BURHAN

Calcul intégral

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-integral/cours

Chapitre	Semestre
Calcul intégral	Semestre 2

Mesurer ce qui s'accumule

Une citerne se remplit par un robinet dont le débit varie. À l'instant t, en minutes, le débit vaut $r(t) = 3t^2 + 2$ litres par minute.

Note $Q(t)$ le volume d'eau dans la citerne à l'instant t. La vitesse de remplissage est la dérivée de ce volume : $Q'(t) = r(t)$. Autrement dit, Q est une **primitive** de r. On ne connaît pas le volume de départ.

Devine : L'eau versée en deux minutes

D'après toi, combien de litres entrent dans la citerne entre la minute 1 et la minute 3 ?

A. 24 litres, soit $r(3) - r(1)$.

Faux.

$r(3) - r(1)$ mesure la variation du **débit**, pas le volume versé.

B. 28 litres, soit $2 \times r(2)$.

Faux.

Le débit n'est pas constant : prendre sa valeur au milieu ne donne qu'une approximation.

C. 30 litres, soit $Q(3) - Q(1)$.

Juste.

Juste : le volume versé est l'écart des valeurs du volume, qui est une primitive du débit.

D. Impossible à dire sans le volume de départ.

Faux.

Le volume de départ s'ajoute à $Q(3)$ et à $Q(1)$: il disparaît dans la différence.

Correction

La fonction $t \mapsto t^3 + 2t$ a pour dérivée $t \mapsto 3t^2 + 2$: c'est une primitive de r sur $[0, +\infty[$.

Il existe donc un réel k, le volume de départ, tel que $Q(t) = t^3 + 2t + k$ pour tout $t \geq 0$. Le volume versé vaut :

$$\begin{aligned} &Q(3) - Q(1) \\ &= (27 + 6 + k) - (1 + 2 + k) \\ &= 30. \end{aligned}$$

La constante k a disparu : seul compte l'écart entre deux valeurs d'une primitive.

Cet écart entre deux valeurs d'une primitive porte un nom : l'**intégrale**.

Dans ce chapitre, tu vas la définir, puis **démontrer** ses propriétés une à une. Tu sauras la calculer, l'encadrer, et l'utiliser pour mesurer des aires et des volumes.

Seule l'existence des primitives reste admise parmi les propriétés de calcul. Pour les aires et les volumes, une partie du raisonnement sera admise, et le cours te dira laquelle.

L'intégrale, écart de deux valeurs d'une primitive

Deux primitives, un même écart

Petit rappel. Le chapitre des primitives t'a laissé deux outils.

- Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle : ce théorème y est admis.
- Sur un **intervalle**, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante : ce fait y est démontré.

Garde ces deux faits en tête : tout le chapitre repose dessus.

Devine : Deux primitives de la même fonction

Les fonctions $x \mapsto x^4$ et $x \mapsto x^4 - 7$ sont deux primitives de $x \mapsto 4x^3$ sur $\mathbb{R}$. D'après toi, que donnent leurs écarts entre -1 et 2 ?

A. 15 pour les deux fonctions.
Juste.
Juste : $16 - 1 = 15$ et $(16 - 7) - (1 - 7) = 15$.

B. 15 pour la première, 8 pour la seconde.
Faux.
Le -7 apparaît deux fois, en 2 et en -1 : il se simplifie.

C. 15 pour la première, 1 pour la seconde.
Faux.
Tu as retranché deux fois 7 ; or $(16 - 7) - (1 - 7) = 9 + 6$.

D. On ne peut pas comparer sans connaître la constante.
Faux.
La constante est connue ici, et de toute façon elle disparaît dans la différence.

Correction
Pour la première : $2^4 - (-1)^4 = 16 - 1 = 15$.

Pour la seconde : $(16 - 7) - (1 - 7) = 9 + 6 = 15$.

Les deux écarts sont égaux : la constante -7 s'élimine.

Un écart qui ne dépend que de f

Ce que tu viens d'observer est général. **Pourquoi est-ce vrai ?** Deux primitives sur un intervalle diffèrent d'une constante k. Dans l'écart entre b et a, ce k s'ajoute puis se retranche.

Propriété : L'écart F(b) – F(a) ne dépend pas de la primitive choisie

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$.

Démonstration

Étape 1. La fonction f est continue sur l'intervalle I : elle y admet des primitives (existence admise au chapitre des primitives). Soit F et G deux d'entre elles.

Étape 2. Comme I est un **intervalle**, deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante (ensemble des primitives, chapitre des primitives) : il existe un réel k tel que, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$.

Étape 3. En particulier, $G(b) - G(a) = \big(F(b) + k\big) - \big(F(a) + k\big) = F(b) - F(a)$.

Remarque : ce qui reste admis

La preuve utilise l'existence des primitives d'une fonction continue sur un intervalle, admise au chapitre des primitives. Ce chapitre ne la démontre pas.

L'intégrale va être définie **à partir** d'une primitive : s'en servir pour prouver l'existence des primitives serait un raisonnement circulaire.

La définition et ses premières conséquences

Définition : Intégrale d'une fonction continue de a à b

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et F une primitive de f sur I.

Le réel $F(b) - F(a)$ s'appelle **l'intégrale de a à b de f**. On le note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'on écrit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

D'après F01, ce réel ne dépend pas de la primitive F choisie. La lettre x est **muette** : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple : une première intégrale

Énoncé. Calcule $I = \displaystyle\int_1^3 (3x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x$.

Existence. La fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, qui contient 1 et 3.

Primitive. La fonction $x \mapsto x^3 - x^2$ convient : sa dérivée est $x \mapsto 3x^2 - 2x$.

Calcul.

$$\begin{aligned} I &= \Big[x^3 - x^2\Big]_1^3 \\ &= (27 - 9) - (1 - 1) \\ &= 18. \end{aligned}$$

Trois conséquences se lisent directement sur le crochet. **Pourquoi est-ce vrai ?** Chacune revient à choisir une primitive bien connue : une primitive quelconque, celle d'une constante, ou la fonction elle-même quand on intègre sa dérivée.

Propriété : Premières conséquences de la définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Pour tout réel c : $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,(b - a)$.
- Si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I : $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. D'après F02, $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big)$.

Étape 2. La fonction $x \mapsto c\,x$ est une primitive sur I de la fonction constante $x \mapsto c$. D'après F02, $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c\,b - c\,a = c\,(b - a)$.

Étape 3. Si f est dérivable sur I, la fonction f est une primitive de f' sur I. Comme f' est continue sur I, F02 s'applique à f' et donne $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un seul fait porte tout : sur un **intervalle**, deux primitives diffèrent d'une constante, qui s'élimine dans $F(b) - F(a)$.

Une fois l'intégrale définie par ce crochet, chaque conséquence se démontre en choisissant la bonne primitive.

Retiens le réflexe : pour prouver une égalité d'intégrales, écris les crochets.

Le rôle de l'intervalle

Vérifie : L'hypothèse décisive

Dans la preuve de l'indépendance vis-à-vis de la primitive, à quoi sert le fait que I soit un **intervalle** ?

A. À garantir que f est continue sur I.

Faux.

La continuité est une hypothèse de l'énoncé : on ne la déduit pas.

B. À ranger les deux bornes dans l'ordre : $a \leq b$.

Faux.

L'énoncé ne suppose aucun ordre entre a et b.

C. À affirmer que deux primitives diffèrent d'une constante.

Juste.

Juste : ce résultat du chapitre des primitives n'est vrai que sur un intervalle.

D. À calculer la différence $F(b) - F(a)$.

Faux.

Une soustraction de deux réels ne demande aucune hypothèse.

Correction

L'étape 2 de la preuve dit : sur un intervalle, deux primitives de f diffèrent d'une constante.

Sur une réunion de deux intervalles, deux primitives peuvent différer de constantes différentes sur chaque morceau : l'écart ne serait plus le même.

Exemple **: bornes échangées**

Énoncé. Calcule $J = \displaystyle\int_4^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Existence. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, qui contient 1 et 4. Sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y est continue.

Calcul. C'est l'intégrale d'une dérivée continue : $J = \sqrt{1} - \sqrt{4} = -1$.

Lecture. La fonction est positive, mais $J < 0$: les bornes sont rangées dans l'ordre décroissant.

La méthode et son piège

Méthode : calculer une intégrale avec une primitive

1. **Justifier l'existence** : la fonction est continue sur un intervalle qui contient les deux bornes.
2. **Choisir une primitive** sur cet intervalle, et la vérifier en la dérivant.
3. **Écrire le crochet**, puis $F(b) - F(a)$.
4. **Simplifier** jusqu'à une valeur exacte.

Rédaction attendue. « La fonction … est continue sur …, qui contient a et b. Une primitive est … Donc $\int_a^b \cdots = \Big[\ldots\Big]_a^b = \ldots$ »

Attention : un crochet sans continuité ne vaut rien

✗ « $\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x-2}\Big]_1^4 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ ».

✓ Le résultat est négatif pour une fonction strictement positive : il est absurde.

La fonction n'est pas définie en 2, qui est entre 1 et 4. Aucun intervalle de continuité ne contient les deux bornes : cette intégrale n'est pas définie dans ce chapitre.

À toi : Rédige un premier calcul

Rédige le calcul de $\int_{-1}^{2} (6x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Commence par la continuité, sur un intervalle qui contient les deux bornes.

Indice 2

Une primitive de $x \mapsto 6x^2 - 4x + 3$ est $x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

Indice 3

Point délicat : en -1, chaque puissance impaire change de signe.

Réponse

La fonction $x \mapsto 6x^2 - 4x + 3$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, qui contient -1 et 2.

Une primitive est $x \mapsto 2x^3 - 2x^2 + 3x$. Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{2} (6x^2 - 4x + 3)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[2x^3 - 2x^2 + 3x\Big]_{-1}^{2} \\
&= (16 - 8 + 6) \\
&\quad - (-2 - 2 - 3) \\
&= 14 + 7 = 21.
\end{aligned}$$

Chasles et linéarité

Découper et recoller

Devine : Deux morceaux d'intégrale

Une fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, avec $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ et $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$. D'après toi, que vaut $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. 8

Faux.

Tu as calculé $5 - (-3)$: les deux morceaux s'**ajoutent**.

B. 2

Juste.

Juste : $5 + (-3) = 2$.

C. -15

Faux.

Le produit des deux intégrales n'a pas de sens ici : on recolle des morceaux.

D. Impossible sans l'expression de f.

Faux.

Les deux morceaux suffisent : la propriété qui suit le démontre.

Correction

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}&\big(F(2) - F(0)\big)\\ &\quad + \big(F(5) - F(2)\big)\\ &= F(5) - F(0).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-3) = 2$.

Pourquoi est-ce vrai ? Chaque intégrale est un écart de valeurs d'une même primitive. En ajoutant deux écarts consécutifs, la valeur intermédiaire s'élimine.

Pour une somme de fonctions, on ajoute deux primitives : le chapitre des primitives garantit que le résultat en est une.

Deux propriétés de crochet

Propriété : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b, c trois éléments de I. Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. Les réels a, b et c sont dans I, donc F02 s'applique aux trois intégrales.

Étape 2. On calcule le membre de droite :

$$\big(F(b)-F(a)\big)+\big(F(c)-F(b)\big) = F(c)-F(a).$$

Étape 3. D'après F02, $F(c)-F(a)$ est l'intégrale de a à c de f : l'égalité est démontrée, quel que soit l'ordre de a, b et c.

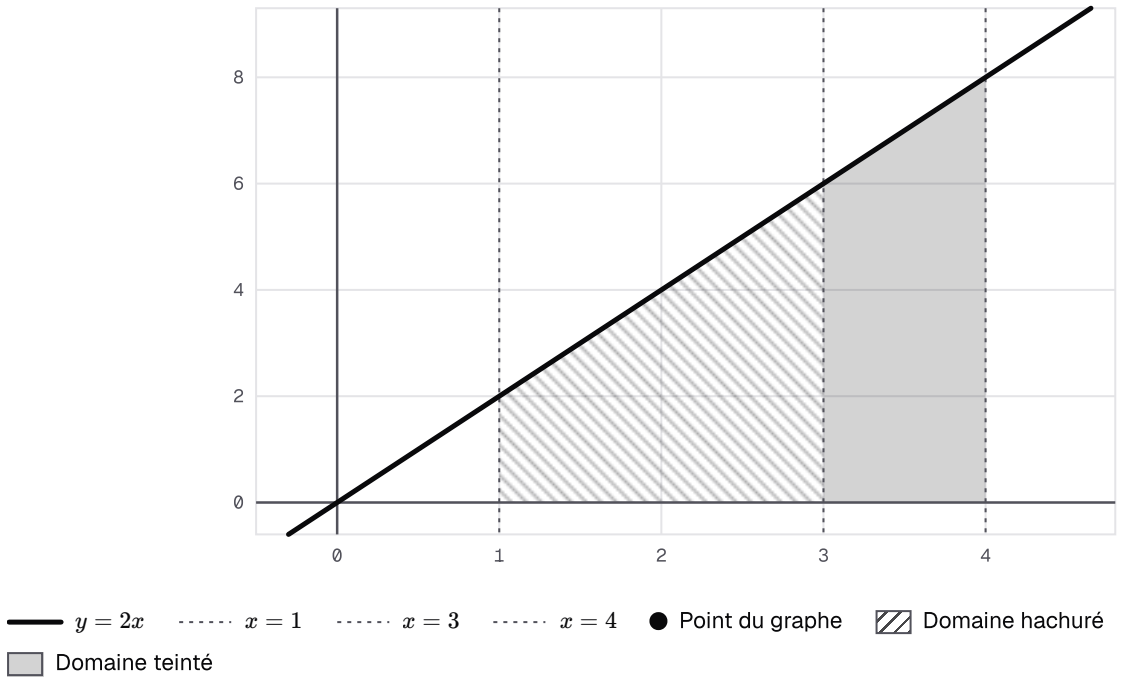
Exemple : un point de découpe hors du segment

La fonction $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto x^2$ en est une primitive. D'une part :

$$\begin{aligned}&\int_1^4 2x\,\mathrm{d}x + \int_4^3 2x\,\mathrm{d}x\\ &= (16-1)+(9-16)\\ &= 15-7 = 8.\end{aligned}$$

D'autre part, $\displaystyle\int_1^3 2x\,\mathrm{d}x = 9-1 = 8$.

