BURHAN

Calcul intégral : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul intégral	Application	10

Exercice 1

Quatre intégrales calculées avec une primitive

Pour chaque intégrale, commence par la phrase de continuité, puis donne une primitive et contrôle-la en dérivant.

1.

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_1^4 \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{d}x$.

INDICE

Écris $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ et $\dfrac{2}{x^2} = 2x^{-2}$: ce sont des puissances, dont tu connais les primitives sur $]0, +\infty[$.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $x \mapsto 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, intervalle qui contient 1 et 4.

Une primitive. Soit $F : x \mapsto 2x\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$, dérivable sur $]0, +\infty[$. Contrôlons : pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sqrt{x} + \frac{2x}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} \\ &= 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

Calcul. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[2x\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right]_1^4 \\ &= \left(16 + \frac{1}{2}\right) - (2 + 2) \\ &= \frac{25}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_1 = \dfrac{25}{2}$.

2.

Calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Pour e^{ax}, divise par le coefficient a ; contrôle en dérivant. Pour la borne du haut, écris $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3$.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $x \mapsto e^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, qui contient 0 et $\ln 2$.

Une primitive. Soit $G : x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{3x}$. Pour tout réel x, $G'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3e^{3x} = e^{3x}$.

Calcul. On a $e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_2 = \dfrac{7}{3}$.

3.

Calculer $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$.

INDICE

La fonction $\tan$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Cherche un intervalle où $\cos x \neq 0$ et qui contient les bornes.

CORRIGÉ

Continuité. Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos x > 0$. La fonction $x \mapsto \sin x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ est donc continue sur cet intervalle, qui contient 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

Une primitive. Sur cet intervalle, $x \mapsto -\cos x$ a pour dérivée $x \mapsto \sin x$, et $\tan$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Une primitive est donc $x \mapsto -\cos x + \tan x$.

Calcul. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned} I_3 &= \Big[-\cos x + \tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - (-1) \\ &= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. $I_3 = 2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

Calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Fais apparaître la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2+5$, en écrivant $4x = 2 \times 2x$.

CORRIGÉ

Continuité. Pour tout réel x, $x^2+5 \geq 5 > 0$: la fonction $x \mapsto \dfrac{4x}{x^2+5}$ est continue sur $\mathbb{R}$, qui contient 0 et 2.

Une primitive. Posons $u(x) = x^2+5$ pour tout réel x. La fonction u est strictement positive et dérivable, avec $u'(x) = 2x$. L'intégrande s'écrit $2\,\dfrac{u'(x)}{u(x)}$: une primitive est $x \mapsto 2\ln\big(u(x)\big)$, d'après la dérivée de $\ln \circ u$.

Calcul. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned} I_4 &= \Big[2\ln(x^2+5)\Big]_0^2 \\ &= 2\ln 9 - 2\ln 5 \\ &= 2\ln\left(\frac{9}{5}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. $I_4 = 2\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)$.

Exercice 2

Reconnaître une forme composée

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

La dérivée de $x \mapsto x^2+x$ est $x \mapsto 2x+1$: l'intégrande a la forme $u'\,e^u$.

CORRIGÉ

L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $u(x) = x^2+x$ pour tout réel x : $u'(x) = 2x+1$. L'intégrande s'écrit $u'(x)\,e^{u(x)}$, dont une primitive est $x \mapsto e^{u(x)}$. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2x+1)\,e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[e^{x^2+x}\Big]_0^1\\ &= e^2 - 1.\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut e^2-1.

2.

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Avec $u = \cos$, on a $u' = -\sin$: l'intégrande vaut $-u'\,u^2$.

CORRIGÉ

L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $u(x) = \cos x$: $u'(x) = -\sin x$. Pour tout réel x, l'intégrande vaut $-u'(x)\,u(x)^2$, dont une primitive est $x \mapsto -\dfrac{\cos^3 x}{3}$.

Comme $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, la définition de l'intégrale (F02) donne :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[-\frac{\cos^3 x}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= -\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\\ &= \frac{7}{24}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\dfrac{7}{24}$.

3.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Avec $u(x)=x^2+1$, l'intégrande vaut $\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)^2}$, et $-\frac{1}{u}$ a pour dérivée $\frac{u'}{u^2}$.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $x^2+1>0$: l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $u(x)=x^2+1$: l'intégrande vaut $\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)^2}$, dont une primitive est $x\mapsto -\frac{1}{2(x^2+1)}$. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\Big[-\frac{1}{2(x^2+1)}\Big]_0^1\\&=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\frac{1}{4}$.

