BURHAN

Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Niveau examen	5

Exercice 1 5,5 pts

Une courbe, son asymptote et l'aire qui les sépare

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x+2)\,e^{-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. On note Δ la droite d'équation $y = x - 1$. On donne $2{,}71 < e < 2{,}72$ et $4{,}48 < e^{\frac{3}{2}} < 4{,}49$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Écris $(x+2)\,e^{-x} = x\,e^{-x} + 2e^{-x}$ et utilise $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$.

2. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Étudie séparément $x - 1$ et le produit $(x+2)\,e^{-x}$: aucun des deux ne pose de forme indéterminée.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

INDICE

Étudie les variations de $\psi : x \mapsto e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$ et calcule son minimum.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\,(e^x - x - 1)$, puis en déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit $(x+2)\,e^{-x}$, puis factorise par e^{-x}. Le signe vient de la question 3. a).

4. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-\dfrac{3}{2} < \alpha < -1$.

INDICE

Calcule $f(-1)$ et $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et utilise les valeurs approchées données. Puis applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction strictement monotone.

5. 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.

INDICE

Le signe de $f(x) - (x-1) = (x+2)\,e^{-x}$ est celui de $x + 2$.

6. a) 1 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{2} - 3$.

INDICE

Pose pour u le facteur que la dérivation simplifie ; écris u' et v avant d'appliquer la formule.

6. b) 0,75 pts

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

INDICE

La question 5 donne la courbe du dessus sur $[-2, 0]$; l'unité d'aire vaut $2 \times 2\ \mathrm{cm}^2$.

Exercice 2 6 pts

Deux changements de variable pour encadrer π

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{2x}+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On rappelle que $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

1. 0,75 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement.

INDICE

En $+\infty$, divise le numérateur et le dénominateur par e^{2x}.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^{x}\,(3-e^{2x})}{(e^{2x}+3)^{2}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive un quotient. Le signe de $f'(x)$ est celui de $3-e^{2x}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{\ln 3}{2}$.

3. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, \ln 3]$, $1 \le f(x) \le \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Calcule $f(0)$ et $f(\ln 3)$, puis lis le tableau de variations sur chacun des deux morceaux de $[0, \ln 3]$.

4. a) 1 pts

À l'aide du changement de variable $x = \ln t$, montrer que $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{3} \frac{4}{t^{2}+3}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Pose $\varphi(t) = \ln t$ sur $J = [1, 3]$: vérifie $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(3) = \ln 3$, puis calcule $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$.

4. b) 1 pts

À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\,u$, en déduire que $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$.

INDICE

Avec $t = \sqrt{3}\,u$, on a $t^{2}+3 = 3(u^{2}+1)$; les bornes en u sont $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$. Pense à $\arctan$.

5. 0,5 pts

En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$.

INDICE

La question 3 donne le signe de f sur $[0, \ln 3]$; applique alors F14 (intégrale et aire sous une courbe).

6. 0,5 pts

Donner la valeur moyenne μ de f sur $[0, \ln 3]$.

INDICE

Divise l'intégrale de la question 4. b) par la longueur de l'intervalle.

7. 0,75 pts

À l'aide des questions 3 et 4, montrer que $\frac{3\sqrt{3}}{2} \ln 3 \leq \pi \leq 3 \ln 3$.

INDICE

Applique l'inégalité de la moyenne (F09) à l'encadrement de la question 3, puis isole π.

Exercice 3 — 6 pts

Une fonction prolongée en 0 et l'aire sous sa courbe

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f(x) = 3x\,(2 - \ln x)^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

1. — 0,75 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Développe : $3x\,(2 - \ln x)^2 = 12x - 12x \ln x + 3x(\ln x)^2$. Pour le dernier terme, écris $x(\ln x)^2 = 4\,(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

2. — 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ pour $x > 0$.

3. — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = 3(2 - \ln x)^2$.

4. — 1 pts

Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3 \ln x\,(\ln x - 2)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit $3x \times (2 - \ln x)^2$, puis factorise par $3(2 - \ln x)$. Les racines de f' sont 1 et e^2.

5. — 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, et déterminer les réels où f s'annule.

INDICE

Pour $x > 0$, $f(x)$ est le produit de $3x > 0$ et d'un carré.

6. a) — 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2} x\,(2 - \ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^4 - 5}{4}$.

INDICE

Lequel de $2 - \ln x$ et de x devient plus simple en dérivant ?

6. b) 1 pts

À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2} x\,(2-\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{e^4-13}{4}$, puis en déduire $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x) = (2-\ln x)^2$ et $v'(x) = x$: la nouvelle intégrale est celle de la question 6. a). Termine par la linéarité.

