BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	8

Exercice 1

Encadrer une intégrale par deux polynômes

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ n'a pas de primitive usuelle : on va encadrer I.

1.

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$1 - x^3 \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1 - x^3 + x^6.$$

INDICE

Multiplie chaque membre par $1+x^3$, qui est strictement positif : développe $(1-x^3)(1+x^3)$ et $(1-x^3+x^6)(1+x^3)$.

2.

En déduire que $\dfrac{3}{4} \leq I \leq \dfrac{25}{28}$.

INDICE

Les trois fonctions sont continues sur $[0,1]$ et $0 \leq 1$: la comparaison de deux intégrales (F07) permet d'intégrer l'encadrement de la question 1.

3.

En déduire une valeur approchée de I et la précision de cette approximation.

INDICE

Prends le centre de l'encadrement ; l'erreur est au plus la moitié de son amplitude.

4.

Quel encadrement de I donne l'inégalité de la moyenne, à partir des valeurs extrêmes de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $[0,1]$? Comparer sa précision avec celle de la question 2.

INDICE

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ est décroissante sur $[0,1]$: lis son minimum et son maximum aux bornes.

Exercice 2

L'inégalité de la moyenne en deux versions

1.

Étudier les variations de la fonction $k : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $[1, 2]$.

INDICE

Dérive un quotient : le numérateur de $k'(x)$ se factorise par e^x.

2.

En déduire que $e \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{e^2}{2}$.

INDICE

La question 1 donne un minimum et un maximum de k sur $[1, 2]$; applique l'inégalité de la moyenne (F09), avec $b - a = 1$.

3.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos 3x}{x+2}\,\mathrm{d}x\right| \leq 1$.

INDICE

Majore $\left|\dfrac{\cos 3x}{x+2}\right|$ par une constante M sur $[0, 2]$, avec $|\cos 3x| \leq 1$ et $x + 2 \geq 2$.

Exercice 3

Deux intégrations par parties

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 1)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x) = x^2 + 1$ et $v'(x) = e^{-x}$; la nouvelle intégrale contient $2x\, e^{-x}$: recommence avec $u(x) = 2x$.

2.

On pose $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x\,\mathrm{d}x$ et $M = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $K = e^{\pi} - 2M$.

INDICE

Pose $u(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x$. Au crochet, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\sin 0 = 0$.

3.

Montrer que $M = 1 + 2K$, puis en déduire la valeur de K.

INDICE

Garde $u(x) = e^{2x}$, avec cette fois $v'(x) = \sin x$: l'intégrale K réapparaît. Remplace ensuite M dans la relation de la question 2.

Exercice 4

Changer de variable et transformer les bornes

1.

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$.

INDICE

Prends $J = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Rappelle-toi que $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t$ et que $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

2.

En déduire la valeur exacte de I.

INDICE

Linéarise : $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$.

3.

À l'aide du changement de variable $x = e^t$, calculer $L = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\,(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Les nouvelles bornes sont les réels t tels que $e^t = 1$ et $e^t = e^2$. Après simplification, écris $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$.

Exercice 5

Linéariser avant d'intégrer

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$.

INDICE

Écris $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, puis linéarise $\sin^2 2x$.

2.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

INDICE

Intègre la forme linéarisée : une primitive de $x \mapsto \cos 4x$ est $x \mapsto \dfrac{\sin 4x}{4}$.

3.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris $\cos^3 x = \cos x\,(1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$: le second terme a la forme $u'u^2$ avec $u = \sin$.

Exercice 6

Aire entre deux courbes qui se croisent

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x - 1$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1.

Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0, 3]$, et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Calcule $f(x) - g(x)$ puis factorise par x : le trinôme restant a une racine évidente.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

INDICE

Coupe en 1. Sur $[0, 1]$, intègre $f - g$; sur $[1, 3]$, intègre $g - f$, d'après le signe trouvé.

3.

Donner $\mathcal{A}$ en cm^2.

INDICE

Une unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

4.

Calculer $\displaystyle\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$. Pourquoi ce nombre n'est-il pas l'aire $\mathcal{A}$?