4.

La fonction $w:x\mapsto\sqrt{x^2+16}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $w'(x)$, puis en déduire $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

L'intégrale d'une dérivée continue est l'écart des valeurs de la fonction aux bornes (F03).

CORRIGÉ

Dérivée de w. Pour tout réel x, $x^2+16>0$ et, d'après la dérivée de $\sqrt{u}$:

$$\begin{aligned}w'(x)&=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\\&=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}.\end{aligned}$$

Intégrale. La fonction w' est continue sur $\mathbb{R}$. D'après F03 (intégrale d'une dérivée continue) :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+16}}\\&=w(3)-w(0)\\&=\sqrt{25}-\sqrt{16}\\&=1.\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut 1.

Exercice 3

Valeur absolue et fonction définie par morceaux

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^5 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le signe de $x-2$ change en 2. Coupe l'intégrale en 2 avec la relation de Chasles, et écris $|x-2|$ sans valeur absolue sur chaque morceau.

CORRIGÉ

Sans valeur absolue. La fonction $x \mapsto |x-2|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour $x \in [0,2]$, $|x-2| = 2-x$.
- Pour $x \in [2,5]$, $|x-2| = x-2$.

Calcul. D'après la relation de Chasles (F04) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^5 |x-2|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_2^5 (x-2)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[2x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 \\
&\quad + \Big[\frac{x^2}{2} - 2x\Big]_2^5 \\
&= 2 + \frac{9}{2} \\
&= \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\dfrac{13}{2}$.

2.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que g est continue sur $[-1, e]$, puis calculer $\displaystyle\int_{-1}^{e} g(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Le seul point délicat pour la continuité est 1 : compare $g(1)$ avec la limite à droite. Pour le calcul, coupe en 1, où la formule change.

CORRIGÉ

Continuité. Sur $]-\infty, 1[$, g coïncide avec $x \mapsto x + 1$; sur $]1, +\infty[$, avec $x \mapsto \dfrac{2}{x}$. Ces fonctions sont continues. En 1 :

- $g(1) = 1 + 1 = 2$, et g est continue à gauche en 1, puisque $g(x) = x + 1$ pour $x \leq 1$;
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x} = 2 = g(1)$: g est continue à droite en 1.

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-1, e]$.

Calcul. Sur $[-1, 1]$, $g(x) = x + 1$. Sur $[1, e]$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$, y compris en 1. D'après la relation de Chasles (F04) :

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{e} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (x + 1)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{1}^{e} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} \\ &\quad + \Big[2\ln x\Big]_{1}^{e} \\ &= 2 + 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion. g est continue sur $[-1, e]$ et $\displaystyle\int_{-1}^{e} g(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

3.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ et $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$. Calculer $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Écris la relation de Chasles avec les trois réels 0, 2 et 5 ; pour la seconde intégrale, échange les bornes (F03).

CORRIGÉ

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, qui contient 0, 2 et 5. D'après la relation de Chasles (F04) :

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x &= -1 - 3 \\ &= -4.\end{aligned}$$

D'après F03 (échange des bornes), échanger les bornes change le signe : $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Conclusion. $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -4$ et $\displaystyle\int_5^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.

Exercice 4

La linéarité au service du calcul

1.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[1,3]$ telles que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ et $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -2$. Calculer $\displaystyle\int_1^3 \big(2f(x) - 3g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Sépare en trois intégrales et sors les constantes (F05, linéarité). L'intégrale de la constante 1 se calcule avec F03 (intégrale d'une constante).

CORRIGÉ

Les fonctions f, g et la constante 1 sont continues sur $[1,3]$. Notons S l'intégrale cherchée. D'après la linéarité (F05), puis F03 pour la constante ($\displaystyle\int_1^3 1\,\mathrm{d}x = 3-1$) :

$$\begin{aligned} S &= 2\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad - 3\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_1^3 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\times 4 - 3\times(-2) + 2 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_1^3 \big(2f(x) - 3g(x) + 1\big)\,\mathrm{d}x = 16.$

2.

On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$. Calculer $J + K$ et $J - K$, puis en déduire J et K.

INDICE

Par linéarité, $J + K$ est l'intégrale de $\cos^2 x + \sin^2 x$, et $J - K$ celle de $\cos^2 x - \sin^2 x$. Ces deux expressions se simplifient.

