BURHAN

Calcul intégral : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Entraînement	8

Exercice 1

Encadrer une intégrale par deux polynômes

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ n'a pas de primitive usuelle : on va encadrer I.

1.

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$1 - x^3 \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1 - x^3 + x^6.$$

INDICE

Multiplie chaque membre par $1+x^3$, qui est strictement positif : développe $(1-x^3)(1+x^3)$ et $(1-x^3+x^6)(1+x^3)$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [0,1]$. Alors $1 + x^3 \geq 1 > 0$.

Minoration. On a $(1-x^3)(1+x^3) = 1 - x^6 \leq 1$. En divisant par $1+x^3 > 0$:

$$1 - x^3 \leq \frac{1}{1+x^3}.$$

Majoration. On a $(1-x^3+x^6)(1+x^3) = 1 + x^9 \geq 1$. En divisant par $1+x^3 > 0$:

$$\frac{1}{1+x^3} \leq 1 - x^3 + x^6.$$

Conclusion. Pour tout $x \in [0,1]$, $1 - x^3 \leq \dfrac{1}{1+x^3} \leq 1 - x^3 + x^6$.

2.

En déduire que $\dfrac{3}{4} \leq I \leq \dfrac{25}{28}$.

INDICE

Les trois fonctions sont continues sur $[0,1]$ et $0 \leq 1$: la comparaison de deux intégrales (F07) permet d'intégrer l'encadrement de la question 1.

CORRIGÉ

Intégration de l'encadrement. Les fonctions $x \mapsto 1-x^3$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ et $x \mapsto 1-x^3+x^6$ sont continues sur $[0,1]$, et $0 \leq 1$. D'après la comparaison de deux intégrales (F07), appliquée deux fois :

$$\int_0^1 (1-x^3)\,\mathrm{d}x \leq I,$$
$$I \leq \int_0^1 (1-x^3+x^6)\,\mathrm{d}x.$$

Calcul des bornes.

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^3)\,\mathrm{d}x &= 1-\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (1-x^3+x^6)\,\mathrm{d}x\\ &= 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}\\ &= \frac{25}{28}.\end{aligned}$$

Conclusion. $\dfrac{3}{4} \leq I \leq \dfrac{25}{28}$.

3.

En déduire une valeur approchée de I et la précision de cette approximation.

INDICE

Prends le centre de l'encadrement ; l'erreur est au plus la moitié de son amplitude.

CORRIGÉ

L'encadrement s'écrit $\dfrac{21}{28} \leq I \leq \dfrac{25}{28}$. Il a pour amplitude $\dfrac{25}{28}-\dfrac{21}{28}=\dfrac{1}{7}$ et pour centre :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{21}{28}+\frac{25}{28}\right)=\frac{23}{28}.$$

Comme I est dans cet encadrement, sa distance au centre est au plus la moitié de l'amplitude :

$$\left|I-\frac{23}{28}\right| \leq \frac{1}{14}.$$

Conclusion. $\dfrac{23}{28} \approx 0{,}82$ est une valeur approchée de I à $\dfrac{1}{14}$ près.

4.

Quel encadrement de I donne l'inégalité de la moyenne, à partir des valeurs extrêmes de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $[0,1]$? Comparer sa précision avec celle de la question 2.

INDICE

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ est décroissante sur $[0,1]$: lis son minimum et son maximum aux bornes.

CORRIGÉ

Valeurs extrêmes. Sur $[0,1]$, $x \mapsto 1+x^3$ est croissante et strictement positive, donc $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ est décroissante. Pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^3} \leq 1.$$

Inégalité de la moyenne. D'après F09 (inégalité de la moyenne), avec $b-a=1$: $\dfrac{1}{2} \leq I \leq 1$.

Conclusion. L'inégalité de la moyenne donne $\dfrac{1}{2} \leq I \leq 1$, d'amplitude $\dfrac{1}{2}$, contre $\dfrac{1}{7}$ à la question 2 : l'encadrement par les polynômes est bien plus précis.

Exercice 2

L'inégalité de la moyenne en deux versions

1.