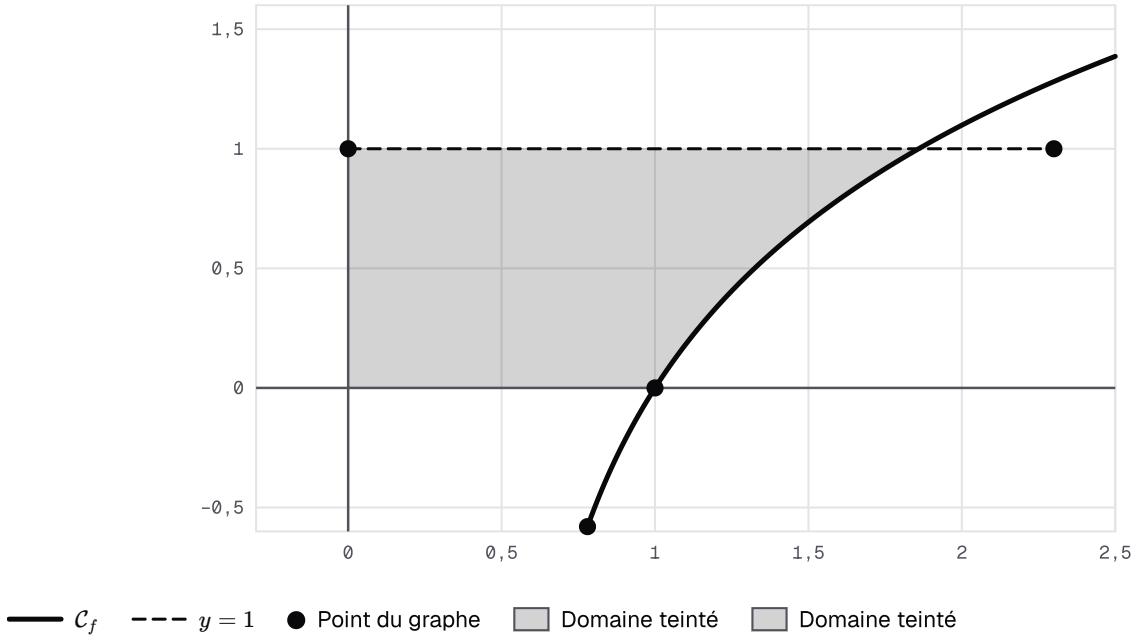
INDICE

Utilise la primitive P de la question 2, puis compare avec le découpage.

Exercice 7

Un volume autour de l'axe des ordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\ln(2x-1)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. On note $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y=0$ et $y=1$.



Le domaine D : entre la courbe de f : x ↦ ln(2x − 1), l'axe des ordonnées et les droites d'équations y = 0 et y = 1.

1.

Montrer que, pour tout $x>\frac{1}{2}$ et tout réel y : $y=\ln(2x-1)\Leftrightarrow x=\dfrac{e^y+1}{2}$. On note g la fonction $y\mapsto\dfrac{e^y+1}{2}$.

INDICE

La fonction exponentielle et la fonction $\ln$ sont réciproques : $\ln A=y$ équivaut à $A=e^y$ pour $A>0$.

2.

Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des ordonnées.

INDICE

Applique F17 (volume autour de l'axe des ordonnées) avec $c=0$ et $d=1$; développe $\big(g(y)\big)^2=\dfrac{e^{2y}+2e^y+1}{4}$ avant d'intégrer.

3.

Montrer, sans calcul d'intégrale, que $V\leq\dfrac{\pi\,(e+1)^2}{4}$, et interpréter géométriquement ce majorant.

INDICE

La fonction g est croissante et positive sur $[0,1]$: majore $\big(g(y)\big)^2$ par $\big(g(1)\big)^2$.

Exercice 8

Le théorème de la moyenne au travail

1.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{8}{(2x+1)^2}$. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

INDICE

Une primitive de $x \mapsto \frac{8}{(2x+1)^2}$ est $x \mapsto -\frac{4}{2x+1}$: vérifie-le en dérivant.

2.

Justifier l'existence d'un réel $c \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ tel que $f(c) = \mu$, puis montrer que ce réel est unique et le calculer.

INDICE

L'existence vient du théorème de la moyenne (F11). Pour l'unicité, regarde le sens de variation de f sur le segment.

3.

Soit h une fonction continue sur $[1, 4]$ telle que $\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Montrer que l'équation $h(x) = 3$ admet au moins une solution dans $[1, 4]$.

INDICE

Calcule la valeur moyenne de h sur $[1, 4]$, puis applique le théorème de la moyenne (F11).