CORRIGÉ

Les fonctions $\cos^2$ et $\sin^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Par linéarité (F05), et comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ pour tout réel x :

$$\begin{aligned} J + K &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J - K &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

En additionnant, puis en soustrayant ces deux égalités, et en divisant par 2 :

$$J = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8},$$

$$K = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Conclusion. $J + K = \dfrac{\pi}{3}$, $J - K = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, donc $J = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ et $K = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

3.

Un élève affirme : « l'intégrale d'un produit est le produit des intégrales ». Tester cette affirmation avec $\displaystyle\int_0^1 x \times x \,\mathrm{d}x$.

INDICE

Calcule séparément $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\left(\int_0^1 x \,\mathrm{d}x\right)^2$, puis compare.

CORRIGÉ

Les fonctions en jeu sont continues sur $\mathbb{R}$.

D'une part, $\displaystyle\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, dont le carré vaut $\dfrac{1}{4}$.

Conclusion. Comme $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{1}{4}$, l'affirmation est fausse : l'intégrale d'un produit n'est pas le produit des intégrales (W02). La linéarité ne porte que sur les sommes et les facteurs constants.

Exercice 5

Signe et comparaison sans calcul

1.

Sans la calculer, donner le signe de $\displaystyle\int_2^1 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Les bornes sont dans l'ordre décroissant : échange-les d'abord (échange des bornes, F03), puis applique la positivité stricte (F06) sur $[1,2]$.

CORRIGÉ

Échange des bornes. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+3}$ est continue sur $[-3,+\infty[$, qui contient 1 et 2. D'après F03 (échange des bornes) :

$$\begin{aligned}&\int_2^1 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_1^2 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Positivité stricte. On a $1 < 2$ et, pour tout $x \in [1,2]$, $\sqrt{x+3} \geq 2 > 0$. D'après la positivité de l'intégrale (F06, second point), $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x > 0$.

Conclusion. $\displaystyle\int_2^1 \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$ est strictement négative.

2.

On pose $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Comparer A et B sans les calculer.

INDICE

Compare x^4 et x^3 sur $[0,1]$: factorise $x^4 - x^3$. Le dénominateur est strictement positif.

CORRIGÉ

Pour tout réel x, $1+x^2 > 0$: les deux intégrandes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in [0,1]$. On a $x^4 - x^3 = x^3(x-1) \leq 0$, car $x^3 \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$. En divisant par $1+x^2 > 0$:

$$\frac{x^4}{1+x^2} \leq \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Conclusion. Comme $0 \leq 1$, la comparaison de deux intégrales (F07) donne $A \leq B$.

3.

Montrer que $0 \leq A \leq \dfrac{1}{5}$.

INDICE

Pour majorer, remarque que $1+x^2 \geq 1$, donc $\dfrac{x^4}{1+x^2} \leq x^4$ sur $[0,1]$.

CORRIGÉ

Soit $x \in [0,1]$. On a $\dfrac{x^4}{1+x^2} \geq 0$. De plus $1+x^2 \geq 1$, donc $\dfrac{x^4}{1+x^2} \leq x^4$.

Ces fonctions sont continues sur $[0,1]$, et $0 \leq 1$. D'après la positivité (F06) et la comparaison (F07) :

$$\begin{aligned} 0 \leq A &\leq \int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $0 \leq A \leq \dfrac{1}{5}$.

Exercice 6

Deux valeurs moyennes

1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[-1, 2]$.

INDICE

Calcule l'intégrale de -1 à 2, puis divise par la longueur $2 - (-1) = 3$.

CORRIGÉ

Intégrale. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et $-1 < 2$. Une primitive de f est $x \mapsto x^3 - x^2 + x$.

D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x^3 - x^2 + x\Big]_{-1}^{2} \\ &= 6 - (-3) \\ &= 9.\end{aligned}$$

Valeur moyenne. D'après la définition de la valeur moyenne (F10) :

$$\mu = \frac{1}{2 - (-1)} \times 9 = 3.$$

Conclusion. La valeur moyenne de f sur $[-1, 2]$ est $\mu = 3$.

2.

Déterminer tous les réels c de $[-1,2]$ tels que $f(c)=\mu$. Le réel c du théorème de la moyenne est-il unique ?

INDICE

Résous l'équation du second degré $3c^2-2c+1=3$, puis vérifie que chaque solution est dans $[-1,2]$, en encadrant $\sqrt{7}$.