Étudier les variations de la fonction $k : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ sur $[1, 2]$.

INDICE

Dérive un quotient : le numérateur de $k'(x)$ se factorise par e^x.

CORRIGÉ

Dérivée. Sur $[1, 2]$, k est le quotient de deux fonctions dérivables, et x ne s'y annule pas : k y est dérivable. Pour tout $x \in [1, 2]$:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{e^x\, x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{e^x\,(x-1)}{x^2}. \end{aligned}$$

Signe. Pour $x \in [1, 2]$, $e^x > 0$, $x^2 > 0$ et $x - 1 \geq 0$, avec égalité seulement en 1. Donc $k'(x) > 0$ sur $]1, 2]$.

Conclusion. k est strictement croissante sur $[1, 2]$, de $k(1) = e$ à $k(2) = \dfrac{e^2}{2}$.

2.

En déduire que $e \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{e^2}{2}$.

INDICE

La question 1 donne un minimum et un maximum de k sur $[1, 2]$; applique l'inégalité de la moyenne (F09), avec $b - a = 1$.

CORRIGÉ

D'après la question 1, pour tout $x \in [1, 2]$:

$$e \leq k(x) \leq \frac{e^2}{2}.$$

La fonction k est continue sur $[1, 2]$ et $1 \leq 2$. D'après l'inégalité de la moyenne (F09) :

$$\begin{aligned} e\,(2-1) &\leq \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{e^2}{2}\,(2-1). \end{aligned}$$

Conclusion. $e \leq \displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{e^2}{2}$.

3.

Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos 3x}{x+2}\,\mathrm{d}x\right| \leq 1$.

INDICE

Majore $\left|\dfrac{\cos 3x}{x+2}\right|$ par une constante M sur $[0,2]$, avec $|\cos 3x| \leq 1$ et $x+2 \geq 2$.

CORRIGÉ

Majoration de l'intégrande. La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos 3x}{x+2}$ est continue sur $]-2,+\infty[$, qui contient $[0,2]$. Soit $x \in [0,2]$: $|\cos 3x| \leq 1$ et $x+2 \geq 2 > 0$, donc :

$$\left|\frac{\cos 3x}{x+2}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Inégalité de la moyenne. Comme $0 \leq 2$, F09 (inégalité de la moyenne, second point) donne :

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^2 \frac{\cos 3x}{x+2}\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \frac{1}{2} \times (2-0) = 1.\end{aligned}$$

Conclusion. $\left|\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos 3x}{x+2}\,\mathrm{d}x\right| \leq 1$.

Exercice 3

Deux intégrations par parties

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pose $u(x)=x^2+1$ et $v'(x)=e^{-x}$; la nouvelle intégrale contient $2x\,e^{-x}$: recommence avec $u(x)=2x$.

CORRIGÉ

Toutes les fonctions employées sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues. Notons T l'intégrale cherchée.

Première intégration par parties. Avec $u(x)=x^2+1$ et $v'(x)=e^{-x}$: $u'(x)=2x$ et $v(x)=-e^{-x}$. D'après F12 (intégration par parties) :

$$\begin{aligned} T &= \Big[-(x^2+1)\,e^{-x}\Big]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 2x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1-\frac{2}{e}+\int_0^1 2x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Seconde intégration par parties. Avec $u(x)=2x$ et $v'(x)=e^{-x}$: $u'(x)=2$ et $v(x)=-e^{-x}$. Donc :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 2x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-2x\,e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{e}+2-\frac{2}{e} \\ &= 2-\frac{4}{e}. \end{aligned}$$

Conclusion. $T = 1-\dfrac{2}{e}+2-\dfrac{4}{e} = 3-\dfrac{6}{e}$.

2.

On pose $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x$ et $M = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $K = e^{\pi} - 2M$.

INDICE

Pose $u(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x$. Au crochet, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\sin 0 = 0$.

