BURHAN

Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Application	10

Exercice 1

Quatre intégrales calculées avec une primitive

Pour chaque intégrale, commence par la phrase de continuité, puis donne une primitive et contrôle-la en dérivant.

1.

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_1^4 \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Écris $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ et $\dfrac{2}{x^2} = 2x^{-2}$: ce sont des puissances, dont tu connais les primitives sur $]0, +\infty[$.

2.

Calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Pour e^{ax}, divise par le coefficient a ; contrôle en dérivant. Pour la borne du haut, écris $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3$.

3.

Calculer $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

La fonction $\tan$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Cherche un intervalle où $\cos x \neq 0$ et qui contient les bornes.

4.

Calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{x^2 + 5} \, \mathrm{d}x$.

INDICE

Fais apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 5$, en écrivant $4x = 2 \times 2x$.

Exercice 2

Reconnaître une forme composée

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto x^2+x$ est $x \mapsto 2x+1$: l'intégrande a la forme $u'\,e^u$.

2.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Avec $u = \cos$, on a $u' = -\sin$: l'intégrande vaut $-u'\,u^2$.

3.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Avec $u(x) = x^2+1$, l'intégrande vaut $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$, et $-\dfrac{1}{u}$ a pour dérivée $\dfrac{u'}{u^2}$.

4.

La fonction $w : x \mapsto \sqrt{x^2+16}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $w'(x)$, puis en déduire $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

L'intégrale d'une dérivée continue est l'écart des valeurs de la fonction aux bornes (F03).

Exercice 3

Valeur absolue et fonction définie par morceaux

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le signe de $x-2$ change en 2. Coupe l'intégrale en 2 avec la relation de Chasles, et écris $|x-2|$ sans valeur absolue sur chaque morceau.

2.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $[-1,e]$, puis calculer $\displaystyle\int_{-1}^{e} g(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le seul point délicat pour la continuité est 1 : compare $g(1)$ avec la limite à droite. Pour le calcul, coupe en 1, où la formule change.

3.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=3$ et $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=-1$. Calculer $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris la relation de Chasles avec les trois réels 0, 2 et 5 ; pour la seconde intégrale, échange les bornes (F03).

Exercice 4

La linéarité au service du calcul

1.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[1,3]$ telles que $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ et $\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Calculer $\int_1^3 \big(2f(x) - 3g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Sépare en trois intégrales et sors les constantes (F05, linéarité). L'intégrale de la constante 1 se calcule avec F03 (intégrale d'une constante).

2.

On pose $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Calculer $J + K$ et $J - K$, puis en déduire J et K.

INDICE

Par linéarité, $J + K$ est l'intégrale de $\cos^2 x + \sin^2 x$, et $J - K$ celle de $\cos^2 x - \sin^2 x$. Ces deux expressions se simplifient.

3.

Un élève affirme : « l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales ». Tester cette affirmation avec $\int_0^1 x \times x\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Calcule séparément $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2$, puis compare.

Exercice 5

Signe et comparaison sans calcul

1.

Sans la calculer, donner le signe de $\displaystyle\int_2^1 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Les bornes sont dans l'ordre décroissant : échange-les d'abord (échange des bornes, F03), puis applique la positivité stricte (F06) sur $[1,2]$.

2.

On pose $A=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $B=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Comparer A et B sans les calculer.

INDICE

Compare x^4 et x^3 sur $[0,1]$: factorise x^4-x^3. Le dénominateur est strictement positif.

3.

Montrer que $0\leq A\leq \dfrac{1}{5}$.

INDICE

Pour majorer, remarque que $1+x^2\geq 1$, donc $\dfrac{x^4}{1+x^2}\leq x^4$ sur $[0,1]$.

Exercice 6

Deux valeurs moyennes

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-2x+1$. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[-1,2]$.

INDICE

Calcule l'intégrale de -1 à 2, puis divise par la longueur $2-(-1)=3$.

2.

Déterminer tous les réels c de $[-1,2]$ tels que $f(c)=\mu$. Le réel c du théorème de la moyenne est-il unique ?

INDICE

Résous l'équation du second degré $3c^2-2c+1=3$, puis vérifie que chaque solution est dans $[-1,2]$, en encadrant $\sqrt{7}$.

3.

Calculer la valeur moyenne de la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{2t+1}$ sur $[0,4]$.

INDICE

Cherche la forme $\dfrac{u'}{u}$: que vaut la dérivée de $2t+1$? Ajuste par un facteur constant.

Exercice 7

Une intégration par parties

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

INDICE

Pose pour u le facteur que la dérivation simplifie, et pour v' celui dont tu connais une primitive.

2.

