BURHAN

Calcul intégral : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Niveau examen	5

Exercice 1 5,5 pts

Une courbe, son asymptote et l'aire qui les sépare

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + (x+2)\,e^{-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. On note Δ la droite d'équation $y = x - 1$. On donne $2{,}71 < e < 2{,}72$ et $4{,}48 < e^{\frac{3}{2}} < 4{,}49$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

INDICE

Écris $(x+2)\,e^{-x} = x\,e^{-x} + 2e^{-x}$ et utilise $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$.

CORRIGÉ

Asymptote. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) &= (x+2)\,e^{-x} \\ &= x\,e^{-x} + 2e^{-x}. \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$.

Limite de f. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et la droite Δ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2. 0,25 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

INDICE

Étudie séparément $x - 1$ et le produit $(x+2)\,e^{-x}$: aucun des deux ne pose de forme indéterminée.

CORRIGÉ

Quand x tend vers $-\infty$, $x + 2$ tend vers $-\infty$ et e^{-x} vers $+\infty$. Par produit, $(x+2)\,e^{-x}$ tend vers $-\infty$. Comme $x - 1$ tend aussi vers $-\infty$, on conclut par somme.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

3. a) 0,5 pts

Montrer que, pour tout réel x, $e^x \geq x+1$.

INDICE

Étudie les variations de $\psi : x \mapsto e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$ et calcule son minimum.

CORRIGÉ

Une fonction auxiliaire. Soit $\psi : x \mapsto e^x - x - 1$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $\psi'(x) = e^x - 1$.

Signe de ψ'. La fonction $\exp$ est strictement croissante et $e^0 = 1$: $\psi'(x) < 0$ pour $x < 0$, et $\psi'(x) > 0$ pour $x > 0$.

Minimum. Donc ψ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Pour tout réel $x \neq 0$, $\psi(x) > \psi(0) = 0$.

Conclusion. Pour tout réel x, $e^x \geq x+1$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

3. b) 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}\left(e^x - x - 1\right)$, puis en déduire le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit $(x+2)\,e^{-x}$, puis factorise par e^{-x}. Le signe vient de la question 3. a).

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, en dérivant le produit $(x+2)\,e^{-x}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + e^{-x} \\ &\quad - (x+2)\,e^{-x} \\ &= 1 - (x+1)\,e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(e^x - x - 1\right). \end{aligned}$$

Signe. D'après la question 3. a), $e^x - x - 1 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$; et $e^{-x} > 0$. Donc $f'(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin $f(0) = -1 + 2 = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $-\dfrac{3}{2} < \alpha < -1$.

INDICE

Calcule $f(-1)$ et $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ et utilise les valeurs approchées données. Puis applique le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction strictement monotone.

CORRIGÉ

Existence et unicité. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$: elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = 0$ a donc une unique solution α.

Encadrement. On a $f(-1) = -2 + e > 0$, car $e > 2{,}71$. De plus :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{e^{\frac{3}{2}} - 5}{2} < 0, \end{aligned}$$

car $e^{\frac{3}{2}} < 4{,}49$. Ainsi $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) < f(\alpha) < f(-1)$, et f est strictement croissante.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, et $-\dfrac{3}{2} < \alpha < -1$.

5. 0,5 pts

Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.

INDICE

Le signe de $f(x) - (x-1) = (x+2)\,e^{-x}$ est celui de $x + 2$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $f(x) - (x-1) = (x+2)\,e^{-x}$, qui a le signe de $x + 2$, car $e^{-x} > 0$.

- Sur $]-2, +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de Δ.
- Sur $]-\infty, -2[$, $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de Δ.
- $\mathcal{C}_f$ et Δ se coupent au point d'abscisse -2, c'est-à-dire en $(-2, -3)$.

6. a)

1 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{2}-3$.

INDICE

Pose pour u le facteur que la dérivation simplifie ; écris u' et v avant d'appliquer la formule.

CORRIGÉ

On pose, pour tout réel x, $u(x)=x+2$ et $v'(x)=e^{-x}$, d'où $u'(x)=1$ et $v(x)=-e^{-x}$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues. D'après l'intégration par parties (F12) :

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{0}(x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-(x+2)\,e^{-x}\Big]_{-2}^{0} \\
&\quad + \int_{-2}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -2 + \Big[-e^{-x}\Big]_{-2}^{0} \\
&= -2 - 1 + e^{2} \\
&= e^{2}-3.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_{-2}^{0}(x+2)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{2}-3$.

6. b) 0,75 pts

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, la droite Δ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$.

INDICE

La question 5 donne la courbe du dessus sur $[-2, 0]$; l'unité d'aire vaut $2 \times 2\ \mathrm{cm}^2$.

