BURHAN

Calcul des probabilités : Résumé

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/resume

Chapitre	Semestre
Calcul des probabilités	Semestre 2

L'essentiel en une page

Ce chapitre calcule des probabilités sur un univers fini. Tout part d'un modèle : l'univers, puis le poids de chaque issue. À l'examen, chaque calcul commence par une phrase qui nomme ce modèle.

Événement contraire

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Réunion de deux événements

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Équiprobabilité

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

k objets parmi n : avec remise, sans remise, simultanément

$$n^k, \quad A_n^k, \quad C_n^k$$

Probabilité de B sachant A, si p(A) est non nul

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Probabilités totales avec A et son contraire, si 0 < p(A) < 1

$$p(B) = p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$$

Indépendance de A et B

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Loi binomiale de paramètres n et p

$$p(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Variance

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Paramètres de la loi binomiale

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$$

Fonction de répartition

$$F(x) = p(X \leq x)$$

> **À retenir : Le fil d'un exercice de probabilités**
>
> 1. **Le modèle** : équiprobabilité et modèle de tirage, ou épreuves indépendantes.
> 2. **Les événements** : contraire, réunion, intersection, conditionnement.
> 3. **La variable aléatoire** : sa loi en tableau, de somme 1.
> 4. **Les paramètres** : $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$, puis la fonction de répartition.
>
> Chaque étape se termine par une phrase de conclusion.

Univers, événements, probabilité

En clair : une issue est un résultat possible. Un événement est un ensemble d'issues. Une probabilité donne à chaque issue un poids positif, et la somme des poids vaut 1. La probabilité d'un événement additionne les poids de ses issues.

Définition : Expérience aléatoire, univers et événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les issues possibles, sans pouvoir prévoir celle qui se réalisera. L'ensemble de ses issues est l'**univers**, noté Ω ; dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini non vide.

1. Un **événement** est une partie de Ω. L'événement A est **réalisé** si l'issue obtenue appartient à A.
2. Un **événement élémentaire** est un événement qui contient une seule issue : $\{\omega\}$, avec $\omega \in \Omega$.
3. Ω est l'**événement certain** ; $\emptyset$ est l'**événement impossible**.

Définition : Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

1. L'événement « A et B » est l'intersection $A \cap B$; l'événement « A ou B » est la réunion $A \cup B$.
2. L'**événement contraire** de A est $\overline{A} = \Omega \setminus A$: il est réalisé exactement quand A ne l'est pas.
3. A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.
4. On dit que A **implique** B si $A \subset B$.

Définition : Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ un univers fini. Définir une **probabilité** p sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un réel $p(\{\omega_i\})$, de sorte que $p(\{\omega_i\}) \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et :

$$p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \cdots + p(\{\omega_n\}) = 1.$$

La **probabilité d'un événement** A non vide, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des issues qui appartiennent à A ; on pose $p(\emptyset) = 0$. Le couple (Ω, p) est un **espace probabilisé fini**.

Propriété : Règles de calcul des probabilités

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

1. $0 \leq p(A) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

4. Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$.

Propriété : Probabilité de la réunion de deux événements

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. Alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Exemple : Romans et théâtre

Dans une classe d'Agadir, on choisit un élève au hasard. Soient L « il lit des romans » et T « il fait du théâtre ». On sait que $p(L) = \frac{1}{2}$, $p(T) = \frac{1}{3}$ et $p(L \cup T) = \frac{3}{4}$.

La formule de la réunion donne $p(L \cap T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$. Par la règle du contraire, l'élève ne fait ni l'un ni l'autre avec la probabilité $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Méthode : Passer par le contraire

1. **Repère** les mots « au moins un », « au plus », « pas tous ».
2. **Écris** l'événement contraire en une phrase : « au moins un » a pour contraire « aucun ».
3. **Calcule** la probabilité du contraire.
4. **Conclus** par $p(A) = 1 - p(\overline{A})$, en citant la règle du contraire.

