1}$.

Relation. On a $x=\varphi(t)=t^2-1$, avec $t\in J=[1,2]$: $\varphi(1)=0$ et $\varphi(2)=3$. La fonction φ est dérivable sur J, sa dérivée $t\mapsto 2t$ est continue, et $\varphi(J)=[0,3]$ est inclus dans $]-1,+\infty[$, où l'intégrande est continue. Pour tout $t\in J$, $\sqrt{\varphi(t)+1}=t$.

Calcul.

$$\begin{aligned}&\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\times 2t\,\mathrm{d}t\\&=2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec $x=2\sin t$.

Hypothèses. La fonction $\varphi : t\mapsto 2\sin t$ est dérivable sur $J=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, de dérivée $t\mapsto 2\cos t$ continue ; $\varphi(J)=[0,1]\subset[-2,2]$. Pour tout $t\in J$, $\cos t\geq 0$, donc $\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\cos t$.

Calcul.

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2+2\cos 2t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Attention : Bornes et élément différentiel changent aussi

Après $x=\varphi(t)$, trois éléments changent ensemble : l'intégrande, l'élément $\mathrm{d}x$, qui devient $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, et les bornes, qui deviennent des valeurs de t. Garder 0 et 3 comme bornes en t, ou oublier le facteur $\varphi'(t)$, donne une valeur fausse.

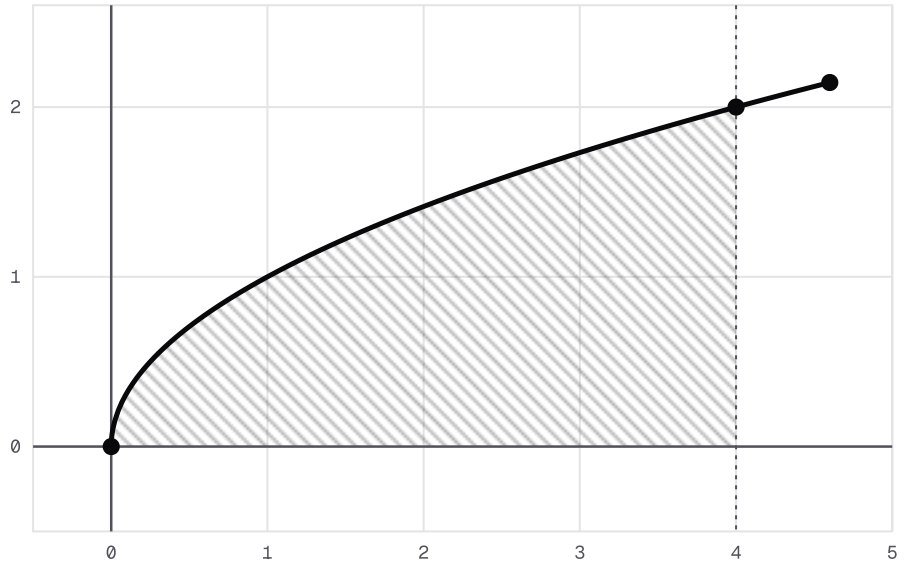
Intégrale et aire

Théorème : Intégrale et aire sous une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$



Pour f(x) = √x, positive sur [0, 4] : l'intégrale de f de 0 à 4 mesure, en u.a., le domaine hachuré situé sous la courbe et au-dessus de l'axe horizontal, de 0 à 4.

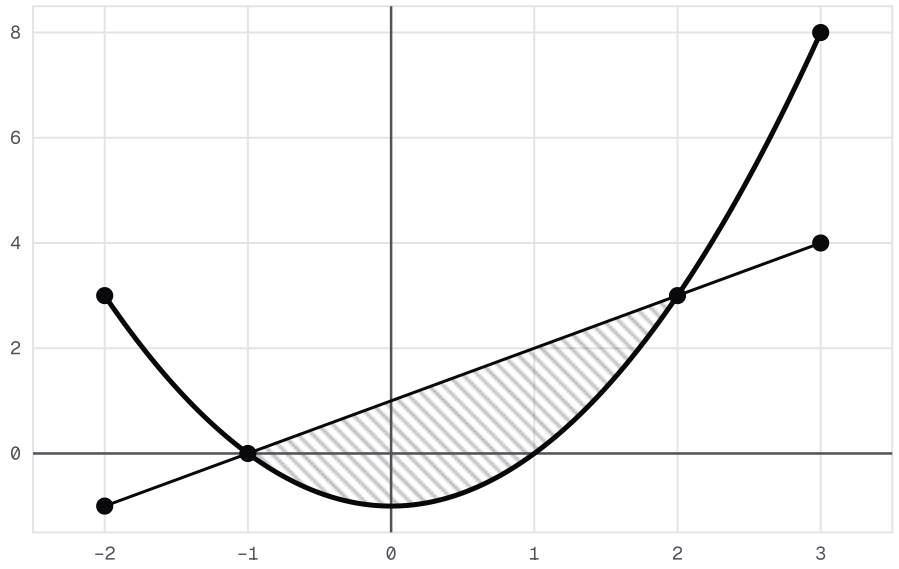
Propriété : Aire du domaine compris entre deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