Le point 4 n'est pas entre 1 et 3 : la relation de Chasles vaut quel que soit l'ordre des trois réels.



Chasles avec un point de découpe hors du segment, pour x ↦ 2x : l'intégrale de 1 à 4 couvre les deux domaines ; celle de 4 à 3 retire le domaine teinté, de 3 à 4. Il reste le domaine hachuré, de 1 à 3, soit 8.

Propriété : Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I, et λ un réel. Alors :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda\, f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Les fonctions $f+g$ et $\lambda\, f$ sont continues sur I (opérations sur les fonctions continues) : leurs intégrales existent.

Étape 2. Soit F et G des primitives de f et g sur I. Par linéarité des primitives (chapitre des primitives), $F+G$ est une primitive de $f+g$ et $\lambda\, F$ une primitive de $\lambda\, f$ sur I.

Étape 3. D'après F02 :

$$\big(F+G\big)(b) - \big(F+G\big)(a) = \big(F(b)-F(a)\big) + \big(G(b)-G(a)\big) \quad \text{et} \quad \lambda\, F(b) - \lambda\, F(a) = \lambda\,\big(F(b)-F(a)\big).$$

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves ne font qu'écrire des crochets.

Dans Chasles, la valeur $F(b)$ apparaît une fois avec $+$ et une fois avec $-$.

Dans la linéarité, tout repose sur la linéarité des primitives : $F+G$ et λF sont des primitives de $f+g$ et de λf.

Découper une valeur absolue

Vérifie : L'argument de l'étape 3

À l'étape 3 de la preuve de la linéarité, quel fait permet de reconnaître $(F+G)(b)-(F+G)(a)$ comme l'intégrale de $f+g$?

A. La relation de Chasles, appliquée entre a et b.

Faux.
Chasles découpe l'intervalle ; ici on additionne deux fonctions sur le même intervalle.

B. Le fait que $a \leq b$.

Faux.
La linéarité ne suppose aucun ordre entre a et b.

C. $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Juste.
Juste : la définition s'applique alors avec cette primitive.

D. L'égalité $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

Faux.
Cette égalité est fausse en général : f et g sont deux fonctions quelconques.

Correction
L'intégrale de $f+g$ est l'écart des valeurs d'**une** primitive de $f+g$. Par linéarité des primitives, $F+G$ en est une. Donc :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = (F+G)(b)-(F+G)(a).$$

On sépare ensuite ce crochet en deux.

Méthode : découper avec Chasles, séparer par linéarité

1. **Repérer** une valeur absolue, une fonction par morceaux ou une somme.
2. **Découper** $[a,b]$ là où l'expression change : signe sous la valeur absolue, changement de formule.
3. **Séparer** les termes et sortir les constantes.
4. **Calculer** chaque morceau, puis additionner.

Rédaction attendue. « D'après la relation de Chasles, $\int_a^b \cdots = \int_a^c \cdots + \int_c^b \ldots$; sur $[a, c]$, … »

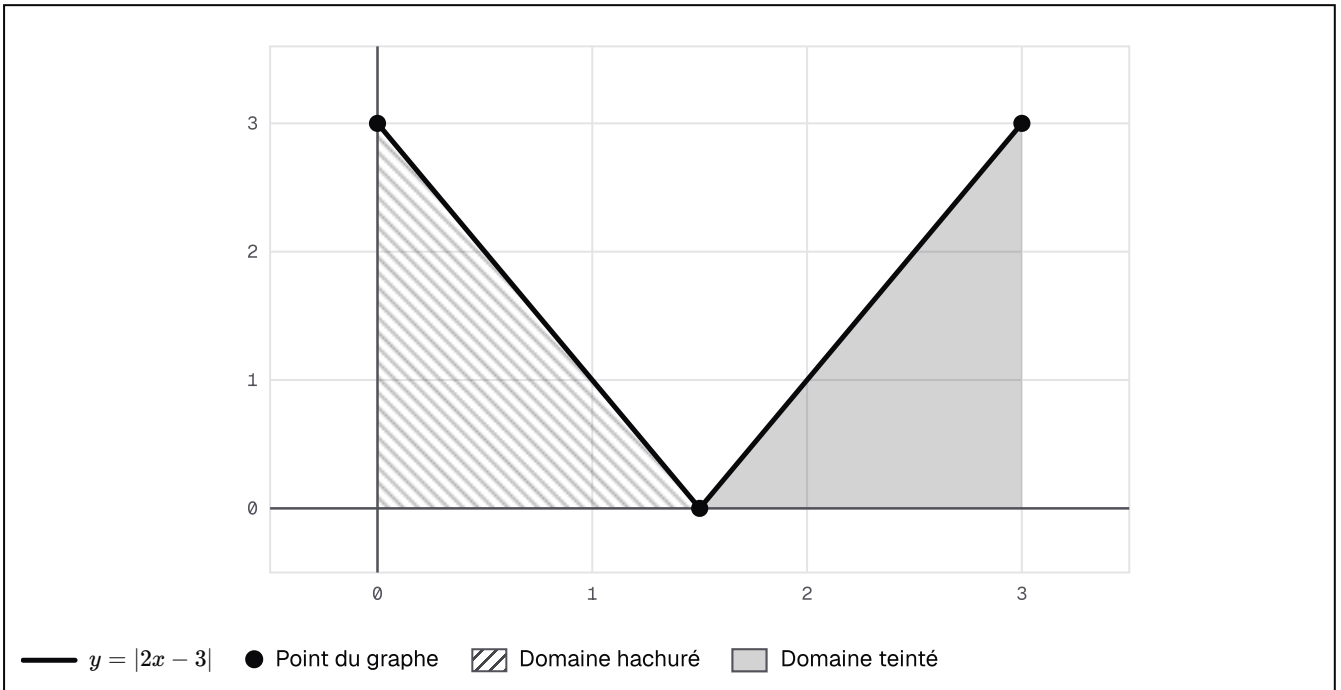
Exemple **: Exemple guidé : une valeur absolue**

Énoncé. Calcule $K = \displaystyle\int_0^3 |2x - 3| \, \mathrm{d}x$.

Signe. Le réel $2x - 3$ s'annule en $\dfrac{3}{2}$: il est négatif sur $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$ et positif sur $\left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$. La fonction $x \mapsto |2x - 3|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Découper. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2x) \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) \, \mathrm{d}x \\ &= \Big[3x - x^2\Big]_0^{\frac{3}{2}} \\ &\quad + \Big[x^2 - 3x\Big]_{\frac{3}{2}}^3 \\ &= \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Courbe de x ↦ |2x − 3| sur [0, 3] : elle forme un V qui touche l'axe des abscisses en 3/2. Le domaine sous la courbe se découpe en deux triangles, chacun d'aire 9/4.

Le piège du produit

Attention : un produit ne s'intègre pas facteur par facteur

✗ « $\displaystyle\int_0^2 x(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \times \int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = 2 \times 4 = 8$ ».

✓ On développe d'abord, puis on intègre la somme :

$$\begin{aligned}&\int_0^2 (x^2+x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

La linéarité concerne les sommes et les constantes, jamais les produits.

À toi : Rédige une intégrale par morceaux

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On admet que g est continue sur $\mathbb{R}$. Rédige le calcul de $\displaystyle\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Découpe le segment au point où la formule change.

Indice 2

Sur $[1,3]$, la formule $2x-1$ donne $g(x)$, y compris en 1, car $2\times 1 - 1 = 1^2$.

Indice 3

Point délicat : chaque morceau se calcule avec la formule valable sur **tout** ce morceau.

Réponse

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Elle coïncide avec $x \mapsto x^2$ sur $[0,1]$, et avec $x \mapsto 2x-1$ sur $[1,3]$.

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \Big[x^2 - x\Big]_1^3\\ &= \frac{1}{3} + 6 = \frac{19}{3}.\end{aligned}$$

Positivité, comparaison, valeur absolue

Le signe d'une intégrale

Devine : Une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$. D'après toi, quel est le signe de $\int_4^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. Positif ou nul, car f est positive.

Faux.

Regarde l'ordre des bornes : $4 > 1$.

B. Négatif ou nul.

Juste.

Juste : c'est l'opposé de l'intégrale de 1 à 4, qui est positive.

C. Toujours nul, car les bornes sont échangées.

Faux.

Échanger les bornes change le signe, pas la valeur absolue.

D. On ne peut rien dire sans f.

Faux.

Le signe de f et l'ordre des bornes suffisent.

Correction

D'après les conséquences de la définition :

$$\int_4^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La propriété qui suit montre que l'intégrale de 1 à 4 d'une fonction positive est positive, car $1 \leq 4$.

Donc l'intégrale de 4 à 1 est négative ou nulle.

Pourquoi est-ce vrai ? Une primitive d'une fonction positive est croissante.

Positivité, preuve à l'appui

Propriété : Positivité de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

- Si, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- Si $a < b$ et si, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. Pour tout $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$.

Étape 2. Si $a = b$, l'intégrale est nulle (F03). Supposons $a < b$. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, la fonction F a une dérivée positive sur l'intervalle $[a, b]$: elle y est croissante (signe de la dérivée et variations, chapitre de la dérivation). Comme $a \leq b$, $F(a) \leq F(b)$, donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \geq 0$ (F02).

Étape 3. Si $f > 0$ sur $[a, b]$, F y est strictement croissante. Comme $a < b$, $F(a) < F(b)$, et l'intégrale est strictement positive.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Le signe de l'intégrale vient des **variations d'une primitive** : sa dérivée f est positive, donc elle croît. L'hypothèse $a \leq b$ sert à un seul endroit : passer de « F croissante » à « $F(a) \leq F(b)$ ».

Vérifie : Où sert l'ordre des bornes ?

Dans la preuve de la positivité, à quel moment sert l'hypothèse $a \leq b$?

A. Pour affirmer que F est dérivable.

Faux.

F est une primitive : elle est dérivable par définition.

B. Pour que f soit continue sur $[a, b]$.

Faux.

La continuité est une hypothèse de l'énoncé.

C. Pour écrire $F'(x) = f(x)$.

Faux.

C'est la définition d'une primitive.

D. Pour déduire $F(a) \leq F(b)$ de la croissance de F.

Juste.

Juste : une fonction croissante conserve l'ordre, encore faut-il que $a \leq b$.

Correction

La croissance de F sur $[a, b]$ donne : si $a \leq b$, alors $F(a) \leq F(b)$. Sans $a \leq b$, on obtiendrait l'inégalité inverse. C'est le seul usage de cette hypothèse.

Exemple : Contre-exemple : une fonction positive, une intégrale négative

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pourtant :

$$\begin{aligned}\int_3^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x &= -\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^3 \\ &= -\left(12-\frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

Les bornes sont dans l'ordre décroissant : l'hypothèse $a \leq b$ de la positivité est indispensable.

Comparer deux intégrales

Comparer deux fonctions, c'est étudier le signe de leur différence. **Pourquoi est-ce vrai** pour les intégrales ? On applique la positivité à $g-f$, puis la linéarité. Pour la valeur absolue, on encadre f entre $-|f|$ et $|f|$.

Propriété : Comparaison de deux intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

Si, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

Étape 1. La fonction $g-f$ est continue sur I et, pour tout $x \in [a,b]$, $g(x)-f(x) \geq 0$.

Étape 2. Comme $a \leq b$, F06 donne $\displaystyle\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Étape 3. Par linéarité (F05), cette intégrale vaut $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, qui est donc positive : c'est l'inégalité annoncée.