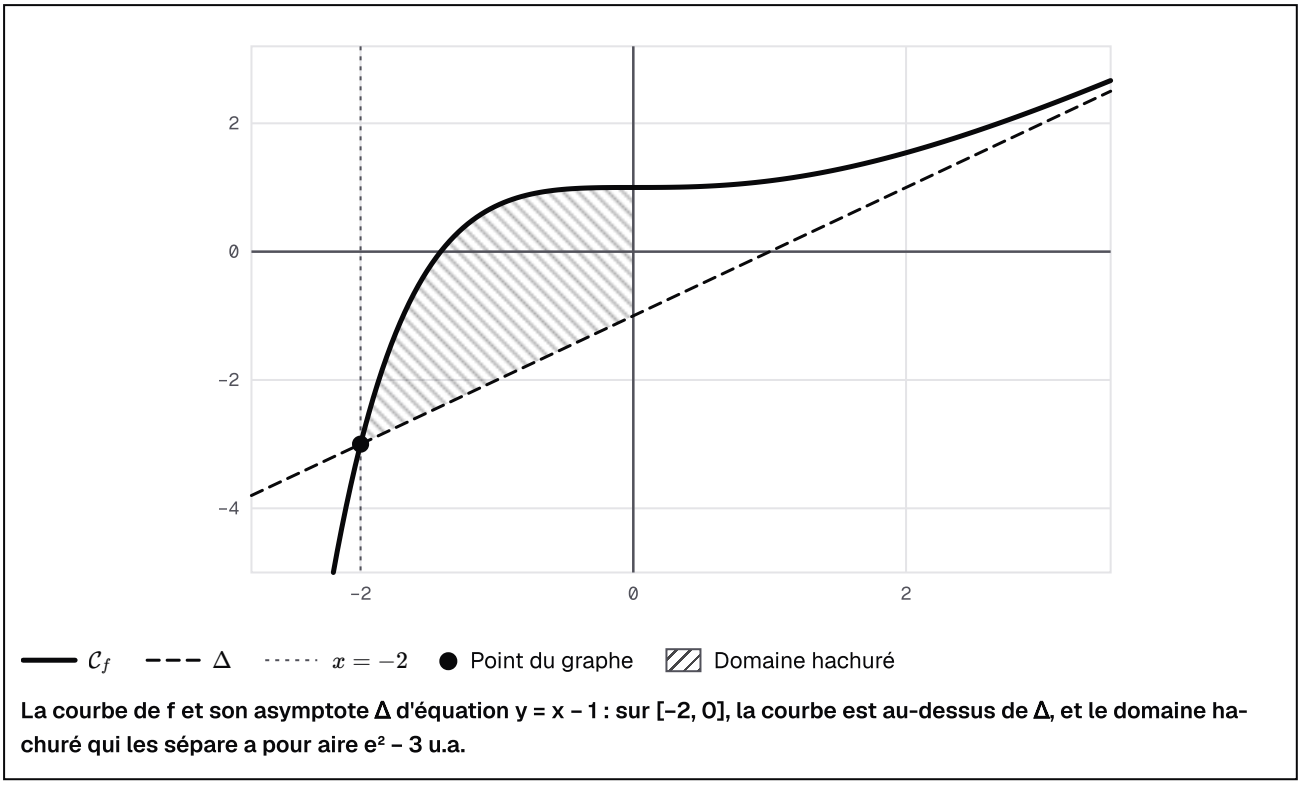
CORRIGÉ

Aire en unités d'aire. Les fonctions f et $x \mapsto x - 1$ sont continues sur $[-2, 0]$. D'après la question 5, pour tout $x \in [-2, 0]$, $f(x) - (x - 1) \geq 0$. D'après F15 (aire entre deux courbes) et la question 6. a) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^{0} (x + 2)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \\ &= e^2 - 3\ \text{u.a.} \end{aligned}$$

Conversion. Une unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4\ \mathrm{cm}^2$.

Conclusion. $\mathcal{A} = 4(e^2 - 3)\ \mathrm{cm}^2$.



La courbe de f et son asymptote Δ d'équation y = x − 1 : sur [−2, 0], la courbe est au-dessus de Δ, et le domaine hachuré qui les sépare a pour aire e² − 3 u.a.

Exercice 2 6 pts

Deux changements de variable pour encadrer π

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{2x}+3}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On rappelle que $\arctan\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

1. 0,75 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement.

INDICE

En $+\infty$, divise le numérateur et le dénominateur par e^{2x}.

CORRIGÉ

En $-\infty$. Quand x tend vers $-\infty$, e^{x} tend vers 0 et $e^{2x}+3$ vers 3. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

En $+\infty$. Pour tout réel x, en divisant le numérateur et le dénominateur par e^{2x} :

$$f(x) = \frac{4e^{-x}}{1+3e^{-2x}}.$$

Or e^{-x} et e^{-2x} tendent vers 0 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Conclusion. Les deux limites sont nulles : l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^{x}\,(3 - e^{2x})}{(e^{2x}+3)^{2}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive un quotient. Le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - e^{2x}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{\ln 3}{2}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, de dénominateur strictement positif. Pour tout réel x, le numérateur de $f'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned} &4e^{x}\,(e^{2x}+3) \\ &\quad - 4e^{x} \times 2e^{2x} \\ &= 4e^{x}\,(3 - e^{2x}). \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{4e^{x}\,(3 - e^{2x})}{(e^{2x}+3)^{2}}.$$

Signe. Le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - e^{2x}$. Par stricte croissance de $\exp$ et de $\ln$, $e^{2x} < 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 3}{2}$.