Équiprobabilité et modèles de tirage

Définition : Hypothèse d'équiprobabilité

Soit Ω un univers fini de cardinal n. On dit qu'il y a **équiprobabilité**, ou que p est la **probabilité uniforme** sur Ω, si toutes les issues ont la même probabilité :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad p(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

Des expressions comme « au hasard », « dé équilibré » ou « boules indiscernables au toucher » traduisent cette hypothèse.

Propriété : Probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité

Soit Ω un univers fini muni de la probabilité uniforme. Pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Rappel de 1BAC. Parmi n objets, $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ compte les listes ordonnées de k objets distincts. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$ compte les parties à k éléments. Ainsi $A_9^2 = 72$, $C_9^2 = 36$ et $C_9^3 = 84$.

Propriété : Cardinal de l'univers dans les trois modèles de tirage

On tire k objets parmi n objets discernables, où n et k sont des entiers naturels non nuls, avec $k \leq n$ pour un tirage sans remise ou simultané. L'univers Ω des issues vérifie :

1. pour k tirages **successifs avec remise**, une issue est une liste ordonnée de k objets, répétitions permises : $\text{card}(\Omega) = n^k$;
2. pour k tirages **successifs sans remise**, une issue est une liste ordonnée de k objets distincts : $\text{card}(\Omega) = A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$;
3. pour un tirage **simultané** de k objets, une issue est une partie à k éléments : $\text{card}(\Omega) = C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Méthode : Méthode d'examen : le modèle de tirage

1. **Cite** le mot qui donne l'équiprobabilité : « au hasard », « indiscernables au toucher ».
2. **Choisis le modèle** : l'ordre compte-t-il ? Y a-t-il remise ?
3. **Compte** $\text{card}(\Omega)$ et $\text{card}(A)$ dans ce seul modèle.
4. **Conclus** par le quotient des cardinaux, puis simplifie.

Rédaction attendue. Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : 5 verts et 4 jaunes. On en tire 3 simultanément.

« Les jetons sont indiscernables au toucher : les $C_9^3 = 84$ tirages sont équiprobables. L'événement « exactement deux verts » compte $C_5^2 \times C_4^1 = 40$ tirages. Sa probabilité vaut donc $\dfrac{40}{84} = \dfrac{10}{21}$. »

Exemple : Un sac, trois modèles

Dans le même sac, on tire cette fois 2 jetons. Soit M l'événement « les deux jetons ont la même couleur ».

Modèle	$\text{card}(\Omega)$	$\text{card}(M)$	$p(M)$
simultané	$C_9^2 = 36$	$C_5^2 + C_4^2 = 16$	$\dfrac{4}{9}$
successifs sans remise	$A_9^2 = 72$	$A_5^2 + A_4^2 = 32$	$\dfrac{4}{9}$

Modèle	$\mathrm{card}(\Omega)$	$\mathrm{card}(M)$	$p(M)$
successifs avec remise	$9^2 = 81$	$5^2 + 4^2 = 41$	$\frac{41}{81}$

Les deux premières lignes donnent la même valeur. La troisième diffère : remettre le jeton change l'expérience.

Conditionnement, arbre et probabilités totales

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Pour tout événement B, la **probabilité de B sachant A** est le réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Propriété : La probabilité sachant un événement est une probabilité

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. L'application $B \mapsto p_A(B)$ est une probabilité sur Ω. En particulier, $p_A(A) = 1$ et, pour tout événement B, $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

Propriété : Formule des probabilités composées

Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé fini (Ω, p).

1. Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
2. Si $p(A \cap B) \neq 0$, alors $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p_A(B) \times p_{A \cap B}(C)$.

Définition : Système complet d'événements

Soient Ω un univers fini, m un entier tel que $m \geq 2$, et $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des événements. On dit qu'ils forment un **système complet d'événements** de Ω si :

1. ils sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$;
2. leur réunion est l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$.

Par exemple, pour tout événement A, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet.