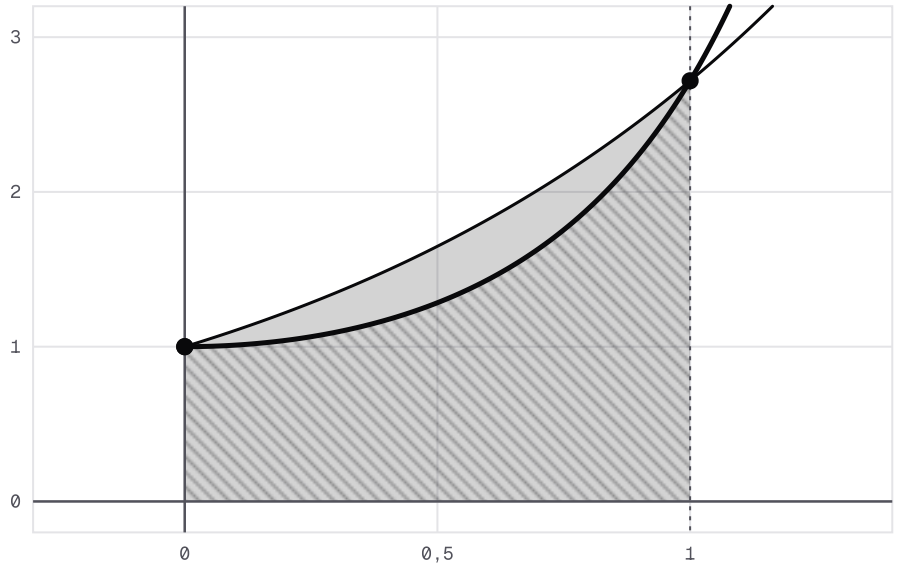
Exemple : majorer sans calculer

On ne sait pas calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ avec une primitive usuelle. On peut pourtant la majorer.

Soit $x \in [0,1]$. Alors $x^2 \leq x$, donc $e^{x^2} \leq e^x$ par croissance de l'exponentielle.

Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, et $0 \leq 1$. La comparaison donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e-1.\end{aligned}$$



Sur [0, 1], la courbe de x ↦ e^(x²) reste sous celle de l'exponentielle : le domaine hachuré, sous la première, est contenu dans le domaine teinté, sous la seconde. Son intégrale est donc au plus e − 1.

Intégrale et valeur absolue

Propriété : Intégrale et valeur absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction $|f|$ est continue sur I, comme composée de f et de la valeur absolue, continues : son intégrale existe.

Étape 2. Pour tout $x \in [a, b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Comme $a \leq b$, F07 et F05 donnent :

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Étape 3. Un réel compris entre $-A$ et A a une valeur absolue inférieure ou égale à A : d'où l'inégalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Les deux preuves ramènent tout à la **positivité**.

Pour comparer, on intègre la différence $g - f \geq 0$. Pour la valeur absolue, on intègre l'encadrement $-|f| \leq f \leq |f|$.

Dans les deux cas, l'ordre $a \leq b$ est vérifié avant d'intégrer.

Vérifie : Une inégalité stricte

On a $\displaystyle\int_{-1}^{2} x \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$. Que vaut $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x| \,\mathrm{d}x$?

A. $\dfrac{3}{2}$, la même valeur.

Faux.

La fonction $x \mapsto x$ est négative sur $[-1, 0]$: la valeur absolue y change le calcul.

B. $\dfrac{5}{2}$, une valeur plus grande.

Juste.

Juste : $\dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$, et $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{5}{2}$.

C. $\dfrac{1}{2}$, une valeur plus petite.

Faux.

D'après l'inégalité de la valeur absolue, elle est au moins égale à $\dfrac{3}{2}$.

D. $-\dfrac{3}{2}$, l'opposée.

Faux.

L'intégrale d'une fonction positive, avec des bornes croissantes, est positive.

Correction

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{2} |x| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{0} (-x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

L'inégalité $\dfrac{3}{2} \leq \dfrac{5}{2}$ est stricte : la fonction $x \mapsto x$ change de signe sur le segment.

Exemple : majorer une intégrale oscillante

Soit $x \in [0, 1]$. Comme $|\sin(5x)| \leq 1$ et $x \geq 0$, on a $|x \sin(5x)| \leq x$.

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, et $0 \leq 1$. L'inégalité de la valeur absolue, puis la comparaison, donnent :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x\sin(5x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_0^1 |x\sin(5x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On majore ainsi une intégrale sans la calculer.

Le piège des bornes

Attention : une inégalité ne s'intègre qu'avec a ≤ b

✗ « Pour tout $x \in [0,1]$, $x^2 \leq x$, donc $\int_1^0 x^2\,\mathrm{d}x \leq \int_1^0 x\,\mathrm{d}x$ ».

✓ Ici les bornes sont décroissantes. Le calcul donne $\int_1^0 x^2\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$ et $\int_1^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$: l'inégalité est inversée.

Vérifie toujours $a \leq b$ avant d'intégrer une inégalité.

À toi : Rédige une majoration

Rédige la preuve de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{3}$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Compare $\dfrac{x^2}{1+x}$ et x^2 sur $[0,1]$.

Indice 2

Pour $x \in [0,1]$, $1+x \geq 1$; divise $x^2 \geq 0$ par $1+x > 0$.

Indice 3

Point délicat : nomme la continuité et l'ordre des bornes avant de comparer.

Réponse

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x}$ et $x \mapsto x^2$ sont continues sur $]-1,+\infty[$, qui contient $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. Alors $1+x \geq 1$ et $x^2 \geq 0$, donc $\dfrac{x^2}{1+x} \leq x^2$.

Comme $0 \leq 1$, la comparaison donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Encadrer une intégrale

Entre deux rectangles

Devine : Une fonction coincée

Une fonction f est continue sur $[1, 4]$, et $2 \leq f(x) \leq 5$ pour tout $x \in [1, 4]$. D'après toi, entre quels nombres se trouve $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$?

A. Entre 2 et 5.

Faux.

Ce sont les bornes de $f(x)$; l'intégrale tient compte de la longueur $4 - 1 = 3$.

B. Entre 8 et 20.

Faux.

Tu as multiplié par 4, la borne supérieure, au lieu de la longueur 3.

C. Entre 6 et 15.

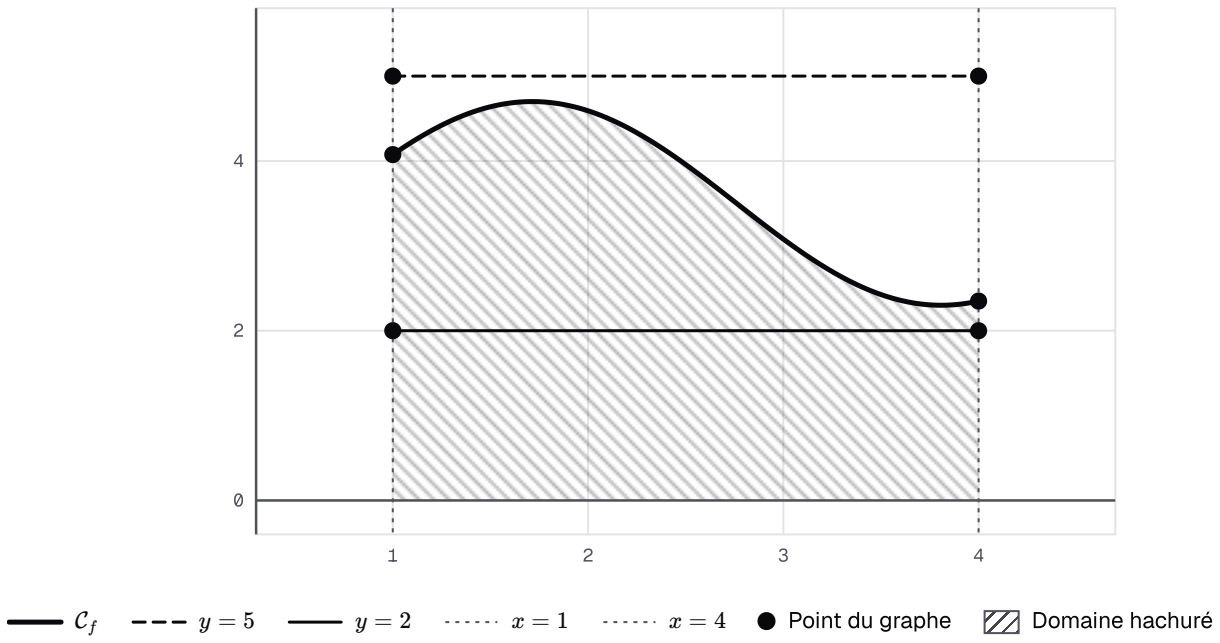
Juste.

Juste : $2 \times 3 = 6$ et $5 \times 3 = 15$.

Correction

Le domaine sous la courbe est pris entre deux rectangles de base $[1, 4]$, de longueur 3, et de hauteurs 2 et 5. Donc l'intégrale est comprise entre $2 \times 3 = 6$ et $5 \times 3 = 15$. La propriété qui suit le démontre sans parler d'aire.

Pourquoi est-ce vrai ? On compare f à deux fonctions constantes, puis on intègre. L'intégrale d'une constante m sur $[a, b]$ vaut $m\,(b - a)$.



Un exemple de fonction f continue sur [1, 4] avec 2 ≤ f(x) ≤ 5 : le domaine hachuré sous sa courbe est pris entre le rectangle de hauteur 2 et celui de hauteur 5, tous deux de base [1, 4].

L'inégalité de la moyenne

Propriété : Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

- Si m et M sont deux réels tels que, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\,(b-a).$$

- Si M est un réel tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,(b-a)$.

Démonstration

Étape 1. Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont continues sur I, et $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$. Comme $a \leq b$, F07 donne :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

Étape 2. D'après F03, les deux bornes valent $m\,(b-a)$ et $M\,(b-a)$.

Étape 3. Si $|f| \leq M$ sur $[a, b]$, alors $-M \leq f \leq M$ sur $[a, b]$. Les étapes 1 et 2, avec $m = -M$, donnent $-M\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\,(b-a)$. Un réel compris entre $-A$ et A a une valeur absolue au plus égale à A : avec $A = M\,(b-a)$, d'où la seconde inégalité.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve est une **comparaison** avec des fonctions constantes, suivie du calcul de leurs intégrales. La seconde inégalité n'est pas une idée nouvelle : c'est la première, avec $m = -M$.

Vérifie : D'où vient la seconde inégalité ?

Dans la preuve, comment obtient-on $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M\,(b-a)$?

A. Par le théorème de la moyenne.

Faux.

Ce théorème arrive plus loin, et la preuve ne s'en sert pas.

B. Par la positivité appliquée à f.

Faux.

f n'est pas supposée positive.

C. Par la première inégalité, avec $m = -M$.

Juste.

Juste : $|f| \leq M$ donne $-M \leq f \leq M$.

D. Par la relation de Chasles.

Faux.

La preuve ne découpe pas le segment.

Correction

Si, pour tout $x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$, alors $-M \leq f(x) \leq M$. La première inégalité, avec $m = -M$, donne :

$$\begin{aligned} -M\,(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq M\,(b-a). \end{aligned}$$

Cette double inégalité équivaut à la majoration de la valeur absolue.

Exemple : Exemple guidé : encadrer par des constantes

Énoncé. Encadre $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+x^3}\,\mathrm{d}x$.

Encadrer la fonction. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+x^3}$ est continue sur $[0,1]$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $0 \leq x^3 \leq 1$, donc $2 \leq 2 + x^3 \leq 3$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, donc $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2+x^3} \leq \dfrac{1}{2}$.

Intégrer. Comme $0 \leq 1$, l'inégalité de la moyenne donne $\dfrac{1}{3} \leq L \leq \dfrac{1}{2}$.

Avec des bornes rangées dans l'autre ordre, les deux inégalités s'inverseraient : l'ordre $a \leq b$ est une hypothèse.

Encadrer par des fonctions

Méthode : encadrer une intégrale

1. **Vérifier l'ordre des bornes** : $a \leq b$.
2. **Encadrer la fonction** sur tout $[a, b]$, par des constantes ou par des fonctions dont on connaît une primitive.
3. **Intégrer l'encadrement**, en nommant la propriété : comparaison, ou inégalité de la moyenne.
4. **Conclure**.

Rédaction attendue. « Pour tout $x \in [a, b]$, … $\leq f(x) \leq$ … Ces fonctions sont continues et $a \leq b$, donc … »

Exemple : encadrer par deux fonctions

Énoncé. Montre que $1 - \dfrac{1}{e} \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq 1$.

Encadrer. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $x^2 \leq x$, donc $-x \leq -x^2 \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, $e^{-x} \leq e^{-x^2} \leq 1$.

Intégrer. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ et $0 \leq 1$. La comparaison donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

Minorant.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-e^{-x}\Big]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

À toi : Rédige un encadrement de logarithme

Rédige l'encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ par l'inégalité de la moyenne, puis déduis-en un encadrement de $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Encadre $x+1$ pour $x \in [1,2]$, puis passe à l'inverse.