Calculer $\displaystyle\int_1^e (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Un seul des deux facteurs devient plus simple quand on le dérive : lequel ? L'autre est v'.

3.

Dans la question 1, un élève choisit la fonction exponentielle pour u, et $x \mapsto 2x+1$ pour v'. Écrire l'intégrale qu'il obtient et expliquer pourquoi ce choix n'avance pas.

INDICE

Avec ce choix, $v(x) = x^2 + x$: regarde le degré du polynôme dans la nouvelle intégrale.

Exercice 8

Deux changements de variable donnés

1.

À l'aide du changement de variable $x = t^2$, calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}$.

INDICE

Pose $\varphi(t) = t^2$ avec $t \in [1,2]$: vérifie que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(2) = 4$, puis remplace $\mathrm{d}x$ par $2t\,\mathrm{d}t$.

2.

À l'aide du changement de variable $t = x - 1$, calculer $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Exprime x en fonction de t : $x = t + 1$. Les bornes deviennent 0 et 2, et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Exercice 9

Aire sous une courbe positive

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3}{x} + x - 1$, et $\mathcal{C}_h$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) > 0$.

INDICE

Réduis au même dénominateur : $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x}$. Étudie le signe du trinôme avec son discriminant.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

INDICE

La fonction est continue et positive sur $[1, 3]$: l'aire est l'intégrale de h (F14, intégrale et aire sous une courbe).

3.

Donner $\mathcal{A}$ en cm^2, puis une valeur approchée à l'aide de $\ln 3 \approx 1{,}10$.

INDICE

L'unité d'aire est l'aire du carré construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$, de côté 2 cm.

Exercice 10

Deux volumes autour de l'axe des abscisses

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.

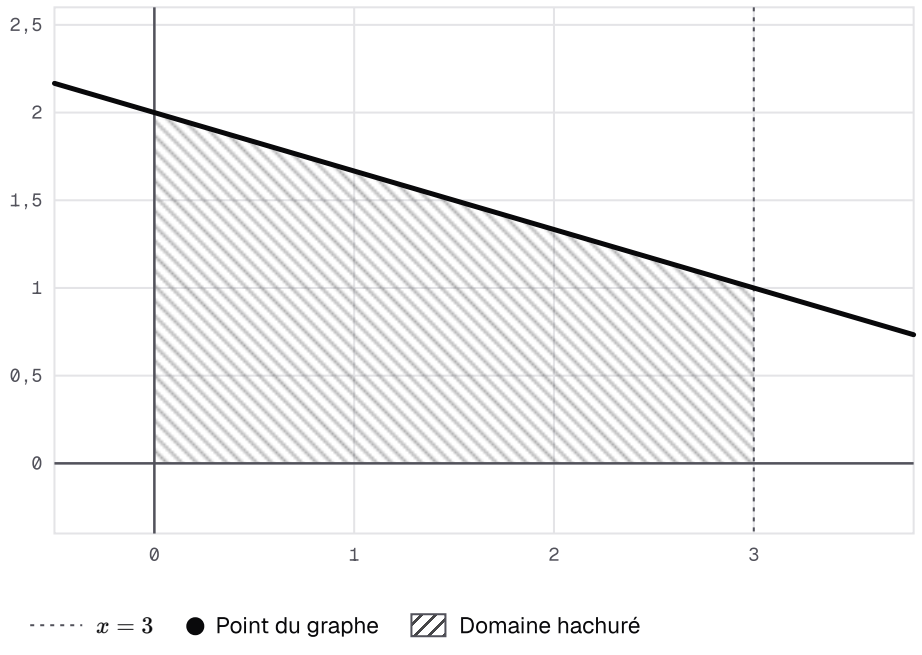
Soit $\mathcal{D}_1$ le domaine limité par la courbe de $x \mapsto \sqrt{2x+1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. Calculer le volume V_1 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_1$ autour de l'axe des abscisses.

INDICE

Le carré de $\sqrt{2x+1}$ vaut $2x+1$ sur $[0, 4]$: la formule du volume (F16) conduit à une intégrale de polynôme.

2.

Soit $\mathcal{D}_2$ le domaine limité par la droite d'équation $y = 2 - \dfrac{x}{3}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Calculer le volume V_2 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_2$ autour de l'axe des abscisses. Contrôler le résultat avec la formule du tronc de cône $\dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.



Le domaine D_2 : sous la droite d'équation y = 2 − x/3, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites x = 0 et x = 3.

INDICE

Développe $\left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^2$ avant d'intégrer. Le solide est un tronc de cône de hauteur 3, de rayons 2 et 1.

3.

L'unité de longueur du repère est maintenant 2 cm. Donner V_1 en cm^3.

INDICE

L'unité de volume est le volume d'un cube d'arête 2 cm.