En particulier, si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ u.a.



Sur [–1, 2], la droite y = x + 1 est au-dessus de la parabole y = x² – 1 : l'aire du domaine hachuré entre elles est l'intégrale de la différence, celle du dessus moins celle du dessous.

Remarque

Le cours esquisse ces deux énoncés. Il admet ce qu'est l'aire d'un domaine limité par une courbe. Il admet aussi deux propriétés de l'aire. Une translation ne la change pas. Deux domaines sans chevauchement ont pour aire totale la somme de leurs aires.

Méthode : calculer une aire

1. **Signe.** Étudie le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[a, b]$; pour l'axe des abscisses, g est la fonction nulle.
2. **Découper** $[a, b]$ aux valeurs où ce signe change.
3. **Intégrer** $|f - g|$: sur chaque morceau, c'est $f - g$ ou $g - f$ selon le signe trouvé ; additionne ensuite les résultats, d'après l'aire entre deux courbes (F15) et la relation de Chasles (F04).
4. **Unité.** Donne l'aire en u.a. ; si le repère donne $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$ en cm, une u.a. vaut leur produit en cm^2.

Rédaction : « sur $[a, b]$, $f(x) - g(x) \geq 0$, donc $\mathcal{A} = \ldots$ u.a. ».

Exemple

Énoncé. Le repère est orthonormé, d'unité 2 cm. Calcule l'aire du domaine compris entre la parabole d'équation $y = 4 - x^2$ et la droite d'équation $y = x + 2$.

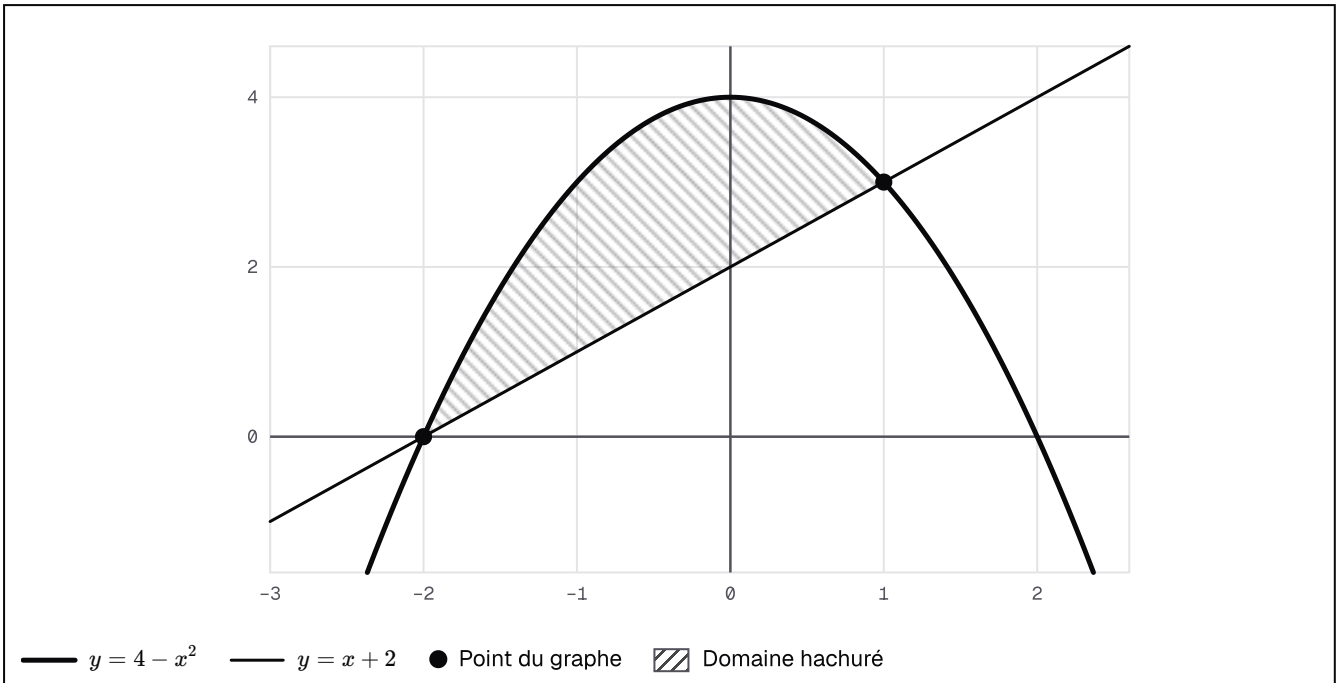
Intersections. Pour tout réel x, $4 - x^2 = x + 2$ équivaut à $(x - 1)(x + 2) = 0$, soit $x = -2$ ou $x = 1$.