Indice 2

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ sur $]-1,+\infty[$ est $x \mapsto \ln(x+1)$.

Indice 3

Point délicat : le passage à l'inverse change le sens des inégalités.

Réponse

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est continue sur $]-1,+\infty[$, qui contient $[1,2]$.

Soit $x \in [1,2]$. Alors $2 \leq x+1 \leq 3$, donc $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

Comme $1 \leq 2$ et $2-1=1$, l'inégalité de la moyenne donne :

$$\frac{1}{3} \leq \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}.$$

Or cette intégrale vaut $\ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

Conclusion. $\dfrac{1}{3} \leq \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \leq \dfrac{1}{2}$.

Remarque : Coin examen : la forme des questions d'encadrement

Une question d'encadrement se présente en deux temps :

- « Montrer que, pour tout x de $[a,b]$, … $\leq f(x) \leq$ … » ;
- « En déduire un encadrement de l'intégrale ».

Chaque question se rédige à part : l'encadrement de la fonction, puis l'intégration avec l'ordre des bornes vérifié.

Si la première question résiste, admets son résultat et traite la suivante.

Valeur moyenne et théorème de la moyenne

Un rectangle de même aire

Devine : La hauteur du rectangle

Une fonction f continue et positive vérifie $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$. D'après toi, quelle hauteur faut-il à un rectangle de base $[0,4]$ pour avoir la même aire ?

A. 10

Faux.

Un rectangle de hauteur 10 et de base 4 a une aire de 40.

B. 40

Faux.

Tu as multiplié par la longueur de la base : il faut diviser.

C. 6

Faux.

Tu as retranché la longueur : $10 - 4$ n'est pas une hauteur.

D. $\dfrac{5}{2}$

Juste.

Juste : $\dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$.

Correction

L'aire d'un rectangle est base fois hauteur. Avec la base 4, la hauteur h vérifie $4h = 10$, donc $h = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$. Cette hauteur s'appelle la valeur moyenne de f sur $[0, 4]$.

Définition : Valeur moyenne d'une fonction sur un segment

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

La **valeur moyenne de f sur** $[a, b]$ est le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple : la valeur moyenne du sinus sur une arche

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, et $0 < \pi$. Une primitive est $x \mapsto -\cos x$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

On divise par la longueur π de l'intervalle :

$$\mu = \frac{2}{\pi}.$$

Le maximum du sinus sur $[0, \pi]$ vaut 1, mais sa valeur moyenne est plus petite que 1.

La valeur moyenne $\dfrac{2}{\pi}$ est-elle une valeur prise par le sinus sur $[0, \pi]$? Le théorème suivant répond oui, pour toute fonction continue.

Pourquoi est-ce vrai ? L'intégrale est un taux d'accroissement d'une primitive.

Rappel. Si $a < b$ et si F est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$F(b) - F(a) = F'(c)\,(b - a).$$

Une valeur réellement atteinte

Théorème : Théorème de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b deux éléments de I tels que $a < b$.

Il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a).$$

Autrement dit, la valeur moyenne μ de f sur $[a, b]$ est une valeur prise par f sur $[a, b]$: $\mu = f(c)$.

Démonstration

Étape 1. Soit F une primitive de f sur I. La fonction F est dérivable sur I, donc continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Étape 2. Comme $a < b$, le théorème des accroissements finis (chapitre de la dérivation) s'applique à F sur $[a, b]$: il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $F(b) - F(a) = F'(c)\,(b-a)$.

Étape 3. Or $F'(c) = f(c)$, et $F(b) - F(a)$ est l'intégrale de a à b de f (F02). Donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\,(b-a)$, avec $c \in]a, b[\subset [a, b]$. En divisant par $b - a > 0$, on obtient $\mu = f(c)$ (F10).

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On lit $\mu = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}$ comme le **taux d'accroissement** d'une primitive F entre a et b. Le théorème des accroissements finis donne un réel c où $F'(c)$ égale ce taux. Comme $F' = f$, on obtient $f(c) = \mu$.

Vérifie : Le théorème appliqué

Quel théorème du chapitre de la dérivation la preuve applique-t-elle, et à quelle fonction ?

A. Les accroissements finis, à f.

Faux.

f est seulement continue : elle n'est pas forcément dérivable.

B. Les accroissements finis, à F.

Juste.

Juste : F est dérivable, de dérivée f.

C. Le théorème de Rolle, à f.

Faux.

Rien ne garantit $f(a) = f(b)$, ni la dérivabilité de f.

D. Les valeurs intermédiaires, à F.

Faux.
On cherche une valeur de F', pas de F.

Correction
La primitive F est dérivable sur I, donc continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Le théorème des accroissements finis donne $c \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F'(c)\,(b-a) \\ &= f(c)\,(b-a). \end{aligned}$$

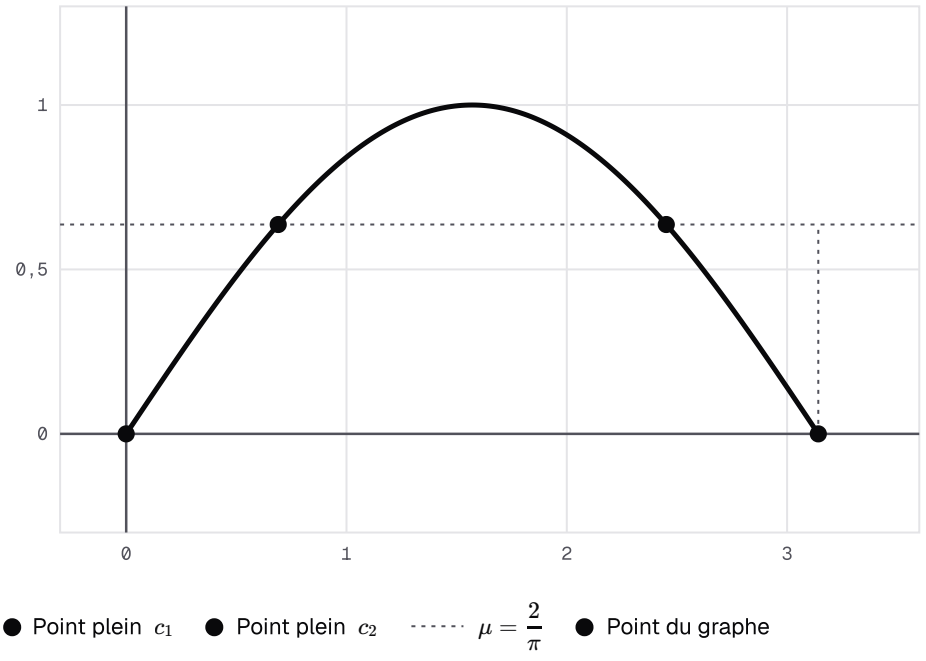
Exemple : le réel c n'est pas unique

Pour le sinus sur $[0,\pi]$, on cherche c tel que $\sin c = \dfrac{2}{\pi}$.

Or $0 < \dfrac{2}{\pi} < 1$, $\sin 0 = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Le sinus est continu sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, une solution c_1 existe dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Comme $\sin(\pi - c_1) = \sin c_1$, le réel $c_2 = \pi - c_1$ convient aussi. Il diffère de c_1, car $c_1 < \dfrac{\pi}{2} < c_2$.

Le théorème affirme l'**existence** de c, jamais son unicité.



Une arche de sinus sur [0, π] et la droite horizontale à la hauteur de la valeur moyenne 2/π. Le rectangle construit sur [0, π] avec cette hauteur couvre une aire égale à celle de l'arche.

Calculer μ, trouver c

Méthode : valeur moyenne et réel c

1. **Calculer** l'intégrale, puis $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $a < b$.
2. **Pour l'existence de** c : citer la continuité de f sur $[a, b]$ et le théorème de la moyenne.
3. **Pour trouver** c : résoudre $f(c) = \mu$ dans $[a, b]$, quand l'équation se résout.

Rédaction attendue. « f est continue sur $[a, b]$, avec $a < b$; d'après le théorème de la moyenne, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$. »

Exemple **: Exemple guidé : la racine carrée sur [0, 9]**

Valeur moyenne. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et une primitive est $x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. Donc :

$$\int_0^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \times 9 \times 3 - 0 = 18,$$
$$\mu = \frac{18}{9-0} = 2.$$

Réel c**.** L'équation $\sqrt{c} = 2$ donne $c = 4$, qui est bien dans $[0, 9]$.

À toi : Rédige une valeur moyenne

Rédige le calcul de la valeur moyenne μ de $x \mapsto 3x^2 - 4x + 2$ sur $[0, 2]$, puis trouve tous les réels c de $[0, 2]$ tels que $3c^2 - 4c + 2 = \mu$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1
Une primitive est $x \mapsto x^3 - 2x^2 + 2x$.
Indice 2
Divise l'intégrale par la longueur $2 - 0$.
Indice 3
Point délicat : l'équation en c peut avoir plusieurs solutions ; garde celles de $[0, 2]$.

Réponse
La fonction $x \mapsto 3x^2 - 4x + 2$ est polynomiale, donc continue sur $[0, 2]$.

On a $\displaystyle\int_0^2 (3x^2 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x = \Big[x^3 - 2x^2 + 2x\Big]_0^2 = 8 - 8 + 4 = 4$, donc $\mu = \dfrac{4}{2} = 2$.

L'équation $3c^2 - 4c + 2 = 2$ s'écrit $c\,(3c - 4) = 0$, soit $c = 0$ ou $c = \dfrac{4}{3}$.

Ces deux réels sont dans $[0, 2]$: ce sont les réels cherchés.

Intégrer par parties

La dérivée d'un produit, lue à l'envers

Devine : Une dérivée de produit

On a $(x\sin x)' = \sin x + x\cos x$ sur $\mathbb{R}$. D'après toi, que vaut $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x)\,\mathrm{d}x$?

A. $\dfrac{\pi}{2}$

Juste.

Juste : c'est $\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$.

B. 1

Faux.

1 est l'intégrale de $\sin x$ seule ; il manque celle de $x\cos x$.

C. $\dfrac{\pi}{2} - 1$

Faux.

C'est l'intégrale de $x\cos x$ seule.

D. 0

Faux.

$x\sin x$ vaut $\dfrac{\pi}{2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$, pas 0.

Correction

La fonction intégrée est la dérivée de $x \mapsto x\sin x$, et elle est continue sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale vaut :

$$\begin{aligned}&\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

En retranchant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = 1$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$: une intégrale de produit, calculée sans primitive directe.

Tu sais dériver un produit ; tu vas t'en servir à l'envers pour intégrer. Ce calcul se généralise à tout produit $u\,v'$.

Pourquoi est-ce vrai ? La dérivée de $u\,v$ est $u'v + uv'$. On intègre cette dérivée, puis on sépare les deux termes par linéarité.

La formule

Théorème : Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I, et a, b deux éléments de I. Alors :

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. Les fonctions u et v sont dérivables, donc continues, sur I. Les produits $u\,v'$ et $u'\,v$ sont donc continus sur I : les deux intégrales existent.

Étape 2. D'après la dérivée d'un produit (chapitre de la dérivation), $u\,v$ est dérivable sur I et $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$, qui est continue sur I. Par F03 (intégrale d'une dérivée continue) :

$$\int_a^b \big(u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b.$$

Étape 3. Par linéarité (F05), le membre de gauche vaut $\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$. On isole la seconde intégrale : c'est la formule annoncée.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

On intègre la **dérivée d'un produit** : son intégrale est le crochet $\Big[u\,v\Big]_a^b$. La linéarité sépare ensuite $u'v$ et uv'. Les hypothèses sur u' et v' ne sont pas décoratives : sans continuité, les intégrales ne seraient pas définies.

Vérifie : Quel facteur dériver ?

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 (x+3)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ par parties, quel choix est le bon ?

A. $u : x \mapsto e^{-x}$ et $v' : x \mapsto x+3$.

Faux.

Alors $v : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 3x$: le degré du polynôme monte au lieu de baisser.

B. $u : x \mapsto x+3$ et $v' : x \mapsto e^{-x}$.

Juste.

Juste : $u'(x) = 1$, et le polynôme disparaît.

C. $u : x \mapsto (x+3)\,e^{-x}$ et $v' : x \mapsto 1$.

Faux.

Alors $u'(x)\,v(x) = -x\,(x+2)\,e^{-x}$: l'intégrale suivante n'est pas plus simple.

D. $u : x \mapsto 1$ et $v' : x \mapsto (x+3)\,e^{-x}$.

Faux.

Il faudrait déjà une primitive du produit : c'est justement ce que l'on cherche.

Correction

On dérive le facteur que la dérivation simplifie : $u'(x) = 1$. On intègre l'autre : une primitive de $x \mapsto e^{-x}$ est $v : x \mapsto -e^{-x}$.