Maximum. Comme $e^{\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3}$, on a $f\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

3. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0, \ln 3]$, $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

INDICE

Calcule $f(0)$ et $f(\ln 3)$, puis lis le tableau de variations sur chacun des deux morceaux de $[0, \ln 3]$.

CORRIGÉ

On a $f(0) = \dfrac{4}{4} = 1$ et $f(\ln 3) = \dfrac{12}{9+3} = 1$. De plus $0 < \dfrac{\ln 3}{2} < \ln 3$. D'après le tableau de variations :

- sur $\left[0, \dfrac{\ln 3}{2}\right]$, f croît de 1 à $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$;
- sur $\left[\dfrac{\ln 3}{2}, \ln 3\right]$, f décroît de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ à 1.

Conclusion. Pour tout $x \in [0, \ln 3]$, $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. a)

1 pts

À l'aide du changement de variable $x = \ln t$, montrer que $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$.

INDICE

Pose $\varphi(t) = \ln t$ sur $J = [1, 3]$: vérifie $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(3) = \ln 3$, puis calcule $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$.

CORRIGÉ

Hypothèses du changement de variable. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : t \mapsto \ln t$ sur $J = [1, 3]$. Elle est dérivable, $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$ est continue sur J, et $\varphi(J) \subset \mathbb{R}$. De plus $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(3) = \ln 3$.

Nouvelle intégrande. Soit $t \in J$. Comme $e^{\ln t} = t$:

$$\begin{aligned} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) &= \frac{4t}{t^2+3} \times \frac{1}{t} \\ &= \frac{4}{t^2+3}. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le changement de variable (F13) :

$$\begin{aligned} &\int_1^3 \frac{4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

4. b) 1 pts

À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{3}\,u$, en déduire que $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$.

INDICE

Avec $t = \sqrt{3}\,u$, on a $t^2 + 3 = 3(u^2+1)$; les bornes en u sont $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$. Pense à $\arctan$.

CORRIGÉ

Hypothèses du changement de variable. La fonction $t \mapsto \dfrac{4}{t^2+3}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : u \mapsto \sqrt{3}\,u$ sur $J = \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]$: elle est dérivable, $\varphi'(u) = \sqrt{3}$ est continue, $\varphi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1$ et $\varphi(\sqrt{3}) = 3$.

Nouvelle intégrande. Soit $u \in J$:

$$\begin{aligned} &\frac{4}{3u^2+3} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Calcul. Une primitive de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est $\arctan$. D'après le changement de variable (F13) et la question 4. a) :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan u\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$.

5. 0,5 pts

En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$.

INDICE

La question 3 donne le signe de f sur $[0, \ln 3]$; applique alors F14 (intégrale et aire sous une courbe).

CORRIGÉ

D'après la question 3, f est continue et positive sur $[0, \ln 3]$, avec $0 < \ln 3$. D'après F14 (intégrale et aire sous une courbe) et la question 4. b), l'aire est égale à l'intégrale de f sur $[0, \ln 3]$.

Conclusion. L'aire vaut $\dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{9}$ u.a.

6. 0,5 pts

Donner la valeur moyenne μ de f sur $[0, \ln 3]$.

INDICE

Divise l'intégrale de la question 4. b) par la longueur de l'intervalle.

CORRIGÉ

La fonction f est continue sur $[0, \ln 3]$, avec $0 < \ln 3$. D'après la définition de la valeur moyenne (F10) et la question 4. b) :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\ln 3} \int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9 \ln 3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mu = \dfrac{2\sqrt{3}\,\pi}{9 \ln 3}$.

7. 0,75 pts

À l'aide des questions 3 et 4, montrer que $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \ln 3 \leq \pi \leq 3 \ln 3$.

INDICE

Applique l'inégalité de la moyenne (F09) à l'encadrement de la question 3, puis isole π.

CORRIGÉ

Inégalité de la moyenne. D'après la question 3, pour tout $x \in [0, \ln 3]$, $1 \leq f(x) \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; f y est continue et $0 \leq \ln 3$. D'après F09 (inégalité de la moyenne) et la question 4. b) :

$$\begin{aligned} \ln 3 &\leq \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9} \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln 3. \end{aligned}$$

Isoler π. On multiplie par $\dfrac{9}{2\sqrt{3}} > 0$, en remarquant que $\dfrac{9}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ et que $\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \times \dfrac{9}{2\sqrt{3}} = 3$.

Conclusion. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \ln 3 \leq \pi \leq 3 \ln 3$.

Exercice 3 6 pts

Une fonction prolongée en 0 et l'aire sous sa courbe

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f(x) = 3x\,(2 - \ln x)^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$.

1. 0,75 pts

Montrer que f est continue à droite en 0.