CORRIGÉ

Équation. Soit $c\in[-1,2]$. L'égalité $f(c)=3$ s'écrit $3c^2-2c-2=0$. Le discriminant vaut $4+24=28$, et $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$:

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\pm 2\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}. \end{aligned}$$

Appartenance à $[-1,2]$. Comme $2<\sqrt{7}<3$:

- $\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\in\left]1,\dfrac{4}{3}\right[$;
- $\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\in\left]-\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right[$.

Ces deux réels sont dans $[-1,2]$.

Conclusion. Deux réels conviennent : $c=\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}$ et $c=\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}$. Le réel c n'est donc pas unique : le théorème de la moyenne (F11) garantit une existence, pas une unicité.

3.

Calculer la valeur moyenne de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{2t+1}$ sur $[0,4]$.

INDICE

Cherche la forme $\dfrac{u'}{u}$: que vaut la dérivée de $2t+1$? Ajuste par un facteur constant.

CORRIGÉ

Continuité. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{2t+1}$ est continue sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$, qui contient $[0,4]$.

Intégrale. Sur cet intervalle, $2t+1>0$: une primitive est $t\mapsto\dfrac{1}{2}\ln(2t+1)$. D'après la définition de l'intégrale (F02) :

$$\begin{aligned} &\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(2t+1)\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{2}\ln 9 \\ &= \ln 3. \end{aligned}$$

Conclusion. D'après la définition de la valeur moyenne (F10), elle vaut $\dfrac{1}{4-0}\times\ln 3=\dfrac{\ln 3}{4}$.

Exercice 7

Une intégration par parties

1.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,\mathrm{d}x$ par une intégration par parties.

INDICE

Pose pour u le facteur que la dérivation simplifie, et pour v' celui dont tu connais une primitive.

CORRIGÉ

On pose, pour tout réel x, $u(x)=2x+1$ et $v'(x)=e^x$, d'où $u'(x)=2$ et $v(x)=e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées continues. D'après l'intégration par parties (F12) :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,\mathrm{d}x &= \Big[(2x+1)\,e^x\Big]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 2e^x\,\mathrm{d}x \\ &= (3e-1)-2(e-1) \\ &= e+1.\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,e^x\,\mathrm{d}x = e+1.$

2.

Calculer $\displaystyle\int_1^e (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Un seul des deux facteurs devient plus simple quand on le dérive : lequel ? L'autre est v'.

CORRIGÉ

Choix des facteurs. On travaille sur $]0,+\infty[$, qui contient 1 et e. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x+1$, d'où $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$. Ces fonctions sont dérivables sur $]0,+\infty[$, de dérivées continues.

Intégration par parties. Pour $x>0$, $v(x)\,u'(x)=\dfrac{x}{2}+1$. D'après F12 (intégration par parties) :

$$\begin{aligned}
&\int_1^e (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x\\
&=\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^e\\
&\quad-\int_1^e \left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{e^2}{2}+e\\
&\quad-\left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e\\
&=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{5}{4}\\
&=\frac{e^2+5}{4}.
\end{aligned}$$

Conclusion. $\displaystyle\int_1^e (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{e^2+5}{4}$.

3.

Dans la question 1, un élève choisit la fonction exponentielle pour u, et $x \mapsto 2x+1$ pour v'. Écrire l'intégrale qu'il obtient et expliquer pourquoi ce choix n'avance pas.

INDICE

Avec ce choix, $v(x) = x^2 + x$: regarde le degré du polynôme dans la nouvelle intégrale.

CORRIGÉ

Avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x^2 + x$, la formule d'intégration par parties (F12) donne :

$$\begin{aligned}&\int_0^1 (2x+1)\, e^x \,\mathrm{d}x \\ &= \Big[(x^2+x)\, e^x\Big]_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 (x^2+x)\, e^x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

L'égalité est juste, mais la nouvelle intégrale contient un polynôme de degré 2 au lieu de 1 : elle est plus difficile que celle de départ.

Conclusion. Ce choix n'avance pas. Il faut prendre pour u le facteur dont la dérivée est plus simple, ici $x \mapsto 2x+1$ (W05).

Exercice 8

Deux changements de variable donnés

1.

À l'aide du changement de variable $x = t^2$, calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}$.

INDICE

Pose $\varphi(t) = t^2$ avec $t \in [1,2]$: vérifie que $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(2) = 4$, puis remplace $\mathrm{d}x$ par $2t\,\mathrm{d}t$.

CORRIGÉ

Continuité. L'intégrande $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})}$ est continue sur $I =]0, +\infty[$.