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées continues. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (x+3)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-(x+3)\,e^{-x}\Big]_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 3 - \frac{4}{e} + 1 - \frac{1}{e} \\
&= 4 - \frac{5}{e}.
\end{aligned}$$

Exemple : Exemple guidé : un logarithme multiplié par un carré

Poser. Pour $x > 0$, on pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, et l'on prend $v : x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$.

Hypothèses. Les fonctions u et v sont dérivables sur $]0, +\infty[$, qui contient 1 et e, et u', v' y sont continues.

Appliquer.

$$\begin{aligned}
&\int_1^e x^2 \ln x\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\frac{x^3}{3}\ln x\Big]_1^e \\
&\quad - \int_1^e \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} \\
&= \frac{2e^3 + 1}{9}.
\end{aligned}$$

Exemple : Contre-exemple : une dérivée qui n'est pas continue

Prends $u : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$. La fonction v est continue sur $[0, 1]$, mais elle n'est pas dérivable en 0 : $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ n'existe que pour $x > 0$.

La fonction v' n'est donc continue sur aucun intervalle qui contient 0 et 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$ n'est donc pas définie dans ce chapitre, et la formule ne s'applique pas. L'hypothèse « u' et v' continues » n'est pas une précaution de style.

Une fois, deux fois

Méthode : intégrer par parties

1. **Poser** $u(x)$, le facteur que la dérivation simplifie (polynôme, $\ln$, $\arctan$), et $v'(x)$, un facteur dont tu connais une primitive.
2. **Calculer** $u'(x)$ et une primitive $v(x)$.
3. **Vérifier** : u et v dérivables sur un intervalle qui contient les bornes, u' et v' continues.
4. **Appliquer** la formule ; recommencer si un polynôme reste à dériver.

Rédaction attendue. « On pose $u(x) = \dots$ et $v'(x) = \dots$; alors $u'(x) = \dots$ et $v(x) = \dots$. Ces fonctions sont dérivables sur …, à dérivées continues. Par intégration par parties, … »

Exemple : deux intégrations par parties

Énoncé. Calcule $P = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$. Toutes les fonctions posées sont dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées continues.

Première fois. On pose $u : x \mapsto x^2$ et $v' = \cos$, d'où $u' : x \mapsto 2x$ et $v = \sin$. Le crochet $\Big[x^2 \sin x\Big]_0^{\pi}$ est nul, donc :

$$P = -2\int_0^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Seconde fois. On pose $u : x \mapsto x$ et $v' = \sin$, d'où $u' : x \mapsto 1$ et $v = -\cos$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= \pi + 0 = \pi.
\end{aligned}$$

Conclusion. $P = -2\pi$.

Attention : le signe moins devant la nouvelle intégrale

✗ « $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x\,e^{2x}}{2}\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x$ ».

✓ La formule retranche la nouvelle intégrale :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^2}{2} - \Big[\frac{e^{2x}}{4}\Big]_0^1 \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \\
&= \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

Écris toujours la formule complète : le crochet, **puis** le signe moins.

Rédiger comme à l'examen

À toi : Rédige une intégration par parties

Rédige le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ par parties. Si tu hésites sur le choix de u, c'est normal : ouvre le premier indice. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Pose $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \sin(2x)$.

Indice 2

Une primitive de $x \mapsto \sin(2x)$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(2x)}{2}$.

Indice 3

Point délicat : $\cos\pi = -1$, et le signe moins de la formule s'ajoute à celui de v.

Réponse

On pose $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \sin(2x)$; alors $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto -\dfrac{\cos(2x)}{2}$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées continues.

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[-\frac{x\cos(2x)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{4} + \Big[\frac{\sin(2x)}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Remarque : Coin examen : une intégration par parties guidée

L'intégration par parties est demandée dans 7 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). Une question type : « En utilisant une intégration par parties, montrer que … ».

Le correcteur attend trois choses :

- u et v' posés, avec u' et v ;
- les hypothèses de dérivabilité et de continuité ;
- le crochet puis la nouvelle intégrale, calculés.

Cette rédaction suit un plan fixe : apprends-le une fois.

Changer de variable

La dérivée d'une composée, lue à l'envers

Devine : Une composée cachée

On a $\left((1+t^2)^4\right)' = 8t\,(1+t^2)^3$. D'après toi, que vaut $\displaystyle\int_0^1 2t\,(1+t^2)^3\,\mathrm{d}t$?

A. $\dfrac{1}{4}$, soit $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

Faux.

Quand t va de 0 à 1, $x = 1+t^2$ va de 1 à 2 : les bornes changent.

B. 15

Faux.

Il manque le facteur $\dfrac{1}{4}$: une primitive est $t \mapsto \dfrac{(1+t^2)^4}{4}$.

C. $\dfrac{15}{4}$

Juste.

Juste : $\dfrac{2^4-1^4}{4} = \dfrac{15}{4}$.

D. $\dfrac{15}{8}$

Faux.

La dérivée de $\dfrac{(1+t^2)^4}{4}$ est exactement $2t\,(1+t^2)^3$: on divise par 4, pas par 8.

Correction

La fonction $t \mapsto \dfrac{(1+t^2)^4}{4}$ a pour dérivée $2t\,(1+t^2)^3$. Donc l'intégrale vaut $\dfrac{2^4-1}{4} = \dfrac{15}{4}$. On trouve la même valeur que $\displaystyle\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{16-1}{4}$: en posant $x = 1+t^2$, les bornes 0 et 1 deviennent 1 et 2.

Petit rappel. Si φ est dérivable sur J et F dérivable sur un intervalle qui contient $\varphi(J)$, alors $F \circ \varphi$ est dérivable sur J et :

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi'.$$

Pourquoi est-ce vrai ? C'est la dérivée d'une composée, lue à l'envers.

Le théorème et ses hypothèses

Théorème : Changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et φ une fonction dérivable sur un intervalle J, de dérivée φ' continue sur J, telle que $\varphi(t) \in I$ pour tout $t \in J$. Pour tous α et β dans J :

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Étape 1. La fonction f est continue sur l'intervalle I : elle y admet une primitive F (existence admise au chapitre des primitives). Les réels $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont dans I, donc, d'après F02, le membre de droite vaut $F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$.

Étape 2. Comme φ est dérivable sur J, à valeurs dans I, et F dérivable sur I, la dérivée d'une composée (chapitre de la dérivation) donne, pour tout $t \in J$:

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t).$$

Étape 3. La fonction φ est dérivable, donc continue, sur J. La fonction $t \mapsto f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)$ est continue sur J (composée et produit de fonctions continues), et $F \circ \varphi$ en est une primitive sur J. D'après F02, le membre de gauche vaut $F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$: les deux membres sont égaux.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve calcule les **deux membres** avec la même primitive F de f.

À gauche, $F \circ \varphi$ est une primitive, par la dérivée d'une composée. À droite, F suffit.

L'hypothèse $\varphi(t) \in I$ permet de composer : sans elle, $F(\varphi(t))$ n'aurait pas de sens.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve, à quoi sert l'hypothèse « $\varphi(t) \in I$ pour tout $t \in J$ » ?

A. À rendre φ dérivable sur J.

Faux.
La dérivabilité de φ est une autre hypothèse de l'énoncé.

B. À composer F et φ, puis dériver $F \circ \varphi$ sur J.

Juste.
Juste : F n'est connue que sur I.

C. À garantir $\varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$.

Faux.
Le théorème ne suppose aucun ordre entre les bornes.

D. À rendre f continue sur I.

Faux.
La continuité de f sur I est une hypothèse de l'énoncé.

Correction
La primitive F de f est définie et dérivable sur I. Pour écrire $F(\varphi(t))$ et dériver cette composée en tout t de J, il faut que $\varphi(t)$ soit dans I.

Exemple : Contre-exemple : une substitution sans intervalle

Pour tout réel x, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\arctan x\Big]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} > 0.\end{aligned}$$

Posons naïvement $x = \dfrac{1}{t}$: les bornes -1 et 1 restent -1 et 1, et le calcul formel donne :

$$-\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

Le signe est faux. La raison : la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas définie en 0. Elle n'est dérivable sur aucun intervalle qui contient -1 et 1 : le théorème ne s'applique pas.

Deux changements classiques

Méthode : effectuer un changement de variable

1. **Poser** la relation $x = \varphi(t)$, ou $t = \psi(x)$, et nommer l'intervalle J de la nouvelle variable.
2. **Vérifier** : φ dérivable sur J, φ' continue, $\varphi(J)$ inclus dans un intervalle où f est continue.
3. **Transformer** l'élément différentiel, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, **et les bornes**.
4. **Calculer** la nouvelle intégrale.

Rédaction attendue. « On pose $x = \varphi(t)$, avec $t \in J$. La fonction φ est dérivable sur J, à dérivée continue, et $\varphi(J) \subset I$. Quand x va de a à b, t va de α à β, et $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. »

Exemple : Exemple guidé : un changement affine

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_{1}^{5} \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est continue sur $I = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

Poser. On pose $x = \varphi(t) = \dfrac{t+1}{2}$, avec $t \in J = [0, +\infty[$. La fonction φ est dérivable sur J, sa dérivée $t \mapsto \dfrac{1}{2}$ est continue, et $\varphi(J) = I$.

Bornes. On a $x = 1$ pour $t = 1$, et $x = 5$ pour $t = 9$. De plus, pour tout $t \in J$, $\sqrt{2\varphi(t) - 1} = \sqrt{t}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}&\int_1^5 \sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x\\&= \int_1^9 \frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{3}\Big[t\sqrt{t}\Big]_1^9 = \frac{26}{3}.\end{aligned}$$

Exemple : Exemple guidé : un changement trigonométrique

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $I = [-1, 1]$.

Poser. On pose $x = \sin t$, avec $t \in J = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Le sinus est dérivable, de dérivée $\cos$ continue, et $\sin(J) = [0, 1] \subset I$.

Bornes. Les bornes 0 et $\dfrac{1}{2}$ correspondent à $t = 0$ et $t = \dfrac{\pi}{6}$. Pour tout $t \in J$, $\cos t \geq 0$, donc $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$. L'intégrale devient $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$.

Rappel de 1re. Pour tout réel t, $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$, donc $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$. De même, $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&= \Big[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Attention : changer les bornes et l'élément différentiel

✗ « Avec $x = 2t$: $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{4+4t^2}\,\mathrm{d}t$ ».

✓ Deux oublis. Quand x va de 0 à 2, t va de 0 à 1. Et $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$. Le bon calcul :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2}{4+4t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_0^1\\&= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Vérifie : Que devient l'intégrale ?

Dans $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$, on pose $x = t^2$, avec $t \in [1, 2]$. Que devient l'intégrale ?

A. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Juste.

Juste : $\dfrac{2t}{t\,(1+t)} = \dfrac{2}{1+t}$.

B. $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Faux.

Quand x va de 1 à 4, $t = \sqrt{x}$ va de 1 à 2.

C. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$

Faux.

Tu as oublié $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

D. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Faux.

Pour $t > 0$, $\sqrt{x} = t$: le facteur t du dénominateur se simplifie.

Correction

La fonction $t \mapsto t^2$ est dérivable sur $[1,2]$, de dérivée $t \mapsto 2t$ continue, à valeurs dans $[1,4]$. Pour $t \in [1,2]$, $\sqrt{t^2} = t$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. L'intégrale devient :

$$\begin{aligned}&\int_1^2 \frac{2t}{t\,(1+t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 \frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\ln 3 - 2\ln 2.\end{aligned}$$

Rédiger comme à l'examen

À toi : Rédige un changement de variable

Rédige le calcul de $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = t^2 - 1$, avec $t \in [1,2]$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Vérifie les hypothèses : $\varphi(t) = t^2 - 1$ sur $[1,2]$, à valeurs dans $[0,3]$.

Indice 2

Pour $t \in [1,2]$, $\sqrt{x+1} = t$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

Indice 3

Point délicat : les bornes 0 et 3 deviennent 1 et 2.

Réponse

La fonction $x \mapsto x\sqrt{x+1}$ est continue sur $I = [-1, +\infty[$.

On pose $x = \varphi(t) = t^2 - 1$, avec $t \in [1,2]$. La fonction φ est dérivable, sa dérivée $t \mapsto 2t$ est continue, et $\varphi([1,2]) = [0,3] \subset I$. Pour $t \in [1,2]$, $\sqrt{\varphi(t)+1} = t$.

Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\\&=\int_1^2 (t^2-1)\,t\times 2t\,\mathrm{d}t\\&=\Big[\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}\Big]_1^2\\&=\frac{62}{5}-\frac{14}{3}=\frac{116}{15}.\end{aligned}$$

Remarque : Coin examen : un changement de variable donné

Un changement de variable est demandé ou suggéré dans 4 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025). L'énoncé donne alors la relation : « En posant $t=\ldots$, montrer que … ».

Ne la cherche pas toi-même : vérifie ses hypothèses, transforme les bornes et l'élément différentiel, puis calcule.

Écris les nouvelles bornes en premier, avant de toucher à l'intégrande.