Théorème : Formule des probabilités totales

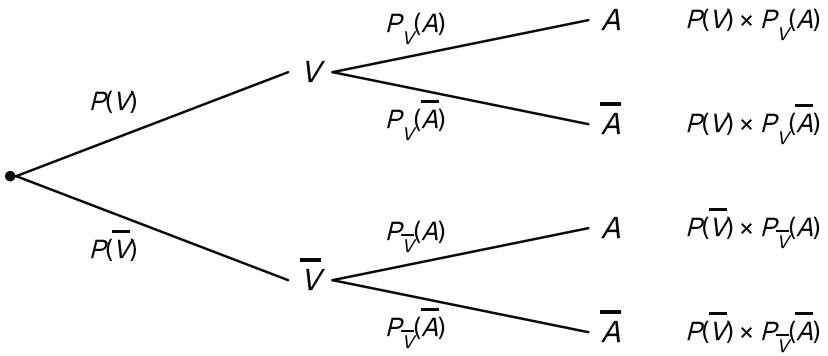
Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_m$ un système complet d'événements tels que $p(A_i) \neq 0$ pour tout i. Pour tout événement B :

$$\begin{aligned} p(B) = {} & p(A_1)\, p_{A_1}(B) \\ & + p(A_2)\, p_{A_2}(B) \\ & + \cdots + p(A_m)\, p_{A_m}(B). \end{aligned}$$

En particulier, si $0 < p(A) < 1$: $p(B) = p(A)\, p_A(B) + p(\overline{A})\, p_{\overline{A}}(B)$.

Méthode : Méthode d'examen : arbre, probabilités totales, inversion

1. **Nomme** le système complet du premier niveau, par exemple V et $\overline{V}$, de probabilités non nulles.
2. **Écris l'arbre** en liste : au premier niveau $p(V)$, au second des probabilités sachant, comme $p_V(A)$.
3. **Contrôle** chaque nœud : ses branches ont pour somme 1.
4. **Calcule** $p(A)$ par la formule des probabilités totales, en nommant le système complet.
5. **Inverse** : $p_A(V) = \dfrac{p(V \cap A)}{p(A)}$, avec $p(A) \neq 0$, puis conclus en nommant l'événement connu.



Le schéma de la méthode : au premier niveau, le système complet formé de V et de son contraire ; au second, des probabilités sachant. Les chemins qui se terminent par A donnent p(A) par la formule des probabilités totales.

Exemple : Deux vergers

Une coopérative d'Agadir reçoit ses oranges de deux vergers. On choisit une orange au hasard. Soient V « elle vient du premier verger » et A « elle est abîmée ».

- V : $\dfrac{3}{4}$
  - A : $\dfrac{1}{20}$; $\overline{A}$: $\dfrac{19}{20}$
- $\overline{V}$: $\dfrac{1}{4}$
  - A : $\dfrac{1}{10}$; $\overline{A}$: $\dfrac{9}{10}$

V et $\overline{V}$ forment un système complet, de probabilités non nulles. Les probabilités totales donnent alors :

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{20} \\ &\quad + \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{80} + \frac{2}{80} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Comme $p(A) \neq 0$, sachant l'orange abîmée, $p_A(V) = \frac{3}{80} \times 16 = \frac{3}{5}$.

Indépendance de deux événements

Définition : Événements indépendants

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Propriété : Indépendance et probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini, avec $p(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si, et seulement si :

$$p_A(B) = p(B).$$

Propriété : Indépendance et événements contraires

Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Méthode : Méthode d'examen : prouver l'indépendance

1. **Calcule** séparément $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$, dans un modèle nommé.
2. **Compare** $p(A \cap B)$ au produit $p(A) \times p(B)$.
3. **Conclus** : égalité, donc indépendants ; sinon, non indépendants.

Rédaction attendue. On choisit au hasard un entier entre 1 et 20. Soient D « il est pair » et C « il est multiple de 5 ».