CORRIGÉ

On pose $u(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x$, d'où $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v(x) = \sin x$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues. D'après F12 (intégration par parties) :

$$\begin{aligned} K &= \Big[e^{2x}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= e^{\pi} - 2M. \end{aligned}$$

Conclusion. $K = e^{\pi} - 2M$.

3.

Montrer que $M = 1 + 2K$, puis en déduire la valeur de K.

INDICE

Garde $u(x) = e^{2x}$, avec cette fois $v'(x) = \sin x$: l'intégrale K réapparaît. Remplace ensuite M dans la relation de la question 2.

CORRIGÉ

Relation entre M et K. Avec $u(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = \sin x$: $u'(x) = 2e^{2x}$ et $v(x) = -\cos x$, dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues. D'après F12 (intégration par parties) :

$$\begin{aligned} M &= \Big[-e^{2x}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= (0+1) + 2K \\ &= 1 + 2K. \end{aligned}$$

Valeur de K. En reportant dans $K = e^{\pi} - 2M$ (question 2) : $K = e^{\pi} - 2 - 4K$, soit $5K = e^{\pi} - 2$.

Conclusion. $M = 1 + 2K$ et $K = \dfrac{e^{\pi} - 2}{5}$.

Exercice 4

Changer de variable et transformer les bornes

1.

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$.

INDICE

Prends $J = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Rappelle-toi que $\tan'(t) = 1 + \tan^2 t$ et que $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.

CORRIGÉ

Continuité. L'intégrande $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Hypothèses du changement de variable. Soit $\varphi : t \mapsto \tan t$ sur $J = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, inclus dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Elle y est dérivable, $\varphi'(t) = 1 + \tan^2 t$ est continue, et $\varphi(J) \subset \mathbb{R}$. De plus $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Nouvelle intégrande. Soit $t \in J$:

$$\begin{aligned} f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) &= \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 t} \\ &= \cos^2 t. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après le changement de variable (F13), $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$.

2.

En déduire la valeur exacte de I.

INDICE

Linéarise : $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$.

CORRIGÉ

Pour tout réel t, $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$, fonction continue sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $t \mapsto \dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$.

3.

À l'aide du changement de variable $x = e^t$, calculer $L = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\,(1+\ln x)}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Les nouvelles bornes sont les réels t tels que $e^t = 1$ et $e^t = e^2$. Après simplification, écris $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$.

CORRIGÉ

Continuité. L'intégrande est continue sur $I' = \left]e^{-1}, +\infty\right[$, où $x > 0$ et $1 + \ln x > 0$; cet intervalle contient 1 et e^2.

Hypothèses du changement de variable. Soit $\varphi : t \mapsto e^t$ sur $J = [0, 2]$. Elle est dérivable, $\varphi'(t) = e^t$ est continue, $\varphi(J) = [1, e^2] \subset I'$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(2) = e^2$.

Nouvelle intégrande. Soit $t \in J$. Comme $\ln(e^t) = t$:

$$\begin{aligned} &\frac{\ln(e^t)}{e^t\,\big(1+\ln(e^t)\big)} \times e^t \\ &= \frac{t}{1+t} \\ &= 1 - \frac{1}{1+t}. \end{aligned}$$

Calcul. D'après le changement de variable (F13), et comme $1 + t > 0$ sur J :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \Big[t - \ln(1+t)\Big]_0^2 \\ &= 2 - \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. $L = 2 - \ln 3$.

Exercice 5

Linéariser avant d'intégrer

1.

Montrer que, pour tout réel x, $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$.

INDICE

Écris $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, puis linéarise $\sin^2 2x$.

CORRIGÉ

Soit x un réel. D'après la formule de duplication, $\sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2}$, donc :

$$\sin^2 x \cos^2 x = \frac{\sin^2 2x}{4}.$$

Or $\sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2}$.

Conclusion. Pour tout réel x, $\sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$.

2.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Intègre la forme linéarisée : une primitive de $x \mapsto \cos 4x$ est $x \mapsto \dfrac{\sin 4x}{4}$.