Intégrale et aire

Une aire déjà connue

Devine : Sous une droite

Le domaine limité par la droite d'équation $y=x+1$, l'axe des abscisses et les droites $x=0$ et $x=2$ est un trapèze. D'après toi, quelle est son aire, en unités d'aire ?

A. 4

Juste.

Juste : $2\times\dfrac{1+3}{2}=4$.

B. 3

Faux.

3 est la hauteur du trapèze en $x=2$, pas son aire.

C. 6

Faux.

Le rectangle de hauteur 3 déborde du trapèze : son aire est trop grande.

D. 2

Faux.

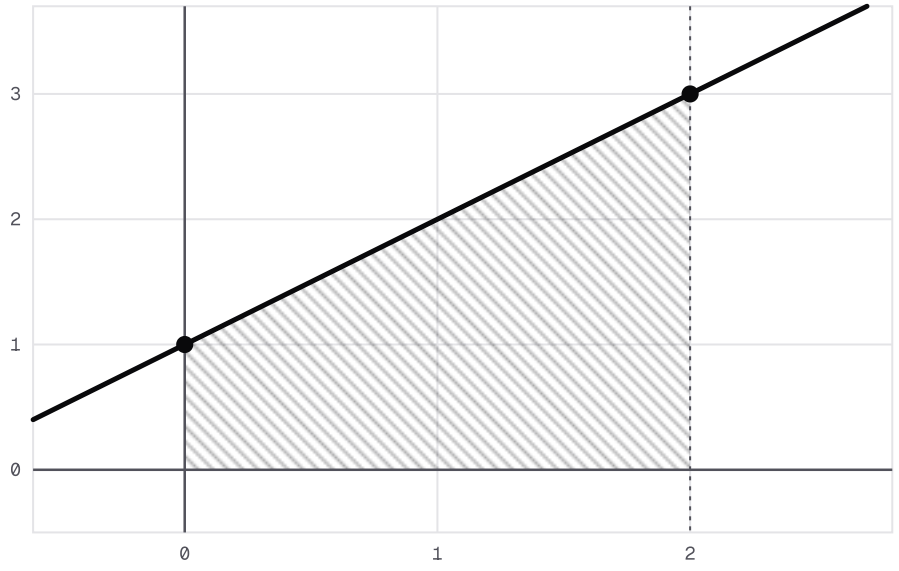
La base du trapèze mesure 2, mais ses hauteurs valent 1 et 3.

Correction

Les côtés parallèles mesurent 1 et 3, et la hauteur du trapèze vaut 2 : l'aire est $2\times\dfrac{1+3}{2}=4$ u.a.

L'intégrale donne la même valeur :

$$\int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = 4.$$



Le domaine de l'activité : sous la droite d'équation y = x + 1, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites x = 0 et x = 2. C'est un trapèze.

Pour un rectangle ou un trapèze, l'aire de géométrie et l'intégrale coïncident. Une fonction affine par morceaux donne une réunion de trapèzes : la relation de Chasles additionne leurs aires.

L'énoncé suivant étend ce lien à toute fonction continue et positive ; sa preuve est une **esquisse**.

L'aire sous une courbe

Théorème : Intégrale et aire sous une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'**unité d'aire** (u.a.) est l'aire du rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

Démonstration

Idée de la preuve. On vérifie l'égalité sur des domaines dont l'aire se calcule par la géométrie, puis on généralise.

Étape 1. Si f est constante, égale à $c \geq 0$, le domaine est un rectangle d'aire $c\,(b-a)$, qui est l'intégrale d'après F03.

Étape 2. Si f est affine et positive, le domaine est un trapèze d'aire $(b-a)\,\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$. Avec $f(x)=p\,x+q$ et la primitive $x \mapsto \dfrac{p\,x^2}{2}+q\,x$, F02 donne la même valeur.

Étape 3. Si f est affine par morceaux et continue, le domaine est une réunion de trapèzes, et la relation de Chasles (F04) additionne leurs aires.

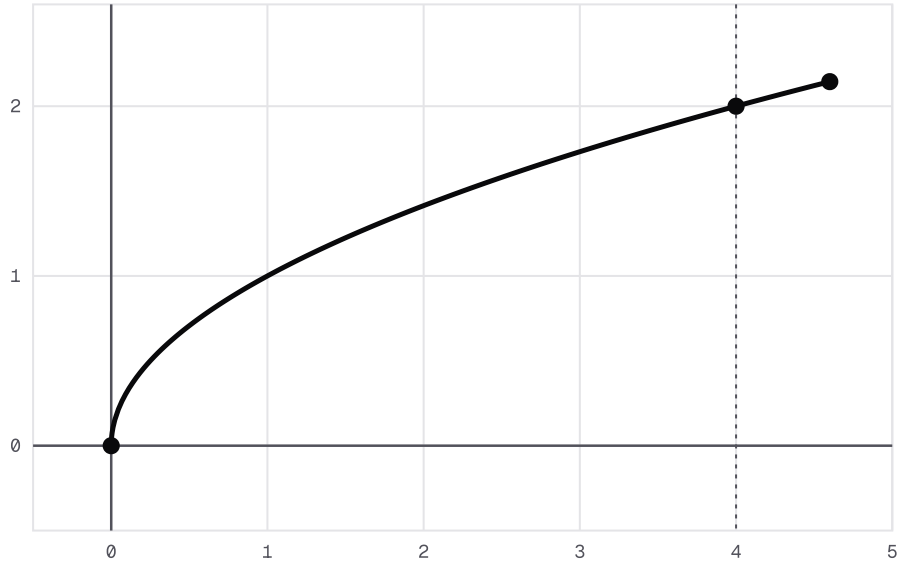
Étape omise : le passage à une fonction continue et positive quelconque, qui demande une définition générale de l'aire, hors programme. Ce passage est admis.

Remarque : ce qui est admis

Pour un domaine limité par une courbe quelconque, le programme ne définit pas l'aire.

L'esquisse établit l'égalité pour les rectangles, les trapèzes et leurs réunions. Le passage à une fonction continue et positive quelconque est **admis** : il demande une définition générale de l'aire, construite après le lycée.

Pour l'aire entre deux courbes, l'invariance de l'aire par translation et son additivité sont aussi **admises**.



La courbe de la racine carrée entre 0 et 4. L'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite x = 4 vaut 16/3 unités d'aire.

Vérifie : D'unités d'aire en centimètres carrés

On a $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$. Le repère est orthogonal, avec $\|\vec{i}\| = 2\ \mathrm{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\ \mathrm{cm}$. Quelle est l'aire du domaine de la figure ?

A. $\dfrac{16}{3}\ \mathrm{cm}^2$

Faux.

$\dfrac{16}{3}$ est l'aire en **unités d'aire** : convertis-la.

B. $\dfrac{64}{3}\ \mathrm{cm}^2$

Faux.

Tu as pris 2×2 ; or l'unité d'aire est un rectangle de 2 sur 3.

C. $32\ \mathrm{cm}^2$

Juste.

Juste : 1 u.a. $= 2 \times 3 = 6\ \mathrm{cm}^2$, et $\dfrac{16}{3} \times 6 = 32$.

D. $\dfrac{80}{3}\ \mathrm{cm}^2$

Faux.

On multiplie les deux longueurs, on ne les ajoute pas : 2×3, pas $2 + 3$.

Correction

La fonction racine carrée est continue et positive sur $[0, 4]$: l'aire vaut $\dfrac{16}{3}$ u.a.

L'unité d'aire est le rectangle construit sur $\vec{i}$ et $\vec{j}$, d'aire $2 \times 3 = 6\ \mathrm{cm}^2$. Donc l'aire vaut $\dfrac{16}{3} \times 6 = 32\ \mathrm{cm}^2$.

Entre deux courbes

Propriété : Aire du domaine compris entre deux courbes

Le plan est muni d'un repère orthogonal. Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$, de courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

L'aire, en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \text{ u.a.}$$

En particulier, si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ u.a.

Démonstration

Idée de la preuve. On se ramène à F14 par une translation verticale, puis on découpe.

Étape 1. Cas $f \leq g$ sur $[a, b]$. La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$: elle y admet un minimum m (image d'un segment, chapitre de la continuité). Avec $k = -m$, les fonctions $f + k$ et $g + k$ sont positives sur $[a, b]$. La translation de vecteur $k\,\vec{j}$ ne change pas l'aire du domaine, qui est la différence des aires sous $\mathcal{C}_{g+k}$ et sous $\mathcal{C}_{f+k}$. Par F14 et F05, elle vaut $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Étape 2. Cas général. Si $f - g$ change de signe en un nombre fini de points de $[a, b]$, on découpe $[a, b]$ en ces points ; sur chaque morceau, l'étape 1 s'applique, et la relation de Chasles (F04) additionne les intégrales de $|f - g|$.

Étapes omises : l'invariance de l'aire par translation et son additivité, admises ; le cas d'une infinité de changements de signe.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

L'esquisse se ramène à l'aire sous une courbe. Une translation verticale rend les deux fonctions positives ; l'aire ne change pas, ce qui est admis. L'aire entre les courbes devient une différence de deux aires sous des courbes. Quand la différence change de signe, on découpe aux points de changement.

Vérifie : Une intégrale nulle

On a $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$. Quelle est l'aire du domaine limité par la courbe du cosinus, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \pi$?

A. 0 u.a.

Faux.

Le domaine n'est pas vide : la partie sous l'axe compte **positivement** dans l'aire.

B. 1 u.a.

Faux.

1 est l'aire d'une seule des deux parties.

C. 2 u.a.

Juste.

Juste : $1 + 1 = 2$.

D. π u.a.

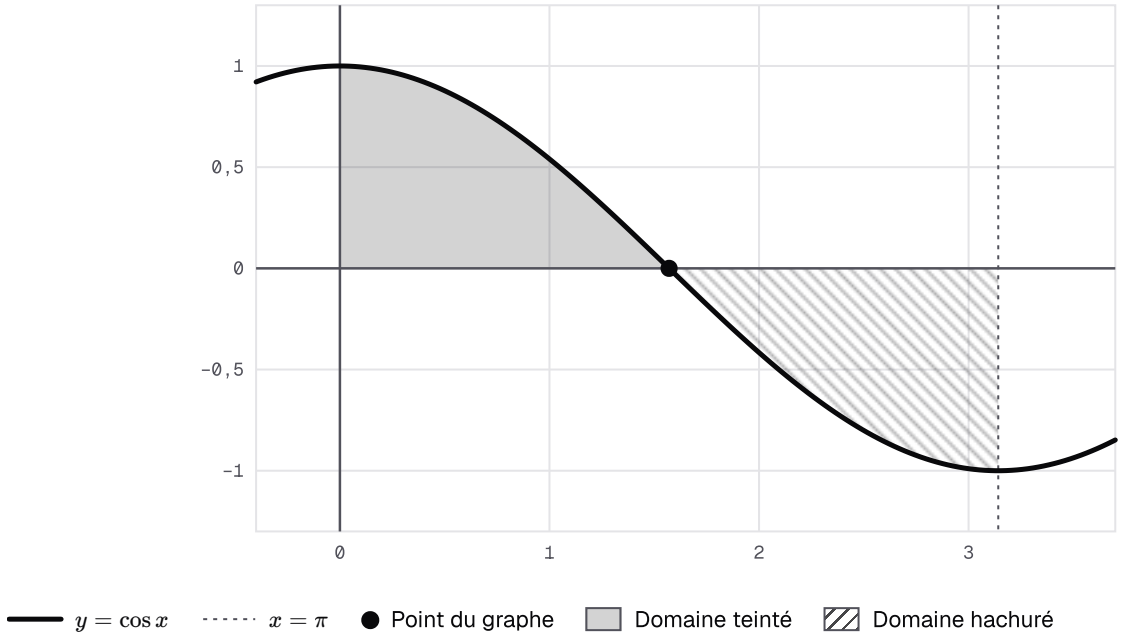
Faux.

π est la longueur de la base ; l'aire se calcule avec l'intégrale de $|\cos x|$.

Correction

Le cosinus est positif sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et négatif sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. L'aire vaut donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \,\mathrm{d}x = 1 - (-1) = 2 \text{ u.a.}$$



Courbe du cosinus sur [0, π] : le domaine teinté, au-dessus de l'axe, et le domaine hachuré, au-dessous, sont symétriques. Dans l'intégrale, ils se compensent ; dans l'aire, ils s'ajoutent.

Le signe d'abord, l'aire ensuite

Méthode : calculer l'aire d'un domaine plan

1. **Étudier le signe** de $f(x) - g(x)$ sur $[a, b]$; pour l'axe des abscisses, $g = 0$.
2. **Découper** $[a, b]$ aux points où ce signe change.
3. **Intégrer** sur chaque morceau la fonction du dessus moins celle du dessous.
4. **Donner l'unité** : u.a., puis cm^2 si le repère donne les longueurs de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

Rédaction attendue. « Les fonctions f et g sont continues sur $[a, b]$, et pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) - f(x) \geq 0$, donc $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ u.a. »

Exemple : Exemple guidé : entre une parabole et une droite

Énoncé. Calcule l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = x^2 - 1$ et la droite d'équation $y = x + 1$. Le repère est orthonormé, d'unité $2\ \mathrm{cm}$.