« Les 20 entiers sont équiprobables. On a $p(D) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ et $p(C) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$. Or $D \cap C = \{10, 20\}$, donc $p(D \cap C) = \frac{1}{10} = p(D) \times p(C)$. Les événements D et C sont indépendants. »

Exemple : Un cas sans indépendance

Avec le même entier, soit I « il est inférieur ou égal à 5 ». On a $p(I) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$ et $D \cap I = \{2, 4\}$. Donc $p(D \cap I) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$, alors que $p(D) \times p(I) = \dfrac{1}{8}$. Les événements D et I ne sont pas indépendants.

Exemple : Passer aux contraires

Soient A et B deux événements indépendants, avec $p(A) = \dfrac{1}{3}$ et $p(B) = \dfrac{3}{4}$. D'après la propriété « Indépendance et événements contraires », leurs contraires sont aussi indépendants : $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$. L'un au moins des deux est donc réalisé avec la probabilité $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Épreuves répétées et loi binomiale

Définition : Épreuves indépendantes

Une expérience aléatoire est formée de n épreuves successives ($n \geq 1$), la k-ième ayant un univers fini Ω_k muni d'une probabilité p_k. On dit que ces épreuves sont **indépendantes** si l'on modélise l'expérience par l'univers des listes $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, avec $\omega_k \in \Omega_k$, muni de la probabilité :

$$\begin{aligned} &p\big(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\}\big) \\ &= p_1(\{\omega_1\}) \times p_2(\{\omega_2\}) \\ &\quad \times \cdots \times p_n(\{\omega_n\}). \end{aligned}$$

On choisit ce modèle quand l'issue d'une épreuve n'influe pas sur les autres : lancers successifs d'un dé, tirages successifs avec remise. Pour $n = 1$, ce modèle est celui de l'unique épreuve.

Définition : Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$.

1. Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'**échec**, de probabilité $1 - p$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.

Théorème : Probabilité d'obtenir exactement k succès

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir exactement k succès est :

$$C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Définition : Loi binomiale

Soient n un entier naturel non nul et p un réel tel que $0 < p < 1$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ et, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$p(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}.$$

Propriété : Nombre de succès dans un schéma de Bernoulli

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

Propriété : Espérance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

Propriété : Variance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Méthode : Méthode d'examen : justifier une loi binomiale

1. **L'épreuve** : décris une épreuve et nomme le succès.
2. **Le paramètre** : donne p, la probabilité du succès, avec sa justification.
3. **La répétition** : donne le nombre n d'épreuves, identiques et indépendantes, comme des lancers ou des tirages avec remise.
4. **La conclusion** : « X, nombre de succès, suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ ».
5. **Les calculs** : $p(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exemple : Des boîtes mal fermées

Une machine ferme des boîtes. Chaque boîte est mal fermée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, indépendamment des autres. On contrôle 4 boîtes ; X compte les boîtes mal fermées.

L'épreuve « contrôler une boîte » a pour succès « elle est mal fermée », de paramètre $p = \frac{1}{10}$. Elle est répétée 4 fois, de façon indépendante. Donc X suit la loi $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{10}\right)$.

Ainsi $p(X=1) = 4 \times \dfrac{1}{10} \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 = \dfrac{729}{2500}$, $E(X) = \dfrac{2}{5}$ et $V(X) = \dfrac{9}{25}$.

Exemple : Au moins un succès

Avec la même machine, « au moins une boîte mal fermée » est le contraire de $(X = 0)$. Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 \\ &= 1 - \frac{6561}{10000} \\ &= \frac{3439}{10000}. \end{aligned}$$

Un seul calcul remplace la somme de quatre probabilités.

Variable aléatoire, loi et paramètres

Définition : Variable aléatoire

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini. Une **variable aléatoire** réelle est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses valeurs est noté $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Pour tous réels a et b :

1. $(X = a)$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$;
2. $(X \leq a)$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$; on définit de même $(X < a)$, $(X \geq a)$, $(X > a)$ et $(a < X \leq b)$.