Signe. Pour tout $x \in [-2, 1]$, $(4 - x^2) - (x + 2) = -(x - 1)(x + 2) \geq 0$: la parabole est au-dessus. Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Aire.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} \\ &= \frac{9}{2}\ \text{u.a.} \end{aligned}$$

Une u.a. vaut $2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$, donc $\mathcal{A} = 18\ \text{cm}^2$.

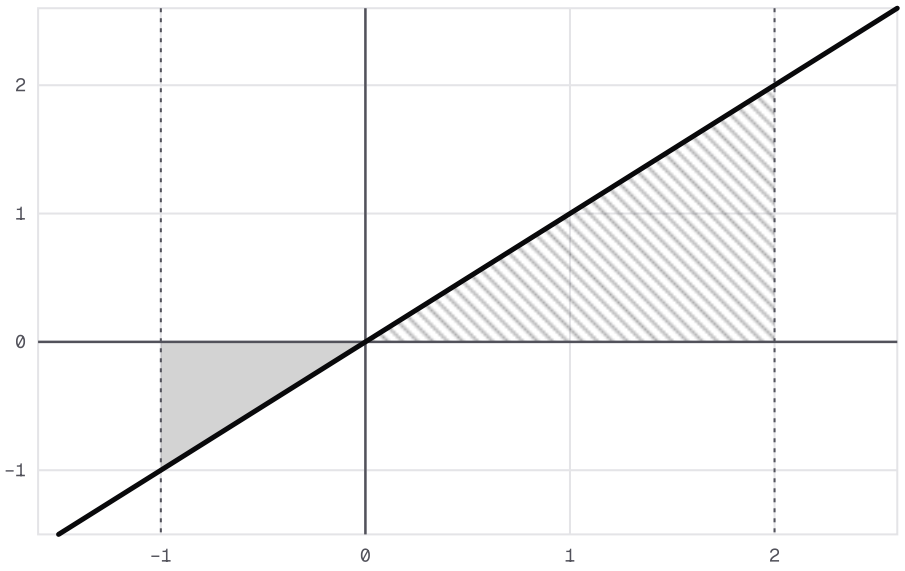


La parabole y = 4 − x² et la droite y = x + 2 se coupent aux abscisses −2 et 1 ; entre ces deux valeurs, la parabole est au-dessus, et le domaine hachuré mesure 9/2 u.a.

Attention : Une intégrale n'est pas toujours une aire

Sur $[-1, 2]$, $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$, mais l'aire du domaine entre la droite d'équation $y = x$ et l'axe des abscisses vaut $\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$ u.a.

La partie située sous l'axe compte négativement dans l'intégrale. Étudie le signe d'abord, et intègre la valeur absolue.



$y = x$ $x = -1$ $x = 2$ Point du graphe Domaine teinté Domaine hachuré

La droite y = x sur [−1, 2] : le triangle teinté, sous l'axe, a pour aire 1/2 ; le triangle hachuré, au-dessus, a pour aire 2. L'aire vaut leur somme 5/2, l'intégrale leur différence 3/2.