CORRIGÉ

La fonction $x \mapsto \dfrac{1 - \cos 4x}{8}$ est continue sur $\mathbb{R}$, de primitive $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(x - \dfrac{\sin 4x}{4}\right)$. D'après la question 1 et la linéarité (FO5) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{32}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\dfrac{\pi}{32}$.

3.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris $\cos^3 x = \cos x\,(1-\sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$: le second terme a la forme $u'u^2$ avec $u = \sin$.

CORRIGÉ

Linéarisation. Pour tout réel x, $\cos^3 x = \cos x - \cos x \sin^2 x$, fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Une primitive. Avec $u = \sin$, le terme $\cos x \sin^2 x$ vaut $u'(x)\,u(x)^2$, de primitive $x \mapsto \dfrac{\sin^3 x}{3}$. Une primitive de $\cos^3$ est donc $x \mapsto \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3}$.

Calcul. Comme $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin^3\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 6

Aire entre deux courbes qui se croisent

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1$ cm. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2x - 1$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1.

Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0, 3]$, et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

INDICE

Calcule $f(x) - g(x)$ puis factorise par x : le trinôme restant a une racine évidente.

CORRIGÉ

Factorisation. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} &f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x \\ &= x\left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= x\,(x-1)(x-3). \end{aligned}$$

Signe.

- Sur $[0, 1]$: $x \geq 0$, $x - 1 \leq 0$ et $x - 3 < 0$, donc $f(x) - g(x) \geq 0$.
- Sur $[1, 3]$: $x > 0$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 3 \leq 0$, donc $f(x) - g(x) \leq 0$.

Conclusion. $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0, 1]$ et au-dessous sur $[1, 3]$. Les courbes se coupent aux points d'abscisses 0, 1 et 3.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$.

INDICE

Coupe en 1. Sur $[0, 1]$, intègre $f - g$; sur $[1, 3]$, intègre $g - f$, d'après le signe trouvé.

CORRIGÉ

Découpage. Les fonctions f et g sont continues sur $[0, 3]$. D'après F15 (aire entre deux courbes), le signe trouvé à la question 1 et la relation de Chasles (F04) :