6. c) 0,5 pts

En déduire, en cm^2, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

INDICE

La question 5 donne le signe de f ; une unité d'aire vaut $1 \times 0{,}5\ \mathrm{cm}^2$.

Exercice 4 — 6 pts

Une racine carrée, une aire en deux morceaux et deux réels de la moyenne

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4]$ par $f(x) = 3x\sqrt{4-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. — 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le second résultat.

INDICE

Quand $x \to -\infty$, $4 - x \to +\infty$. Pour $x < 0$, simplifie $\dfrac{f(x)}{x}$ avant de passer à la limite.

2. — 1 pts

Montrer que, pour tout $x < 4$, $f'(x) = \dfrac{3(8-3x)}{2\sqrt{4-x}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit de $3x$ par $\sqrt{4-x}$; la dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ là où $u(x) > 0$. Réduis ensuite au même dénominateur.

3. — 0,25 pts

Étudier le signe de $f(x)$ sur $]-\infty, 4]$.

INDICE

Le facteur $\sqrt{4-x}$ est positif ; il ne s'annule qu'en 4.

4. a) — 1 pts

Soit φ la fonction définie sur $J = [0, 3]$ par $\varphi(t) = 4 - t^2$. Montrer que, pour tout $t \in [0, 3]$, $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = 6t^2(t^2 - 4)$, puis, à l'aide du changement de variable $x = \varphi(t)$, montrer que $\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{378}{5}$.

INDICE

Pour $t \geq 0$, $\sqrt{t^2} = t$. Vérifie les hypothèses du changement de variable (F13), puis cherche les réels t de J tels que $\varphi(t) = -5$ et $\varphi(t) = 4$: ce sont les nouvelles bornes.

4. b) — 0,75 pts

Montrer de même que $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{128}{5}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le même φ convient, avec $\varphi(2) = 0$. Pour la seconde intégrale, la relation de Chasles relie les trois bornes -5, 0 et 4.

5. 0,75 pts

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -5$ et $x = 4$.

INDICE

D'après la question 3, f change de signe en 0 : découpe en 0 et prends chaque morceau avec le bon signe. Le résultat n'est pas $\left|\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

6. a) 0,5 pts

Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0, 4]$.

INDICE

Applique la définition de la valeur moyenne (F10) avec l'intégrale de la question 4. b).

6. b) 1 pts

Justifier, à l'aide du théorème de la moyenne, qu'il existe un réel $c \in [0, 4]$ tel que $f(c) = \mu$. Montrer ensuite que l'équation $f(x) = \dfrac{32}{5}$ admet exactement deux solutions dans $[0, 4]$, l'une dans $\left]0, \dfrac{8}{3}\right[$ et l'autre dans $\left]\dfrac{8}{3}, 4\right[$.

INDICE

Le théorème de la moyenne donne une solution sans dire combien il y en a. Compare $\dfrac{32}{5}$ au maximum $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$, puis applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des deux intervalles où f est strictement monotone.

Exercice 5 6 pts

Une arc tangente, un logarithme et une aire sous l'axe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\arctan x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On rappelle que $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

1. 0,75 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

INDICE

La fonction $\arctan$ est bornée. Pour $x>0$, écris $1+x^2 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{1+x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; celle de $\arctan$ est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Calcule $f(1)$ avec $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

3. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$: le réel 0 et un réel β de $]1, +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f(0)$. Pour le signe de $f(1)$, compare $\ln 2$ et $\dfrac{\pi}{2}$ au nombre 1. Sur chacun des deux intervalles de monotonie, une fonction strictement monotone s'annule au plus une fois.

4. a) 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

INDICE

Écris $\arctan x = \arctan x \times 1$ et pose $v'(x) = 1$. La nouvelle intégrale est de la forme $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{u'}{u}$.

4. b) 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

INDICE

Pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = 1$: la nouvelle intégrale contient $\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, que l'égalité vérifiée transforme. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $\arctan$.

4. c) 0,5 pts

En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

INDICE

Linéarité avec les questions 4. a) et 4. b) ; la question 3 donne le signe de f sur $[0,1]$.

5. a) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

INDICE

Étudie sur $[0,1]$ les variations de la différence $x \mapsto f(x) - x^2 + 2x$; factorise sa dérivée par $2(x-1)$.

5. b) 0,5 pts

En déduire, à l'aide de la question 4. c), que $\ln 2 \geq \dfrac{2}{3}$.

INDICE

Intègre l'inégalité de la question 5. a) entre 0 et 1 avec la comparaison de deux intégrales (F07), en vérifiant l'ordre des bornes.