INDICE

Développe : $3x\,(2 - \ln x)^2 = 12x - 12x \ln x + 3x(\ln x)^2$. Pour le dernier terme, écris $x(\ln x)^2 = 4\,(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

CORRIGÉ

Développement. Pour $x > 0$:

$$f(x) = 12x - 12x \ln x + 3x(\ln x)^2.$$

Or $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$ et $x = (\sqrt{x})^2$, donc $x(\ln x)^2 = 4\,(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$.

Limite en 0. Quand x tend vers 0^+, $\sqrt{x}$ tend vers 0^+. Par composée avec la limite rappelée, $\sqrt{x} \ln \sqrt{x}$ tend vers 0. Ainsi $3x(\ln x)^2$, $12x \ln x$ et $12x$ tendent vers 0.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$: f est continue à droite en 0.

2. 0,75 pts

Étudier la dérivabilité de f à droite en 0, et interpréter graphiquement le résultat.

INDICE

Calcule le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ pour $x > 0$.

CORRIGÉ

Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de f entre 0 et x vaut :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 3(2 - \ln x)^2.$$

Quand x tend vers 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc $2 - \ln x$ tend vers $+\infty$, et le taux tend vers $+\infty$.

Conclusion. f n'est pas dérivable à droite en 0 : $\mathcal{C}_f$ admet au point O une demi-tangente verticale.

3. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement.

INDICE

Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=3(2-\ln x)^2$.

CORRIGÉ

Pour $x>0$, $\dfrac{f(x)}{x}=3(2-\ln x)^2$. Quand x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc $3(2-\ln x)^2$ tend vers $+\infty$. Par produit avec x, $f(x)$ tend aussi vers $+\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$: $\mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $x>0$, $f'(x)=3\ln x\,(\ln x-2)$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit $3x\times(2-\ln x)^2$, puis factorise par $3(2-\ln x)$. Les racines de f' sont 1 et e^2.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, en dérivant le produit $3x\times(2-\ln x)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(2-\ln x)^2 \\ &\quad -6(2-\ln x) \\ &= 3(2-\ln x)(2-\ln x-2) \\ &= 3\ln x\,(\ln x-2). \end{aligned}$$

Signe. Le facteur $\ln x$ est négatif sur $]0,1[$ et positif sur $]1,+\infty[$. Le facteur $\ln x-2$ est négatif sur $\left]0,e^2\right[$ et positif sur $\left]e^2,+\infty\right[$. De plus $f(1)=12$ et $f(e^2)=0$. Comme f est continue à droite en 0 (question 1), elle est croissante sur $[0,1]$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	12	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, et déterminer les réels où f s'annule.

INDICE

Pour $x > 0$, $f(x)$ est le produit de $3x > 0$ et d'un carré.

CORRIGÉ

On a $f(0) = 0$. Soit $x > 0$: $3x > 0$ et $(2 - \ln x)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq 0$. De plus :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \ln x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = e^2. \end{aligned}$$

Conclusion. Pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, et f s'annule seulement en 0 et en e^2.

6. a) 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2} x\,(2 - \ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^4 - 5}{4}$.

INDICE

Lequel de $2 - \ln x$ et de x devient plus simple en dérivant ?

CORRIGÉ

On travaille sur $]0, +\infty[$, qui contient 1 et e^2. On pose $u(x) = 2 - \ln x$ et $v'(x) = x$, d'où $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$. Ces fonctions sont dérivables, de dérivées continues sur cet intervalle. Notons P l'intégrale cherchée. D'après l'intégration par parties (F12) :

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{x^2}{2}(2 - \ln x)\right]_1^{e^2} \\ &\quad + \int_1^{e^2} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= (0 - 1) + \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{e^2} \\ &= -1 + \frac{e^4 - 1}{4} \\ &= \frac{e^4 - 5}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_1^{e^2} x\,(2 - \ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^4 - 5}{4}$.

6. b) 1 pts

À l'aide d'une seconde intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{e^2} x\,(2-\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{e^4-13}{4}$, puis en déduire $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x)=(2-\ln x)^2$ et $v'(x)=x$: la nouvelle intégrale est celle de la question 6. a). Termine par la linéarité.

CORRIGÉ

Seconde intégration par parties. Sur $]0,+\infty[$, on pose $u(x)=(2-\ln x)^2$ et $v'(x)=x$, d'où $u'(x)=-\dfrac{2(2-\ln x)}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$. Ces fonctions sont dérivables, de dérivées continues. Notons Q l'intégrale cherchée. D'après F12 (intégration par parties) et la question 6. a) :

$$\begin{aligned} Q &= \Big[\frac{x^2}{2}(2-\ln x)^2\Big]_1^{e^2} \\ &\quad + \int_1^{e^2} x\,(2-\ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= (0-2) + \frac{e^4-5}{4} \\ &= \frac{e^4-13}{4}. \end{aligned}$$

Intégrale de f. Pour $x\in[1,e^2]$, $f(x)=3x\,(2-\ln x)^2$. Par linéarité (F05) :

$$\begin{aligned} &\int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 3\times\frac{e^4-13}{4} \\ &= \frac{3(e^4-13)}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $Q=\dfrac{e^4-13}{4}$ et $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3(e^4-13)}{4}$.