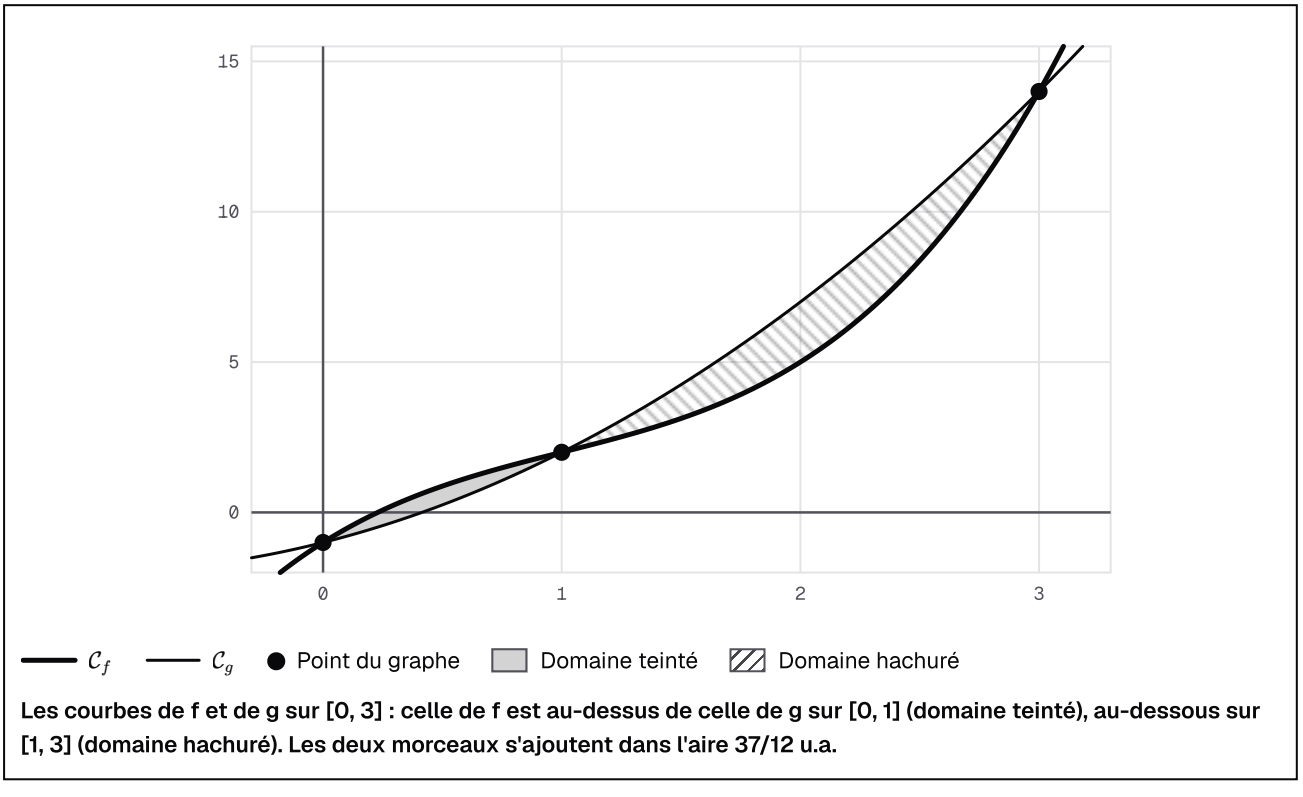
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_1^3 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Une primitive. Une primitive de $x \mapsto x^3 - 4x^2 + 3x$ est $P : x \mapsto \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2}$, avec $P(0) = 0$, $P(1) = \dfrac{5}{12}$ et $P(3) = -\dfrac{9}{4}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \big(P(1) - P(0)\big) \\ &\quad - \big(P(3) - P(1)\big) \\ &= \frac{5}{12} + \frac{9}{4} + \frac{5}{12} \\ &= \frac{37}{12}\ \text{u.a.}\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = \dfrac{37}{12}$ unités d'aire.



Les courbes de f et de g sur [0, 3] : celle de f est au-dessus de celle de g sur [0, 1] (domaine teinté), au-dessous sur [1, 3] (domaine hachuré). Les deux morceaux s'ajoutent dans l'aire 37/12 u.a.

3.

Donner $\mathcal{A}$ en cm^2.

INDICE

Une unité d'aire est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

CORRIGÉ

Une unité d'aire est l'aire d'un rectangle de côtés 2 cm et 1 cm : elle vaut $2 \times 1 = 2\ \mathrm{cm}^2$.

Conclusion. $\mathcal{A} = \dfrac{37}{12} \times 2 = \dfrac{37}{6}\ \mathrm{cm}^2$.

4.

Calculer $\displaystyle\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$. Pourquoi ce nombre n'est-il pas l'aire $\mathcal{A}$?

INDICE

Utilise la primitive P de la question 2, puis compare avec le découpage.

CORRIGÉ

Avec la primitive P de la question 2 :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= P(3) - P(0) \\ &= -\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