Signe. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}&(x+1)-(x^2-1)\\&=-x^2+x+2\\&=-(x+1)(x-2).\end{aligned}$$

Cette différence s'annule en -1 et en 2, et elle est positive sur $[-1,2]$: sur cet intervalle, la droite est au-dessus de la courbe. Les deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$.

Calcul.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,\mathrm{d}x\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-1}^{2}\\&=\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}\ \text{u.a.}\end{aligned}$$

Unité. Une unité d'aire vaut $2\times 2=4\ \mathrm{cm}^2$, donc $\mathcal{A}=18\ \mathrm{cm}^2$.



La parabole y = x² − 1 et la droite y = x + 1 se coupent aux points d'abscisses −1 et 2. Entre ces abscisses, la droite est au-dessus : le domaine a une aire de 9/2 u.a.

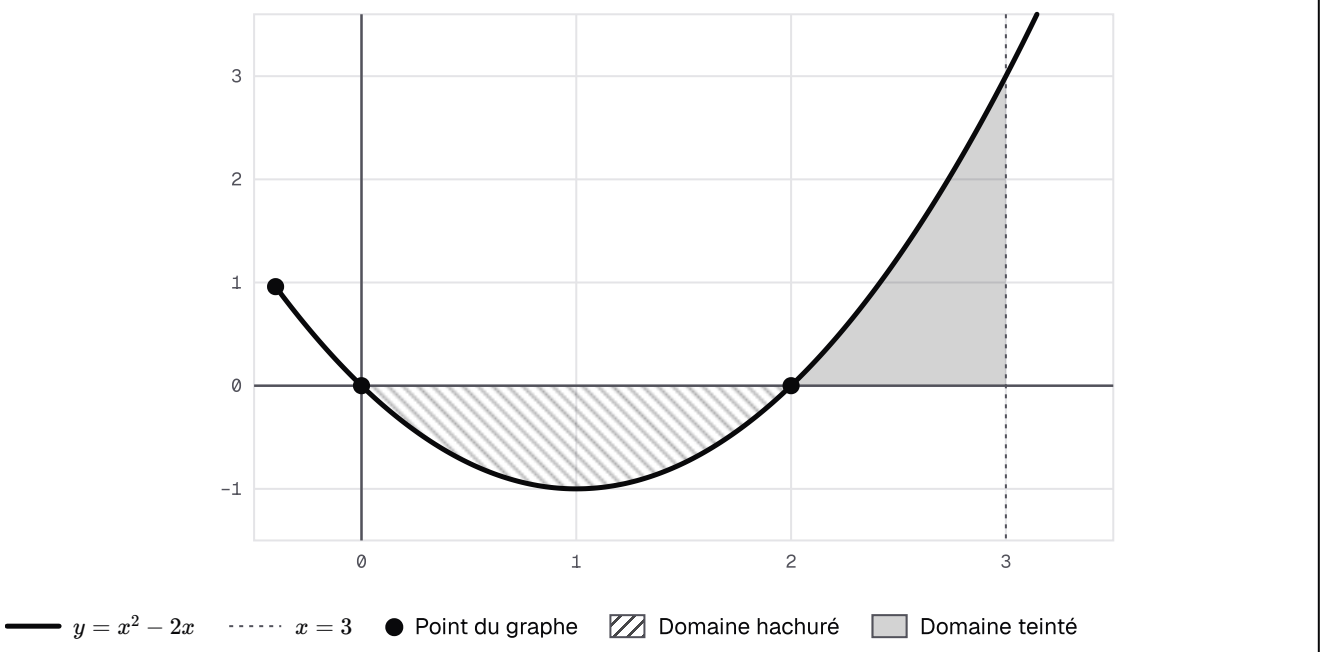
Le piège du signe

Attention : une intégrale n'est pas toujours une aire

X « L'aire entre la courbe de $x\mapsto x^2-2x$ et l'axe des abscisses, sur $[0,3]$, vaut $\displaystyle\int_0^3(x^2-2x)\,\mathrm{d}x=9-9=0$ ».

✓ La fonction est négative sur $[0, 2]$ et positive sur $[2, 3]$. On découpe :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= -\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_2^3 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}\ \text{u.a.}\end{aligned}$$



La parabole d'équation y = x² − 2x sur [0, 3] : le domaine hachuré est sous l'axe des abscisses, de 0 à 2 ; le domaine teinté est au-dessus, de 2 à 3. L'aire compte les deux, l'intégrale les soustrait.

À toi : Rédige un calcul d'aire

Rédige le calcul de l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = x^3$, la droite d'équation $y = 4x$ et les droites $x = 0$ et $x = 2$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Étudie le signe de $4x - x^3$ sur $[0, 2]$ en factorisant.

Indice 2

$4x - x^3 = x\,(2 - x)(2 + x)$.

Indice 3

Point délicat : termine par l'unité, u.a.

Réponse

Soit $x \in [0, 2]$. Alors $4x - x^3 = x\,(2 - x)(2 + x) \geq 0$: la droite est au-dessus de la courbe. Les deux fonctions sont continues sur $[0, 2]$.

Donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (4x - x^3)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2.$$

Conclusion. $\mathcal{A} = 8 - 4 = 4$ u.a.

Remarque : Coin examen : l'aire en fin de problème

Un calcul d'aire figure dans 8 des 16 sujets consultés. Une question type : « Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, la droite … et les droites d'équations $x = \ldots$ ».

Si la position relative est établie plus haut, cite-la, puis intègre et convertis.

Le signe d'abord : c'est lui qui sépare une aire juste d'une aire égale à zéro.

Volumes de révolution

Un empilement de disques

Devine : Un segment qui tourne

On fait tourner autour de l'axe des abscisses le domaine limité par la droite $y = 2$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 3$. D'après toi, quel est le volume du solide obtenu, en unités de volume ?

A. 6π

Faux.
Le rayon intervient au carré : $\pi \times 2^2 \times 3$.

B. 12π

Juste.
Juste : c'est un cylindre de rayon 2 et de hauteur 3.

C. 4π

Faux.
4π est l'aire d'un disque ; il faut encore multiplier par la hauteur 3.

D. 36π

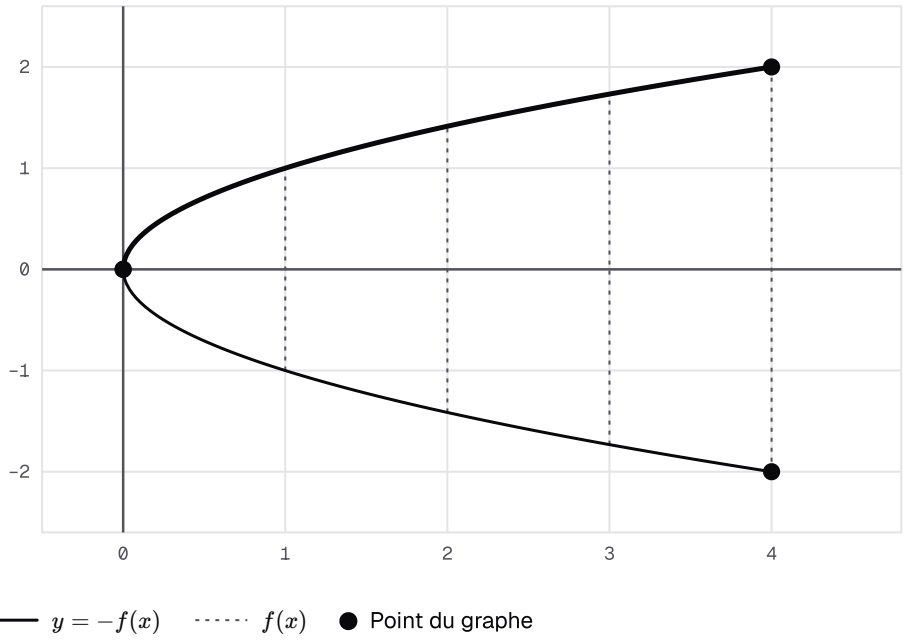
Faux.
C'est le rayon qui est au carré, pas la hauteur.

Correction
Ce rectangle décrit un cylindre de rayon 2 et de hauteur 3 : son volume vaut $\pi \times 2^2 \times 3 = 12\pi$ u.v.

On l'obtient aussi en intégrant l'aire $\pi \times 2^2$ d'une tranche :

$$\int_0^3 4\pi \,\mathrm{d}x = 12\pi.$$

Coupe un solide de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe : chaque tranche est un disque. Le volume s'obtient en intégrant l'aire de ces disques. C'est l'idée de l'énoncé suivant, présenté sous forme d'**esquisse**.



Profil d'un solide de révolution autour de l'axe des abscisses : la courbe de y = f(x), ici f(x) = √x sur [0, 4], et son reflet. Chaque segment vertical est un diamètre d'une tranche en disque, de rayon f(x).

Autour de l'axe des abscisses

Théorème : Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des abscisses

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'**unité de volume** (u.v.) est le volume du cube construit sur $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, avec $a < b$. Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$V = \int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x \text{ u.v.}$$

Démonstration

Idée de la preuve. On découpe le solide en tranches perpendiculaires à l'axe de rotation.

Étape 1. Le plan perpendiculaire à l'axe des abscisses au point d'abscisse x, avec $a \leq x \leq b$, coupe le solide selon un disque de rayon $|f(x)|$, d'aire $S(x) = \pi \left(f(x)\right)^2$.

Étape 2. Si f est constante, égale à r, le solide est un cylindre de volume $\pi\, r^2\, (b-a)$, qui est l'intégrale de S sur $[a, b]$ (F03) : la formule est exacte dans ce cas.

Étape omise : le principe selon lequel le volume d'un solide est l'intégrale de l'aire de ses sections, admis.

Remarque : ce qui est admis

Le programme ne définit pas le volume d'un solide quelconque. L'esquisse vérifie la formule pour un cylindre. Le principe selon lequel un volume est l'intégrale de l'aire de ses sections est **admis**.

Exemple : retrouver le cône et la boule

Cône. La rotation du domaine limité par la droite d'équation $y = \dfrac{x}{2}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 6$ donne un cône de rayon 3 et de hauteur 6. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ est continue sur $[0, 6]$, donc :

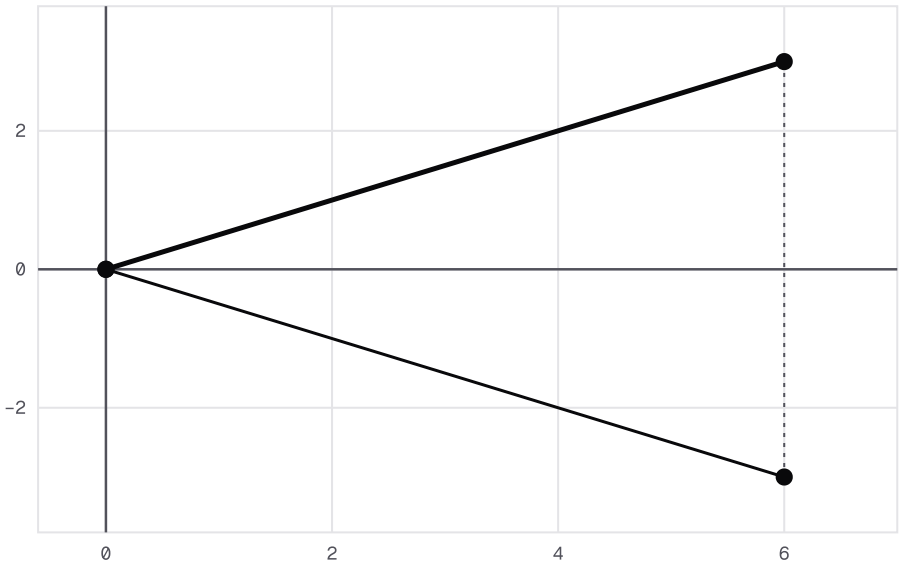
$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 \pi\, \frac{x^2}{4}\, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^6 = 18\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$

C'est bien $\dfrac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6$.