6. c) 0,5 pts

En déduire, en cm^2, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

INDICE

La question 5 donne le signe de f ; une unité d'aire vaut $1\times 0{,}5\ \mathrm{cm}^2$.

CORRIGÉ

Aire en unités d'aire. D'après la question 5, f est positive sur $[1,e^2]$; elle y est continue, avec $1<e^2$. D'après F14 (intégrale et aire sous une courbe) et la question 6. b), l'aire vaut $\dfrac{3(e^4-13)}{4}$ u.a.

Conversion. Une unité d'aire vaut $1\times 0{,}5=0{,}5\ \mathrm{cm}^2$.

Conclusion. L'aire vaut $\dfrac{3(e^4-13)}{8}\ \mathrm{cm}^2$.

Exercice 4 6 pts

Une racine carrée, une aire en deux morceaux et deux réels de la moyenne

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 4]$ par $f(x) = 3x\sqrt{4-x}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. 0,75 pts

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le second résultat.

INDICE

Quand $x \to -\infty$, $4 - x \to +\infty$. Pour $x < 0$, simplifie $\dfrac{f(x)}{x}$ avant de passer à la limite.

CORRIGÉ

Limite de f. Quand x tend vers $-\infty$, $4 - x$ tend vers $+\infty$, donc $\sqrt{4-x}$ tend vers $+\infty$, et $3x$ tend vers $-\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour tout $x < 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = 3\sqrt{4-x}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout $x < 4$, $f'(x) = \dfrac{3(8-3x)}{2\sqrt{4-x}}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

Dérive le produit de $3x$ par $\sqrt{4-x}$; la dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ là où $u(x) > 0$. Réduis ensuite au même dénominateur.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction $x \mapsto 4 - x$ est dérivable et strictement positive sur $]-\infty, 4[$, donc f est dérivable sur $]-\infty, 4[$. Pour tout $x < 4$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sqrt{4-x} - \frac{3x}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{6(4-x) - 3x}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{3(8-3x)}{2\sqrt{4-x}}. \end{aligned}$$

Signe. Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $8 - 3x$. Donc $f'(x) > 0$ pour $x < \dfrac{8}{3}$, et $f'(x) < 0$ pour $\dfrac{8}{3} < x < 4$. Comme f est continue sur $]-\infty, 4]$, elle est strictement croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{8}{3}, 4\right]$.

Valeurs. $f(4) = 0$ et :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{8}{3}\right) &= 8\sqrt{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\dfrac{8}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

3. 0,25 pts

Étudier le signe de $f(x)$ sur $]-\infty, 4]$.

INDICE

Le facteur $\sqrt{4-x}$ est positif ; il ne s'annule qu'en 4.

CORRIGÉ

Pour $x < 4$, $\sqrt{4-x} > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $3x$.

Conclusion. $f(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f(x) > 0$ sur $]0, 4[$, et $f(0) = f(4) = 0$.

4. a) 1 pts

Soit φ la fonction définie sur $J=[0,3]$ par $\varphi(t)=4-t^2$. Montrer que, pour tout $t\in[0,3]$, $f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)=6t^2(t^2-4)$, puis, à l'aide du changement de variable $x=\varphi(t)$, montrer que $\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{378}{5}$.

INDICE

Pour $t\geq 0$, $\sqrt{t^2}=t$. Vérifie les hypothèses du changement de variable (F13), puis cherche les réels t de J tels que $\varphi(t)=-5$ et $\varphi(t)=4$: ce sont les nouvelles bornes.

CORRIGÉ

Nouvelle intégrande. Soit $t\in[0,3]$. On a $\varphi(t)=4-t^2\leq 4$ et $4-\varphi(t)=t^2$, donc $\sqrt{4-\varphi(t)}=\sqrt{t^2}=t$, car $t\geq 0$. Avec $\varphi'(t)=-2t$:

$$\begin{aligned} &f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\\ &=3(4-t^2)\times t\times(-2t)\\ &=6t^2(t^2-4). \end{aligned}$$

Hypothèses de F13 (changement de variable). La fonction f est continue sur $I=\,]-\infty,4]$; φ est dérivable sur J, de dérivée continue sur J, et $\varphi(J)\subset I$. De plus $\varphi(3)=-5$ et $\varphi(0)=4$.

Calcul. D'après le changement de variable (F13), puis l'échange des bornes (F03) :

$$\begin{aligned} &\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\\ &=\int_{3}^{0} 6t^2(t^2-4)\,\mathrm{d}t\\ &=-\int_{0}^{3}(6t^4-24t^2)\,\mathrm{d}t\\ &=-\Big[\frac{6}{5}t^5-8t^3\Big]_0^3\\ &=-\left(\frac{1458}{5}-216\right)\\ &=-\frac{378}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{378}{5}$.

4. b) `0,75 pts`

Montrer de même que $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{128}{5}$, puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-5}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le même φ convient, avec $\varphi(2) = 0$. Pour la seconde intégrale, la relation de Chasles relie les trois bornes -5, 0 et 4.