Hypothèses du changement de variable. Soit $\varphi : t \mapsto t^2$ sur $J = [1,2]$. Elle est dérivable, $\varphi'(t) = 2t$ est continue, et $\varphi(J) = [1,4] \subset I$. De plus $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(2) = 4$.

Nouvelle intégrande. Soit $t \in J$. Comme $t > 0$, $\sqrt{t^2} = t$, donc :

$$\begin{aligned} & f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \\ &= \frac{2t}{t\,(2+t)} \\ &= \frac{2}{2+t}. \end{aligned}$$

Calcul. D'après le changement de variable (F13), et comme $2 + t > 0$ sur J :

$$\begin{aligned} & \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{2}{2+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[2\ln(2+t)\Big]_1^2 \\ &= 2\ln 4 - 2\ln 3 \\ &= 2\ln\left(\frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $2\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

2.

À l'aide du changement de variable $t = x - 1$, calculer $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$.

INDICE

Exprime x en fonction de t : $x = t + 1$. Les bornes deviennent 0 et 2, et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

CORRIGÉ

Continuité. L'intégrande $x \mapsto x\sqrt{x-1}$ est continue sur $I = [1, +\infty[$.

Hypothèses du changement de variable. On pose $x = \varphi(t) = t + 1$ avec $t \in J = [0, 2]$. La fonction φ est dérivable, $\varphi'(t) = 1$ est continue, $\varphi(J) = [1, 3] \subset I$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(2) = 3$.

Calcul. Pour $t \in J$, $(t+1)\sqrt{t} = t\sqrt{t} + \sqrt{t}$, qui admet pour primitive sur J la fonction $P : t \mapsto \dfrac{2}{5}t^2\sqrt{t} + \dfrac{2}{3}t\sqrt{t}$. D'après le changement de variable (F13) :

$$\begin{aligned}
&\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (t+1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= P(2) - P(0) \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{44\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Conclusion. L'intégrale vaut $\dfrac{44\sqrt{2}}{15}$.

Exercice 9

Aire sous une courbe positive

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{3}{x} + x - 1$, et $\mathcal{C}_h$ sa courbe.

1.

Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) > 0$.

INDICE

Réduis au même dénominateur : $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x}$. Étudie le signe du trinôme avec son discriminant.

CORRIGÉ

Soit $x > 0$. En réduisant au même dénominateur :

$$h(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x}.$$

Le trinôme $x^2 - x + 3$ a pour discriminant $1 - 12 = -11 < 0$ et son coefficient dominant vaut $1 > 0$: il est strictement positif pour tout réel. Le dénominateur x est strictement positif.

Conclusion. Pour tout $x > 0$, $h(x) > 0$.

2.

Calculer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par $\mathcal{C}_h$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

INDICE

La fonction est continue et positive sur $[1, 3]$: l'aire est l'intégrale de h (F14, intégrale et aire sous une courbe).

CORRIGÉ

La fonction h est continue sur $]0, +\infty[$ et positive sur $[1, 3]$ (question 1), avec $1 < 3$. Une primitive de h est $x \mapsto 3\ln x + \dfrac{x^2}{2} - x$. D'après F14 (intégrale et aire sous une courbe) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^3 h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[3\ln x + \frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 \\ &= 3\ln 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 3\ln 3 + 2 \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Conclusion. $\mathcal{A} = 3\ln 3 + 2$ unités d'aire.

3.

Donner $\mathcal{A}$ en cm^2, puis une valeur approchée à l'aide de $\ln 3 \approx 1{,}10$.

INDICE

L'unité d'aire est l'aire du carré construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$, de côté 2 cm.

CORRIGÉ

Une unité d'aire est l'aire d'un carré de côté 2 cm : elle vaut $2 \times 2 = 4\ \mathrm{cm}^2$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4(3\ln 3 + 2)\\ &= (12\ln 3 + 8)\ \mathrm{cm}^2.\end{aligned}$$

Conclusion. Avec $\ln 3 \approx 1{,}10$, on obtient $\mathcal{A} \approx 13{,}2 + 8 = 21{,}2\ \mathrm{cm}^2$.

Exercice 10

Deux volumes autour de l'axe des abscisses

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.

Soit $\mathcal{D}_1$ le domaine limité par la courbe de $x \mapsto \sqrt{2x+1}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. Calculer le volume V_1 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_1$ autour de l'axe des abscisses.

INDICE

Le carré de $\sqrt{2x+1}$ vaut $2x+1$ sur $[0,4]$: la formule du volume (F16) conduit à une intégrale de polynôme.