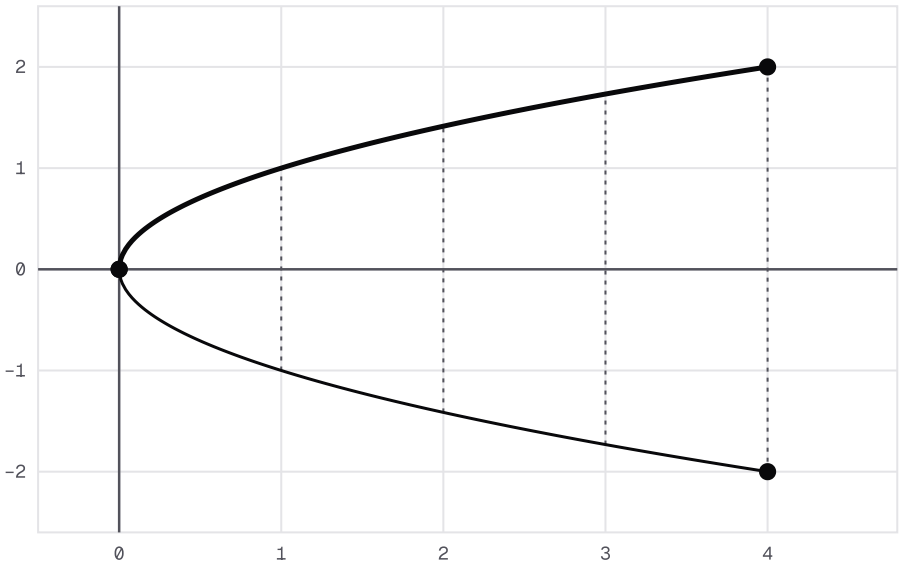
Volumes de révolution

Théorème : Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des abscisses

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'**unité de volume** (u.v.) est le volume du cube construit sur $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$V = \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \text{ u.v.}$$



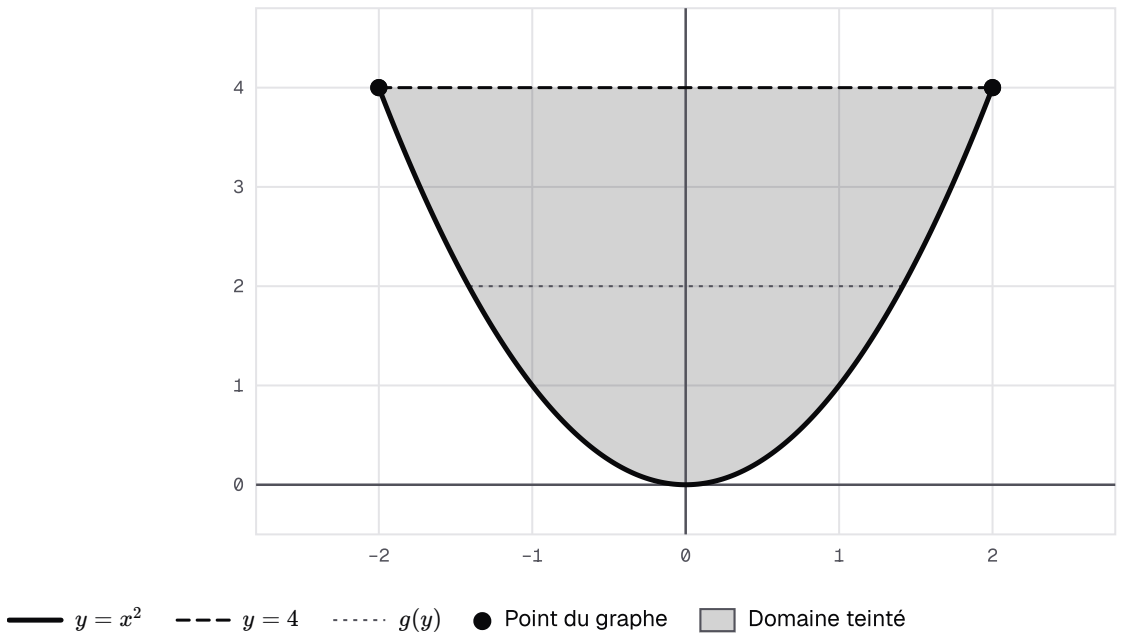
Autour de l'axe des abscisses : le profil formé par la courbe de f et son reflet. Le segment vertical en x est le diamètre d'une tranche en disque de rayon f(x), d'aire π(f(x))².