CORRIGÉ

Intégrale sur $[0, 4]$. Les hypothèses de F13 (changement de variable) sont celles de la question 4. a), et $2 \in J$ avec $\varphi(2) = 0$ et $\varphi(0) = 4$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^0 6t^2(t^2-4)\,\mathrm{d}t \\
&= -\Big[\frac{6}{5}t^5 - 8t^3\Big]_0^2 \\
&= -\left(\frac{192}{5} - 64\right) \\
&= \frac{128}{5}.
\end{aligned}$$

Intégrale sur $[-5, 0]$. La fonction f est continue sur I, qui contient -5, 0 et 4. D'après la relation de Chasles (F04) :

$$\begin{aligned}
&\int_{-5}^0 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-5}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{378}{5} - \frac{128}{5} \\
&= -\frac{506}{5}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{128}{5}$ et $\displaystyle\int_{-5}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{506}{5}$.

5. `0,75 pts`

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -5$ et $x = 4$.

INDICE

D'après la question 3, f change de signe en 0 : découpe en 0 et prends chaque morceau avec le bon signe. Le résultat n'est pas $\left|\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

CORRIGÉ

Aire et valeur absolue. La fonction f est continue sur $[-5, 4]$. D'après F15 (aire entre deux courbes), appliqué à f et à la fonction nulle :

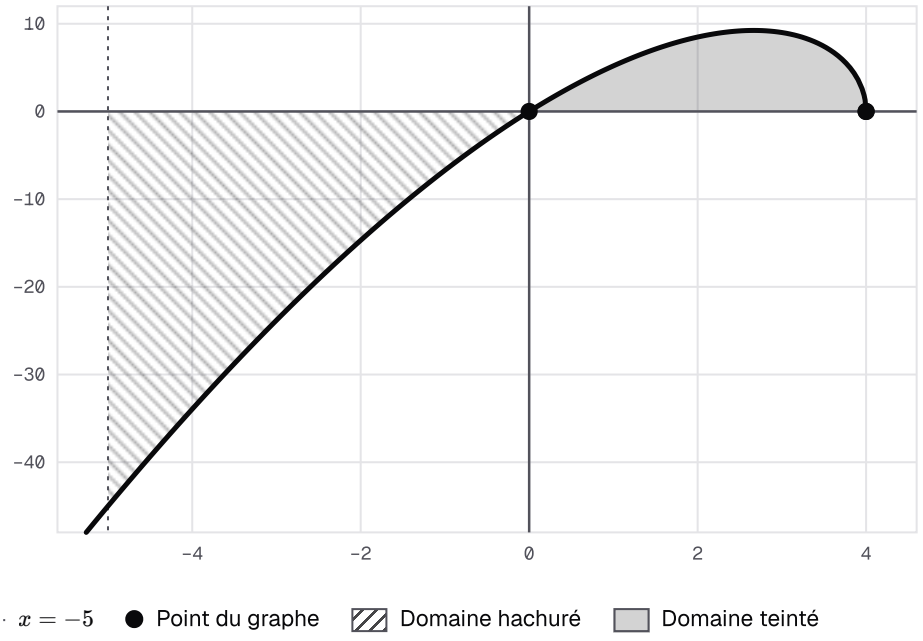
$$\mathcal{A} = \int_{-5}^{4} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

D'après la question 3, $|f(x)| = -f(x)$ sur $[-5, 0]$ et $|f(x)| = f(x)$ sur $[0, 4]$.

Calcul. Par la relation de Chasles (F04) et la question 4. b) :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_{-5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{506}{5} + \frac{128}{5} \\ &= \frac{634}{5} \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \dfrac{634}{5}$ u.a. En revanche $\left|\displaystyle\int_{-5}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \dfrac{378}{5}$: les deux morceaux se compensent en partie dans l'intégrale, jamais dans l'aire (W04).



Courbe de f : x ↦ 3x√(4 − x) sur [−5, 4] : le domaine hachuré, sous l'axe, va de −5 à 0 ; le domaine teinté, au-dessus, va de 0 à 4. L'aire les additionne, alors que l'intégrale les fait se compenser en partie.

6. a)

0,5 pts

Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0, 4]$.

INDICE

Applique la définition de la valeur moyenne (F10) avec l'intégrale de la question 4. b).

CORRIGÉ

La fonction f est continue sur $[0, 4]$, avec $0 < 4$. D'après la définition de la valeur moyenne (F10) et la question 4. b) :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{4 - 0} \int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{128}{5} \\ &= \frac{32}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\mu = \dfrac{32}{5}$.

6. b) 1 pts

Justifier, à l'aide du théorème de la moyenne, qu'il existe un réel $c \in [0,4]$ tel que $f(c) = \mu$. Montrer ensuite que l'équation $f(x) = \dfrac{32}{5}$ admet exactement deux solutions dans $[0,4]$, l'une dans $\left]0, \dfrac{8}{3}\right[$ et l'autre dans $\left]\dfrac{8}{3}, 4\right[$.