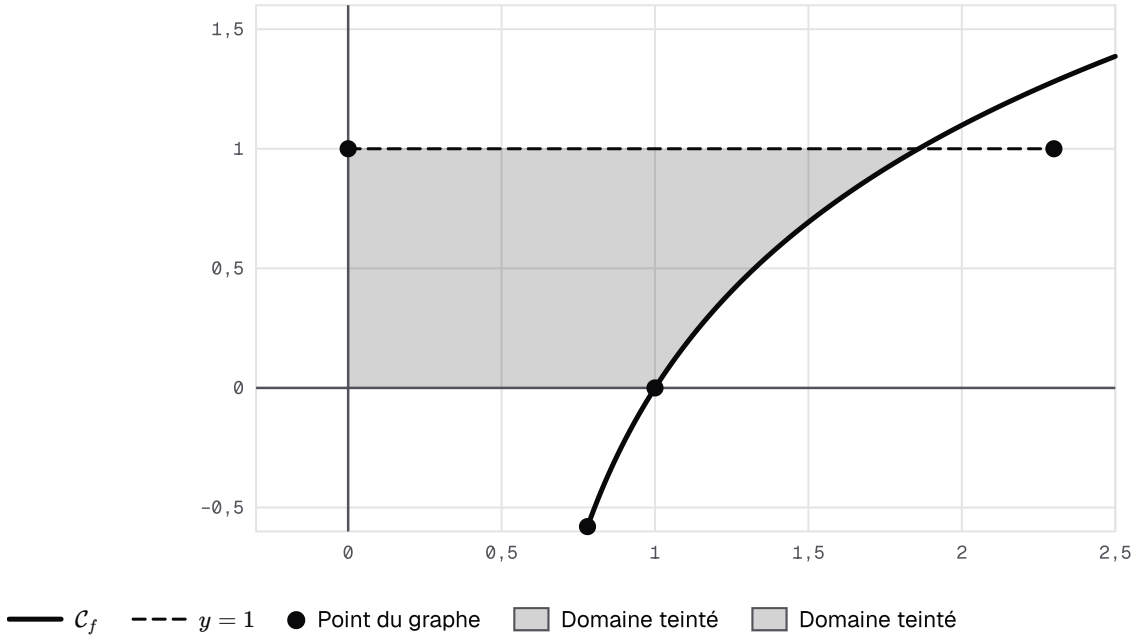
Ce nombre est négatif, alors qu'une aire est positive. Sur $[1, 3]$, la différence $f - g$ est négative : cette partie compte négativement dans l'intégrale.

Conclusion. L'intégrale vaut $-\dfrac{9}{4}$; ce n'est pas l'aire, qui est l'intégrale de $|f - g|$ et se calcule après l'étude du signe (W04).

Exercice 7

Un volume autour de l'axe des ordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \ln(2x-1)$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{D}$ le domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.



Le domaine D : entre la courbe de f : x ↦ ln(2x − 1), l'axe des ordonnées et les droites d'équations y = 0 et y = 1.

1.

Montrer que, pour tout $x > \frac{1}{2}$ et tout réel y : $y = \ln(2x-1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y + 1}{2}$. On note g la fonction $y \mapsto \frac{e^y + 1}{2}$.

INDICE

La fonction exponentielle et la fonction $\ln$ sont réciproques : $\ln A = y$ équivaut à $A = e^y$ pour $A > 0$.

CORRIGÉ

Équivalence. Soit $x > \frac{1}{2}$, de sorte que $2x - 1 > 0$, et soit y un réel. Comme $\ln$ et l'exponentielle sont des fonctions réciproques :

$$\begin{aligned} & y = \ln(2x-1) \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 1 = e^y \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{e^y + 1}{2}. \end{aligned}$$

Lecture sur la courbe. Pour tout réel y, $g(y) > \frac{1}{2}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc exactement l'ensemble des points $\big(g(y), y\big)$, pour y réel : elle a pour équation $x = g(y)$.

Conclusion. Pour tout $x > \frac{1}{2}$ et tout réel y, $y = \ln(2x-1) \Leftrightarrow x = \frac{e^y + 1}{2}$.

2.

Calculer le volume V du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des ordonnées.

INDICE

Applique F17 (volume autour de l'axe des ordonnées) avec $c = 0$ et $d = 1$; développe $\big(g(y)\big)^2 = \dfrac{e^{2y} + 2e^{y} + 1}{4}$ avant d'intégrer.

CORRIGÉ

Formule du volume. La fonction g est continue sur $[0, 1]$, et $\big(g(y)\big)^2 = \dfrac{e^{2y} + 2e^{y} + 1}{4}$ pour tout réel y. D'après F17 (volume de révolution autour de l'axe des ordonnées) :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \big(g(y)\big)^2 \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (e^{2y} + 2e^{y} + 1) \,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (e^{2y} + 2e^{y} + 1) \,\mathrm{d}y \\ &= \Big[\frac{e^{2y}}{2} + 2e^{y} + y\Big]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} + 2e + 1 - \frac{5}{2} \\ &= \frac{e^2 + 4e - 3}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion.

$$V = \frac{\pi\,(e^2 + 4e - 3)}{8}\ \text{u.v.}$$

3.