Théorème : Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des ordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit g une fonction continue sur un segment $[c, d]$, avec $c < d$.

Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées du domaine limité par la courbe d'équation $x = g(y)$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = c$ et $y = d$ est :

$$V = \int_c^d \pi \left(g(y)\right)^2 \mathrm{d}y \text{ u.v.}$$



Autour de l'axe des ordonnées : la courbe d'équation x = g(y), ici g(y) = √y sur [0, 4], et son reflet. Couper le solide horizontalement en y donne un disque d'aire π(g(y))².

Remarque

Ces deux formules sont esquissées dans le cours : le solide est découpé en tranches presque cylindriques. Le passage des tranches au volume exact repose sur le principe des sections, admis.

Méthode : calculer un volume de révolution

1. **Axe.** Autour de l'axe des abscisses, la courbe s'écrit $y = f(x)$; autour de l'axe des ordonnées, écris-la $x = g(y)$, en exprimant x en fonction de y.
2. **Formule.** Écris l'intégrale de $\pi \left(f(x)\right)^2$ autour de l'axe des abscisses (F16), ou de $\pi \left(g(y)\right)^2$ autour de l'axe des ordonnées (F17), avec les bornes de la bonne variable.
3. **Développer** le carré, puis intégrer, par parties si besoin.
4. **Unité.** Volume en u.v. ; si une unité de longueur vaut ℓ cm, une u.v. vaut ℓ^3 en cm^3.

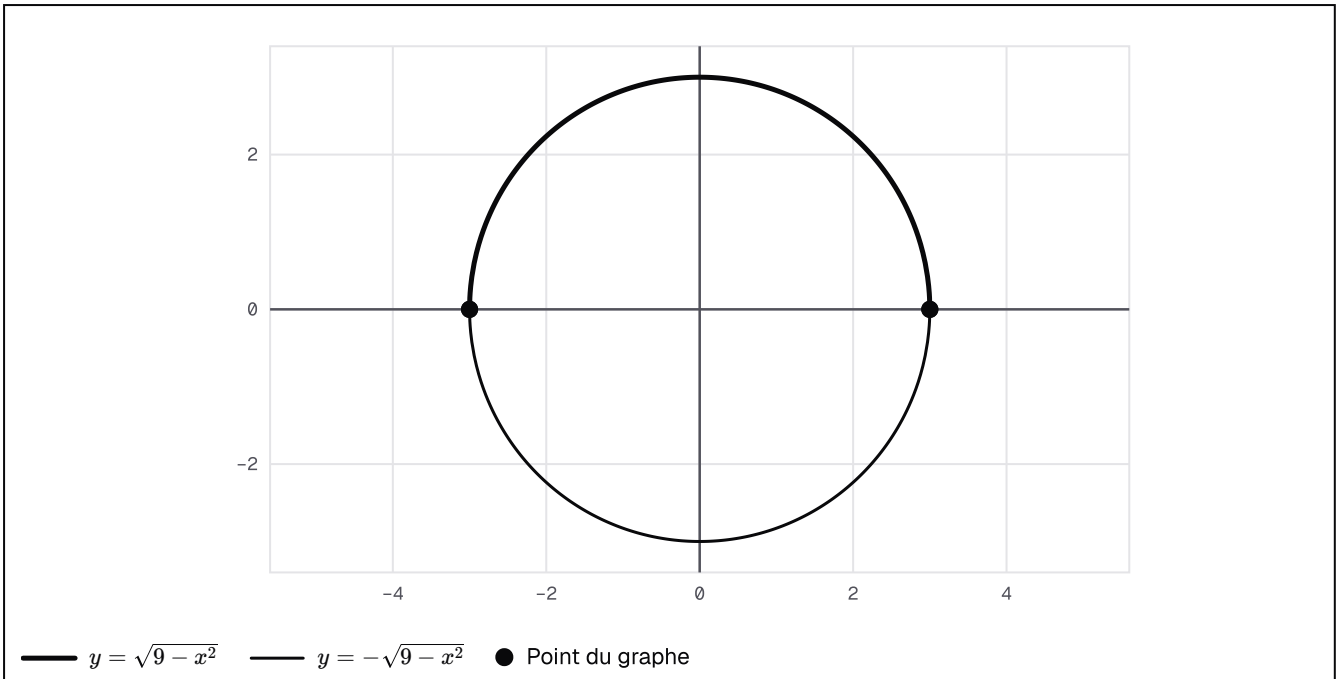
Exemple

Énoncé. Retrouve le volume d'une boule de rayon $r > 0$.