INDICE

Le théorème de la moyenne donne une solution sans dire combien il y en a. Compare $\dfrac{32}{5}$ au maximum $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$, puis applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chacun des deux intervalles où f est strictement monotone.

CORRIGÉ

Existence. La fonction f est continue sur $[0,4]$: d'après le théorème de la moyenne (F11), il existe $c \in [0,4]$ tel que $f(c) = \mu = \dfrac{32}{5}$.

Comparaison avec le maximum. En multipliant par $15 > 0$, puis en divisant par $80 > 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{32}{5} < \frac{16\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow\ & 96 < 80\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{6}{5} < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, car $\left(\dfrac{6}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{25} < 3$. Donc $0 < \dfrac{32}{5} < \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Deux solutions.

- Sur $\left[0, \dfrac{8}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante, de $f(0) = 0$ à $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \dfrac{32}{5}$ y admet une unique solution c_1, et $c_1 \in \left]0, \dfrac{8}{3}\right[$, car $\dfrac{32}{5}$ diffère de $f(0)$ et de $f\left(\dfrac{8}{3}\right)$.
- Sur $\left[\dfrac{8}{3}, 4\right]$, f est continue et strictement décroissante, de $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ à $f(4) = 0$. De même, l'équation y admet une unique solution c_2, et $c_2 \in \left]\dfrac{8}{3}, 4\right[$.

Conclusion. L'équation $f(x) = \dfrac{32}{5}$ admet exactement deux solutions dans $[0,4]$: le réel c donné par le théorème de la moyenne (F11) n'est pas unique ici.

Exercice 5 6 pts

Une arc tangente, un logarithme et une aire sous l'axe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\arctan x$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé. On rappelle que $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

1. 0,75 pts

Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter graphiquement ce résultat.

INDICE

La fonction $\arctan$ est bornée. Pour $x > 0$, écris $1 + x^2 = x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, donc $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

CORRIGÉ

Limites de f. Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $1+x^2$ tend vers $+\infty$, donc $\ln(1+x^2)$ aussi. De plus $-2\arctan x$ tend vers π en $-\infty$ et vers $-\pi$ en $+\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Limite de $\dfrac{f(x)}{x}$. Pour tout $x > 0$, $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, donc :

$$\frac{f(x)}{x} = 2\,\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\arctan x}{x}.$$

En $+\infty$: $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 (croissances comparées) ; $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ tend vers $\ln 1 = 0$ et $\dfrac{1}{x}$ vers 0 ; enfin $\dfrac{2\arctan x}{x}$ tend vers 0, car son numérateur tend vers π. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Conclusion. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2. 1 pts

Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{1+x^2}$, puis dresser le tableau de variations de f.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$; celle de $\arctan$ est $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Calcule $f(1)$ avec $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

CORRIGÉ

Dérivée. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} \\ &= \frac{2(x-1)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Comme $1+x^2 > 0$, $f'(x)$ a le signe de $x-1$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum est $f(1) = \ln 2 - 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - \dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. 0,75 pts

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$: le réel 0 et un réel β de $]1, +\infty[$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f(0)$. Pour le signe de $f(1)$, compare $\ln 2$ et $\dfrac{\pi}{2}$ au nombre 1. Sur chacun des deux intervalles de monotonie, une fonction strictement monotone s'annule au plus une fois.

CORRIGÉ

Deux valeurs. On a $f(0) = \ln 1 - 2\arctan 0 = 0$. Comme $2 < e$, $\ln 2 < 1$; comme $\pi > 2$, $\dfrac{\pi}{2} > 1$. Donc $f(1) = \ln 2 - \dfrac{\pi}{2} < 0$.

Les solutions.

- Sur $]-\infty, 1]$, f est strictement décroissante : elle s'y annule au plus une fois, donc seulement en 0.
- Sur $[1, +\infty[$, f est continue et strictement croissante, avec $f(1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[f(1), +\infty[$, qui contient 0. L'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution β, et $\beta \neq 1$, car $f(1) \neq 0$.

Signe. D'après les variations : $f(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f(x) < 0$ sur $]0, \beta[$ et $f(x) > 0$ sur $]\beta, +\infty[$.

Conclusion. L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions, 0 et $\beta \in]1, +\infty[$. En particulier, $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

4. a) 0,75 pts

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

INDICE

Écris $\arctan x = \arctan x \times 1$ et pose $v'(x) = 1$. La nouvelle intégrale est de la forme $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{u'}{u}$.

CORRIGÉ

On pose $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $v(x) = x$. Ces fonctions sont dérivables sur $[0,1]$, de dérivées continues. Sur $[0,1]$, $1 + x^2 > 0$: la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. D'après l'intégration par parties (F12) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[x \arctan x\Big]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 \frac{x \,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

4. b) 1 pts

Vérifier que, pour tout réel x, $\dfrac{x^2}{1+x^2} = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

INDICE

Pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = 1$: la nouvelle intégrale contient $\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, que l'égalité vérifiée transforme. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $\arctan$.