CORRIGÉ

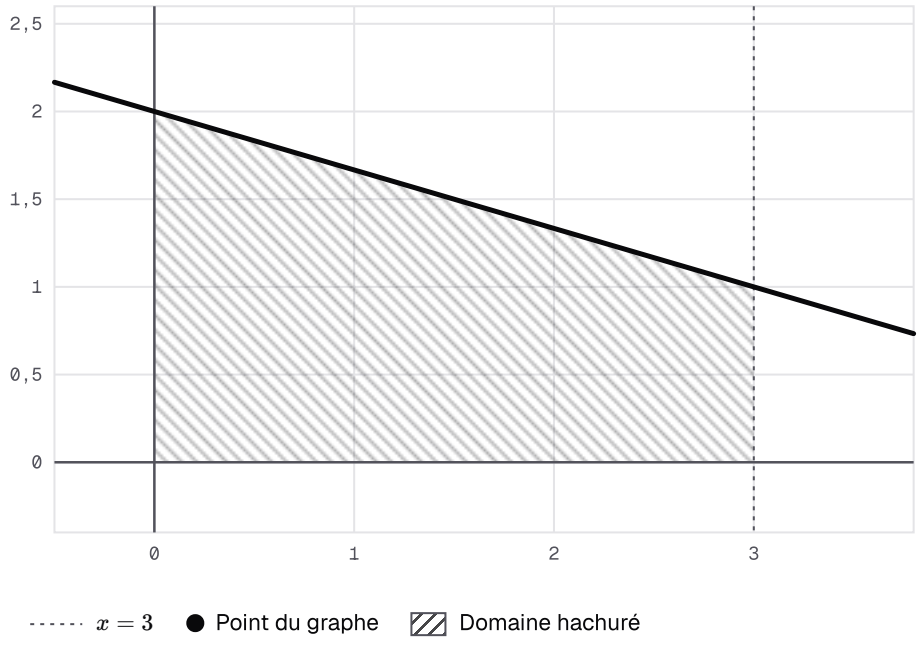
La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est continue sur $[0,4]$, et son carré y vaut $2x+1$. D'après F16 (volume d'un solide de révolution) :

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^4 \pi\,(2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\Big[x^2 + x\Big]_0^4 \\ &= 20\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Conclusion. $V_1 = 20\pi$ unités de volume.

2.

Soit $\mathcal{D}_2$ le domaine limité par la droite d'équation $y = 2 - \dfrac{x}{3}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 3$. Calculer le volume V_2 du solide engendré par la rotation de $\mathcal{D}_2$ autour de l'axe des abscisses. Contrôler le résultat avec la formule du tronc de cône $\dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.



Le domaine D_2 : sous la droite d'équation y = 2 − x/3, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites x = 0 et x = 3.

INDICE

Développe $\left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^2$ avant d'intégrer. Le solide est un tronc de cône de hauteur 3, de rayons 2 et 1.

CORRIGÉ

Volume. La fonction $x \mapsto 2 - \dfrac{x}{3}$ est continue sur $[0, 3]$. D'après F16 (volume d'un solide de révolution) :

$$V_2 = \pi \int_0^3 \left(2 - \frac{x}{3}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Pour tout réel x, $\left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^2 = 4 - \dfrac{4x}{3} + \dfrac{x^2}{9}$, qui admet pour primitive $P : x \mapsto 4x - \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{x^3}{27}$. Donc :

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\big(P(3) - P(0)\big) \\ &= \pi\,(12 - 6 + 1) \\ &= 7\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Contrôle. Les rayons des bases valent $R = 2$ (en $x = 0$) et $r = 1$ (en $x = 3$), la hauteur $h = 3$. La formule du tronc de cône donne :

$$\begin{aligned} &\frac{3\pi}{3}\,(4 + 2 + 1) \\ &= 7\pi. \end{aligned}$$

Conclusion. $V_2 = 7\pi$ unités de volume, en accord avec la formule du tronc de cône.

3.

L'unité de longueur du repère est maintenant 2 cm. Donner V_1 en cm^3.

INDICE

L'unité de volume est le volume d'un cube d'arête 2 cm.

CORRIGÉ

Une unité de volume est le volume d'un cube d'arête 2 cm : elle vaut $2^3 = 8\ \mathrm{cm}^3$.

Conclusion. $V_1 = 20\pi \times 8 = 160\pi\ \mathrm{cm}^3$.