Boule. La rotation du domaine limité par la courbe d'équation $y = \sqrt{9 - x^2}$, pour $x \in [-3, 3]$, et l'axe des abscisses donne une boule de rayon 3. La fonction $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$ est continue sur $[-3, 3]$, donc :

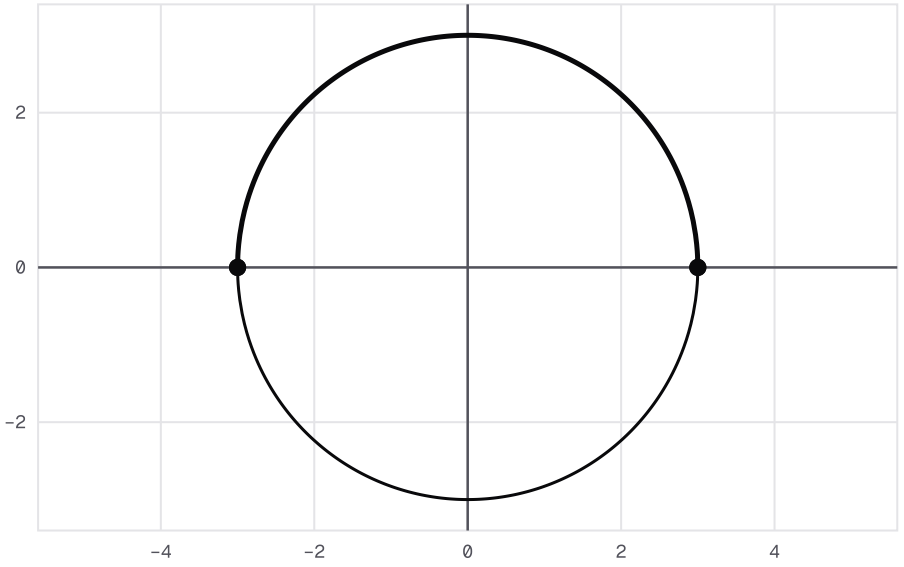
$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 \pi\, (9 - x^2)\, \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 \\ &= 36\pi \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

soit $\dfrac{4}{3}\pi \times 3^3$.



$y = \frac{x}{2}$ $y = -\frac{x}{2}$ $x = 6$ Point du graphe

Profil du cône de l'exemple : la droite y = x/2 de 0 à 6 et son reflet par rapport à l'axe des abscisses. La rotation donne un cône de sommet O, de hauteur 6 et de rayon de base 3.



$y = \sqrt{9 - x^2}$ $y = -\sqrt{9 - x^2}$ Point du graphe

Profil de la boule de l'exemple : le demi-cercle y = √(9 − x²) sur [−3, 3] et son reflet. En tournant autour de l'axe des abscisses, ce demi-disque engendre une boule de rayon 3.

Autour de l'axe des ordonnées

Théorème : Volume d'un solide de révolution autour de l'axe des ordonnées

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit g une fonction continue sur un segment $[c, d]$, avec $c < d$.

Le volume, en unités de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des ordonnées du domaine limité par la courbe d'équation $x = g(y)$, l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = c$ et $y = d$ est :

$$V = \int_c^d \pi \left(g(y)\right)^2 \mathrm{d}y \text{ u.v.}$$

Démonstration

Idée de la preuve. C'est F16 où les rôles des deux axes sont échangés.

Étape 1. Le plan perpendiculaire à l'axe des ordonnées au point d'ordonnée y, avec $c \leq y \leq d$, coupe le solide selon un disque de rayon $|g(y)|$, d'aire $\pi \left(g(y)\right)^2$.

Étape 2. On intègre l'aire de ces sections de c à d, comme dans F16.

Étape omise : le même principe des sections que pour F16, admis.

Méthode : calculer un volume de révolution

1. **Identifier l'axe** : $y = f(x)$ autour de l'axe des abscisses, ou $x = g(y)$ autour de l'axe des ordonnées ; pour obtenir g, résous $y = f(x)$ en x et précise l'intervalle de y.
2. **Écrire** l'intégrale de l'aire $\pi \left(f(x)\right)^2$, ou $\pi \left(g(y)\right)^2$, d'une section.
3. **Développer le carré** avant d'intégrer.
4. **Conclure** en u.v., puis en cm^3 si le repère le précise.

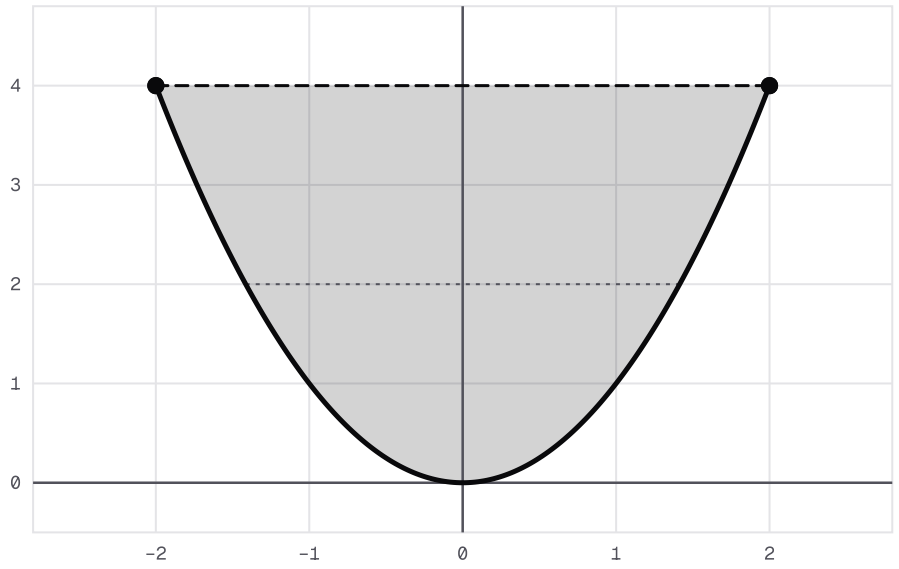
Rédaction attendue. « f est continue sur $[a, b]$, donc $V = \displaystyle\int_a^b \pi \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \ldots$ u.v. »

Exemple : une coupe parabolique

On part de l'arc de parabole $y = x^2$, avec $x \geq 0$. On fait tourner autour de l'axe des ordonnées le domaine limité par cet arc, l'axe des ordonnées et la droite $y = 4$.

On écrit l'arc sous la forme $x = g(y)$, avec $g : y \mapsto \sqrt{y}$, continue sur $[0, 4]$. Donc :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \left(\sqrt{y}\right)^2 \mathrm{d}y \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi \text{ u.v.} \end{aligned}$$



Coupe du solide de l'exemple par un plan contenant l'axe des ordonnées : l'arc y = x² et son reflet, fermés par la droite y = 4. Une tranche horizontale, à la hauteur y, est un disque de rayon g(y) = √y.

Le carré, et seulement lui

Attention : le carré porte sur la fonction

✗ « Le volume engendré par le domaine sous la droite $y = 1 + x$, pour $x \in [0, 2]$, vaut $\pi \left(\int_0^2 (1 + x)\,\mathrm{d}x \right)^2 = 16\pi$ ».

✓ On intègre l'aire de chaque disque, donc le carré de la fonction :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi\,(1 + x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{(1 + x)^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{26\pi}{3}\ \text{u.v.} \end{aligned}$$

Vérifie : Une rotation de l'exponentielle

Quel est le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine sous la courbe de l'exponentielle, pour $x \in [0, 1]$?

A. $\pi\,(e - 1)^2$ u.v.

Faux.

C'est le carré de l'intégrale ; il faut l'intégrale du carré.

B. $\pi\,(e - 1)$ u.v.

Faux.

Tu as oublié le carré de la fonction.

C. $\pi\,(e^2-1)$ u.v.

Faux.

Une primitive de $x \mapsto e^{2x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$: il manque $\dfrac{1}{2}$.

D. $\dfrac{\pi}{2}\,(e^2-1)$ u.v.

Juste.

Juste : $\pi\left[\dfrac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$.

Correction

L'exponentielle est continue sur $[0,1]$, et $(e^x)^2 = e^{2x}$ pour tout réel x. Donc :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\, e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\,(e^2-1)\ \text{u.v.} \end{aligned}$$

À toi : Rédige un volume

Rédige le calcul du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine sous une arche de sinus, pour $x \in [0,\pi]$. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Le volume vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \pi\,\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

Indice 2

Linéarise : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

Indice 3

Point délicat : $\sin(2\pi) = 0$; termine par l'unité.

Réponse

La fonction sinus est continue sur $[0,\pi]$, et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout réel x. Donc :

$$\begin{aligned} &V \\ &= \int_0^{\pi} \pi\,\sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi}. \end{aligned}$$

Conclusion. $V = \dfrac{\pi^2}{2}$ u.v.

Choisir sa technique

Vérifie : Une primitive qui se lit

Laquelle de ces intégrales se calcule directement avec une primitive de la forme $u' u$?

A. $\displaystyle\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$

Faux.

Aucun facteur u' n'apparaît : une intégration par parties est nécessaire.

B. $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x \,\mathrm{d}x$

Faux.

C'est un produit d'un polynôme et d'une exponentielle : intègre par parties.

C. $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

Faux.

Ici, on linéarise le carré.

D. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

Juste.

Juste : avec $u = \ln x$, la fonction vaut $u' u$.

Correction

Avec $u(x) = \ln x$, on a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$: la fonction s'écrit $x \mapsto u'(x)\, u(x)$, continue sur $]0, +\infty[$. Une primitive est $x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{2}$, donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{2}$.

Les trois autres demandent chacune une technique :

- $\ln x = 1 \times \ln x$ s'intègre par parties avec $u = \ln$ et $v' : x \mapsto 1$;
- $x\, e^x$ s'intègre par parties avec $u : x \mapsto x$;
- $\sin^2 x$ se linéarise d'abord.

Vérifie : La première étape

Quelle est la première étape pour calculer $\displaystyle\int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x$?

A. Intégrer par parties, avec $u : x \mapsto x$ et $v' = \sin$.

Juste.

Juste : $u' = 1$, et il reste l'intégrale de $\cos$.

B. Linéariser le produit, comme une puissance de sinus.

Faux.

La linéarisation sert aux puissances de sinus et de cosinus, pas à un produit par un polynôme.

C. Lire la primitive $x \mapsto -x\cos x$.

Faux.

Sa dérivée vaut $-\cos x + x\sin x$: il reste un terme en trop.

D. Changer de variable avec $t = x^2$.

Faux.

Rien dans l'intégrale ne fait apparaître $2x$ en facteur de t : ce changement ne simplifie pas.

Correction

C'est un produit d'un polynôme par un sinus. Avec $u : x \mapsto x$ et $v' = \sin$, on a $u' : x \mapsto 1$ et $v = -\cos$, dérivables sur $\mathbb{R}$, à dérivées continues. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

Devant une intégrale, pose-toi quatre questions, dans l'ordre :

1. **Une primitive se lit-elle** dans le tableau, avec une forme $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$ ou $u'e^u$?
2. **Une puissance de sinus ou de cosinus ?** Linéarise.
3. **Un produit** d'un polynôme par une exponentielle, un sinus ou un logarithme ? Intègre par parties.
4. **Une racine, ou un changement proposé ?** Change de variable.

Exemple **: Exemple guidé : linéariser un carré**

Énoncé. Calcule $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Linéariser. D'après la formule de duplication vue en 1re, pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

Calculer.

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exemple **: une intégration par parties au service d'une aire**

Énoncé. Calcule l'aire du domaine limité par la courbe de $x \mapsto (x-1)\ln x$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$.

Signe. Soit $x \in [1, e]$. Alors $x - 1 \geq 0$ et $\ln x \geq 0$: la fonction est positive sur $[1, e]$, et elle y est continue.

Par parties. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x - 1$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2} - x$. Ces fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$, à dérivées continues :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \Big[\Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\ln x\Big]_1^e \\ &\quad - \int_1^e \Big(\frac{x}{2} - 1\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \Big(\frac{e^2}{4} - e + \frac{3}{4}\Big) \\ &= \frac{e^2 - 3}{4}\ \text{u.a.}\end{aligned}$$

À toi : Rédige : choisis ta technique

Rédige le calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x$, en choisissant la technique. Écris ta rédaction avant de dévoiler la correction.

Indice 1

Écris $\sin^3 x = \sin x\,(1 - \cos^2 x)$.

Indice 2

$-\sin x \cos^2 x$ est de la forme $u'\,u^2$ avec $u = \cos x$.

Indice 3

Point délicat : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\cos 0 = 1$.

Réponse

La fonction $x \mapsto \sin^3 x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin x\,(1 - \cos^2 x) \\ &= \sin x - \sin x \cos^2 x.\end{aligned}$$

Une primitive est $x \mapsto -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$. Donc :

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ce que tu sais faire et démontrer

À retenir

- Pour f continue sur un intervalle qui contient a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, pour n'importe quelle primitive F.
- Chasles et la linéarité découpent ; positivité et comparaison exigent $a \leq b$.
- Pour $a < b$, $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur prise par f sur $[a, b]$.
- Par parties : poser u et v', vérifier les hypothèses, crochet **moins** intégrale.
- Changement de variable : hypothèses sur φ, nouvelles bornes, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Aire : le signe d'abord, l'unité à la fin. Volume : l'intégrale du carré, multipliée par π.

Le mot du prof. Tu sais maintenant mesurer ce qui s'accumule, et tu sais pourquoi chaque formule de calcul est vraie. Au chapitre suivant, la borne de l'intégrale deviendra une variable : tu étudieras des fonctions et des suites définies par une intégrale.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul intégral » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)