CORRIGÉ

L'égalité. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Intégration par parties. On pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = 1$, d'où $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $v(x) = x$, fonctions dérivables sur $[0,1]$ à dérivées continues. Notons L l'intégrale cherchée. D'après F12 (intégration par parties), puis par linéarité (F05) :

$$\begin{aligned} L &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 2\Big[x - \arctan x\Big]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

4. c) 0,5 pts

En déduire $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

INDICE

Linéarité avec les questions 4. a) et 4. b) ; la question 3 donne le signe de f sur $[0, 1]$.

CORRIGÉ

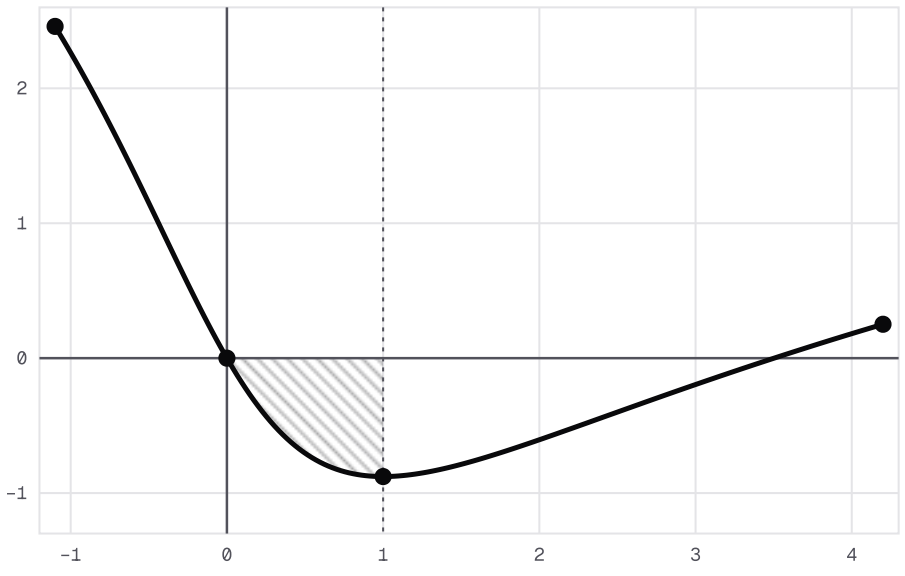
Intégrale de f. Par linéarité (F05) et les questions 4. a) et 4. b) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \left(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right) \\ &= 2\ln 2 - 2.\end{aligned}$$

Aire. La fonction f est continue sur $[0, 1]$ et, d'après la question 3, $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$: la courbe est sous l'axe des abscisses. D'après F15 (aire entre deux courbes), appliqué à f et à la fonction nulle :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \big(0 - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= 2 - 2\ln 2 \text{ u.a.}\end{aligned}$$

Conclusion. $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 2$, et l'aire vaut $2 - 2\ln 2$ u.a., nombre positif car $\ln 2 < 1$.



$\mathcal{C}_f$ $x = 1$ Point du graphe Domaine hachuré

Sur [0, 1], la courbe de f passe sous l'axe des abscisses : l'aire hachurée vaut l'opposé de l'intégrale, soit 2 − 2 ln 2 unités d'aire.

5. a) 0,75 pts

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

INDICE

Étudie sur $[0,1]$ les variations de la différence $x \mapsto f(x) - x^2 + 2x$; factorise sa dérivée par $2(x-1)$.

CORRIGÉ

Une fonction auxiliaire. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - x^2 + 2x$. Elle est dérivable et, d'après la question 2, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} & g'(x) \\ &= \frac{2(x-1)}{1+x^2} - 2(x-1) \\ &= 2(x-1)\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) \\ &= 2(x-1) \times \frac{-x^2}{1+x^2} \\ &= \frac{2x^2(1-x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Variations. Pour $x \in [0,1]$, $x^2 \geq 0$, $1-x \geq 0$ et $1+x^2 > 0$, donc $g'(x) \geq 0$: g est croissante sur $[0,1]$. Comme $g(0) = f(0) = 0$, on a $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geq x^2 - 2x$.

5. b) 0,5 pts

En déduire, à l'aide de la question 4. c), que $\ln 2 \geq \dfrac{2}{3}$.

INDICE

Intègre l'inégalité de la question 5. a) entre 0 et 1 avec la comparaison de deux intégrales (FO7), en vérifiant l'ordre des bornes.

CORRIGÉ

Intégration de l'inégalité. Les fonctions f et $x \mapsto x^2 - 2x$ sont continues sur $[0,1]$, avec $0 \leq 1$. D'après la question 5. a) et la comparaison de deux intégrales (FO7) :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Calcul. D'une part, $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$. D'autre part, l'intégrale de f vaut $2\ln 2 - 2$ (question 4. c)). Donc :

$$-\frac{2}{3} \leq 2\ln 2 - 2.$$

Ainsi $2\ln 2 \geq 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Conclusion. $\ln 2 \geq \dfrac{2}{3}$.