Montrer, sans calcul d'intégrale, que $V \leq \dfrac{\pi\,(e+1)^2}{4}$, et interpréter géométriquement ce majorant.

INDICE

La fonction g est croissante et positive sur $[0,1]$: majore $\big(g(y)\big)^2$ par $\big(g(1)\big)^2$.

CORRIGÉ

Majoration de l'intégrande. Sur $[0,1]$, g est croissante et $g(y) > 0$. Soit $y \in [0,1]$: $0 < g(y) \leq g(1) = \dfrac{e+1}{2}$, donc :

$$\big(g(y)\big)^2 \leq \frac{(e+1)^2}{4}.$$

Comparaison. Les deux membres sont continus sur $[0,1]$ et $0 \leq 1$. D'après la comparaison de deux intégrales (F07) :

$$\begin{aligned} V &\leq \int_0^1 \pi\,\frac{(e+1)^2}{4}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi\,(e+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $V \leq \dfrac{\pi\,(e+1)^2}{4}$. Ce majorant est le volume d'un cylindre de rayon $\dfrac{e+1}{2}$ et de hauteur 1, qui contient le solide.

Exercice 8

Le théorème de la moyenne au travail

1.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{8}{(2x+1)^2}$. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

INDICE

Une primitive de $x\mapsto\frac{8}{(2x+1)^2}$ est $x\mapsto-\frac{4}{2x+1}$: vérifie-le en dérivant.

CORRIGÉ

Une primitive. La fonction f est continue sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, qui contient $\left[0,\frac{3}{2}\right]$. Soit $F:x\mapsto-\frac{4}{2x+1}$ sur cet intervalle. Pour tout $x>-\frac{1}{2}$, $F'(x)=\frac{4\times2}{(2x+1)^2}=f(x)$.

Intégrale. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x&=\Big[-\frac{4}{2x+1}\Big]_0^{\frac{3}{2}}\\&=-1+4\\&=3.\end{aligned}$$

Valeur moyenne. D'après F10 (valeur moyenne) :

$$\mu=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2.$$

Conclusion. La valeur moyenne de f sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ est $\mu=2$.

2.

Justifier l'existence d'un réel $c \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ tel que $f(c) = \mu$, puis montrer que ce réel est unique et le calculer.

INDICE

L'existence vient du théorème de la moyenne (F11). Pour l'unicité, regarde le sens de variation de f sur le segment.

CORRIGÉ

Existence. La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{3}{2}\right]$: d'après le théorème de la moyenne (F11), il existe c dans ce segment tel que $f(c) = \mu = 2$.

Unicité. Sur ce segment, $x \mapsto 2x + 1$ est strictement positive et strictement croissante, donc f est strictement décroissante : l'équation $f(c) = 2$ y a au plus une solution.

Valeur. Soit $c \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. L'égalité $f(c) = 2$ équivaut à $(2c + 1)^2 = 4$, soit $2c + 1 = 2$, car $2c + 1 > 0$.

Conclusion. Le réel c existe, il est unique et $c = \frac{1}{2}$, qui est bien dans $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

3.

Soit h une fonction continue sur $[1, 4]$ telle que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x = 9$. Montrer que l'équation $h(x) = 3$ admet au moins une solution dans $[1, 4]$.

INDICE

Calcule la valeur moyenne de h sur $[1, 4]$, puis applique le théorème de la moyenne (F11).

CORRIGÉ

La fonction h est continue sur $[1, 4]$, avec $1 < 4$. D'après la définition de la valeur moyenne (F10) :

$$\mu = \frac{9}{4 - 1} = 3.$$

D'après le théorème de la moyenne (F11), il existe $c \in [1, 4]$ tel que $h(c) = 3$.

Conclusion. L'équation $h(x) = 3$ admet au moins une solution dans $[1, 4]$.