Solide. La boule est engendrée par la rotation autour de l'axe des abscisses du demi-disque situé sous la courbe de $x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$, continue sur $[-r, r]$. Pour tout $x \in [-r, r]$, $\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2 - x^2$.

Calcul.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi \left(r^2 - x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \ \text{u.v.} \end{aligned}$$



Avec r = 3 : le demi-cercle de la courbe de x ↦ √(9 − x²) et son reflet forment un cercle de rayon 3 ; la rotation du demi-disque autour de l'axe des abscisses donne la boule.

Exemple

Énoncé. Le domaine limité par la courbe d'équation $x = e^y$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$ tourne autour de l'axe des ordonnées. Calcule le volume V du solide obtenu.

Formule. La fonction $y \mapsto e^y$ est continue sur $[0, 1]$, et $(e^y)^2 = e^{2y}$. D'après la formule du volume autour de l'axe des ordonnées (F17) :

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{1} \pi \, e^{2y} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2} \left[e^{2y}\right]_{0}^{1} \\ &= \frac{\pi \left(e^2 - 1\right)}{2} \ \text{u.v.} \end{aligned}$$

Attention : Le carré à l'intérieur de l'intégrale

Le volume s'obtient en intégrant $\pi \left(f(x)\right)^2$, le carré **à l'intérieur** de l'intégrale. Élever au carré l'intégrale de f, ou oublier le carré, donne une autre valeur.

Pour un cylindre de rayon 2 et de hauteur 3, on trouve bien 12π seulement avec le carré à l'intérieur.

Choisir sa technique

Forme u′/u, avec u dérivable, u′ continue et u sans zéro sur [a, b]

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|u(x)|\Big]_a^b$$

Forme u′uⁿ (n entier, n ≠ −1, u sans zéro si n < 0)

$$\int_a^b u'(x)\,u(x)^n\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b$$

Forme u′eᵘ

$$\int_a^b u'(x)\,e^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[e^{u(x)}\Big]_a^b$$

Forme u′/(1 + u²)

$$\int_a^b \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan u(x)\Big]_a^b$$

Linéarisation du carré d'un cosinus

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Linéarisation du carré d'un sinus

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Intégration par parties (F12)

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$$

Changement de variable (F13)

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode : choisir une technique de calcul

1. **Reconnaître une forme composée** ($u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'e^u$, $\dfrac{u'}{1+u^2}$) : primitive directe.
2. **Puissance de $\sin$ ou de $\cos$** : linéarise, ou isole un facteur $\cos x$ (ou $\sin x$) et écris le reste avec $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
3. **Produit d'un polynôme ou d'un logarithme par une fonction usuelle** : intégration par parties.
4. **Racine ou expression en e^x gênante** : changement de variable ; si l'énoncé propose la relation, utilise-la telle quelle.

Rédaction : annonce la technique avant de calculer, par exemple « on intègre par parties ».

Exemple

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Linéariser. Pour tout réel x, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Calculer.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

À retenir : Les formes de questions

Un problème d'analyse peut se terminer par une intégrale. « Calculer à l'aide d'une intégration par parties » : écris u et v'. « En utilisant le changement de variable proposé » : vérifie ses hypothèses. « Calculer l'aire du domaine » : signe d'abord, unité à la fin. « En déduire » : réutilise le résultat précédent.

Rédige chaque calcul comme une courte preuve. Nomme la continuité, puis la technique et ses hypothèses, écris le crochet, puis la valeur exacte. Pour une inégalité entre intégrales, écris l'ordre des bornes. Pour une aire ou un volume, termine par l'unité.

Remarque

Le chapitre suivant étudie les fonctions définies par une intégrale dont une borne varie, ainsi que les suites et les sommes liées aux intégrales. Les techniques de ce chapitre y resservent toutes.