Définition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, p), de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. **Déterminer la loi de probabilité** de X, c'est donner, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, le réel $p_i = p(X = x_i)$. On la présente dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Propriété : Somme des probabilités d'une loi

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. Alors :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1.$$

Plus généralement, pour toute partie non vide J de $\{1, \dots, m\}$, la probabilité que X prenne une valeur x_i avec $i \in J$ est la somme des p_i pour $i \in J$.

Définition : Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. L'**espérance mathématique** de X est le réel :

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 p_1 + x_2 p_2 \\ &\quad + \cdots + x_m p_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i p_i. \end{aligned}$$

Définition : Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. La **variance** de X est le réel positif

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} \big(x_i - E(X)\big)^2 p_i,$$

et l'**écart-type** de X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété : Calcul pratique de la variance

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. On note $E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i$. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2.$$

Propriété : Espérance et variance de aX + b

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, p), a et b deux réels, et $Y = aX + b$ la variable aléatoire $\omega \mapsto aX(\omega) + b$. Alors :

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= aE(X) + b, \\ V(aX + b) &= a^2 V(X), \\ \sigma(aX + b) &= |a|\, \sigma(X). \end{aligned}$$

Méthode : Méthode d'examen : loi et paramètres

1. **Liste** les valeurs de X dans l'ordre croissant.
2. **Pour chaque valeur**, décris l'événement $(X = x_i)$ par une phrase, puis calcule sa probabilité.

3. **Présente** la loi en tableau et vérifie que la somme vaut 1.
4. **Calcule** $E(X)$, puis $E(X^2)$, puis $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$; contrôle que $V(X) \geq 0$.
5. **Termine** par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, en valeur exacte.

Exemple : Le gain de deux lancers

On lance deux fois une pièce équilibrée. Chaque Pile rapporte 3 dirhams, chaque Face en coûte 2. Les 4 couples sont équiprobables, et le gain G vaut -4, 1 ou 6.

x_i	-4	1	6
$p(G = x_i)$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

On trouve $E(G) = -1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 1$ et $E(G^2) = 4 + \dfrac{1}{2} + 9 = \dfrac{27}{2}$. Donc $V(G) = \dfrac{27}{2} - 1 = \dfrac{25}{2}$ et $\sigma(G) = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Exemple : Doubler le gain, puis retirer une mise

Soit $Y = 2G - 3$. D'après les formules pour $aX + b$, $E(Y) = 2 \times 1 - 3 = -1$ et $V(Y) = 4 \times \dfrac{25}{2} = 50$. L'écart-type double : $\sigma(Y) = 5\sqrt{2}$.

Fonction de répartition

Définition : Fonction de répartition

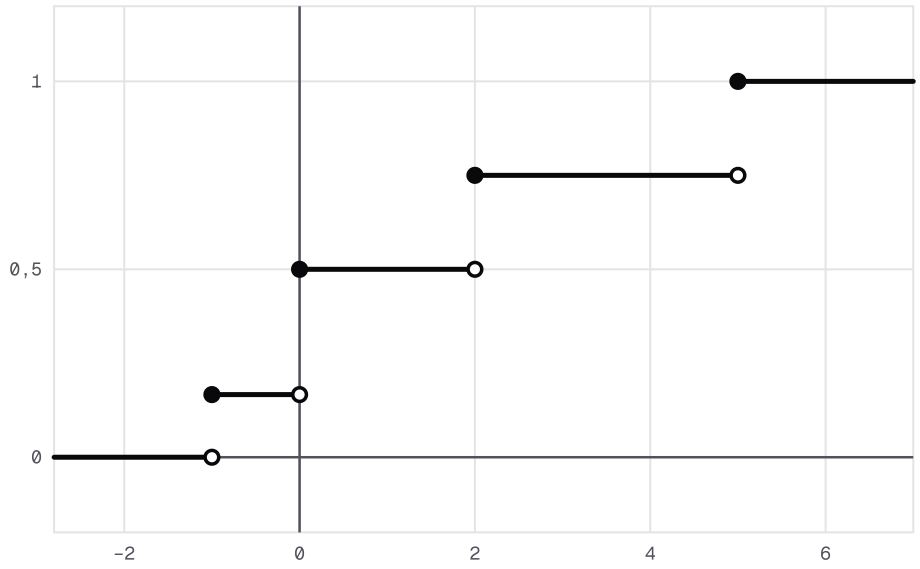
Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. La **fonction de répartition** de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = p(X \leq x).$$

Propriété : Expression et propriétés de la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$, et F sa fonction de répartition.

1. Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$; si $x \geq x_m$, alors $F(x) = 1$.
2. Pour $1 \leq i \leq m - 1$ et $x_i \leq x < x_{i+1}$: $F(x) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$.
3. F est croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0, 1]$, et constante sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $[x_i, x_{i+1}[$ et $[x_m, +\infty[$: c'est une fonction en escalier.



$y = F(x)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Exemple de fonction de répartition pour une variable de valeurs –1, 0, 2 et 5 : F part de 0, monte par sauts aux valeurs de X, et vaut 1 à partir de la plus grande.

Borne exclue en x = –1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,166667.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,5.

Borne exclue en x = 5 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,75.

Propriété : Probabilités calculées avec la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ et F sa fonction de répartition.

1. Pour tous réels a et b tels que $a < b$: $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ et $p(X > a) = 1 - F(a)$.
2. $p(X = x_1) = F(x_1)$ et, pour $2 \leq i \leq m$, $p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Méthode : Méthode d'examen : la fonction de répartition

1. **Range** les valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ et rappelle la loi.
2. **Découpe** $\mathbb{R}$ en intervalles fermés à gauche : $]-\infty, x_1[$, $[x_1, x_2[$, et ainsi de suite jusqu'à $[x_m, +\infty[$.
3. **Cumule** : sur $[x_i, x_{i+1}[$, on a $F(x) = p_1 + \cdots + p_i$.
4. **Contrôle** : F vaut 0 au début et 1 à la fin ; son saut en x_i vaut p_i.

Exemple : La répartition du gain

Pour le gain G des deux lancers :

x	$]-\infty,-4[$	$[-4,1[$	$[1,6[$	$[6,+\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Alors $p(G>1)=1-F(1)=\frac{1}{4}$ et $p(-4<G\leq 6)=F(6)-F(-4)=\frac{3}{4}$.

Pièges classiques

Attention : Incompatibles, donc indépendants ?

On lance un dé équilibré à six faces. Les événements A « 1 ou 2 » et B « 5 ou 6 » sont incompatibles : $p(A\cap B)=0$. Or $p(A)\times p(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Ils ne sont donc pas indépendants.

Ne déduis jamais l'une de ces propriétés de l'autre : seul le calcul tranche.

Attention : Échanger les deux événements

Pour les vergers, $p_V(A)=\frac{1}{20}$, mais $p_A(V)=\frac{3}{5}$. Ces deux nombres répondent à deux questions différentes. L'événement qui conditionne s'écrit en indice et se place au dénominateur.

Attention : Deux modèles dans un même calcul

On tire simultanément 2 jetons du sac de 9 jetons. Pour « deux jetons verts », compter Ω par $C_9^2=36$ et l'événement par $A_5^2=20$ donne $\frac{5}{9}$: c'est faux. Dans le seul modèle simultané, l'événement compte $C_5^2=10$ tirages, et sa probabilité vaut $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

Attention : Une loi binomiale sans remise

Tirer deux jetons du même sac **sans remise** ne forme pas un schéma de Bernoulli. La probabilité de deux jetons verts vaut $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$, et non $\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{25}{81}$. La loi binomiale exige des épreuves indépendantes.

Attention : Inégalité stricte et fonction de répartition

Pour le gain G, on a $p(G<1)=p(G=-4)=\frac{1}{4}$, alors que $F(1)=p(G\leq 1)=\frac{3}{4}$. Une inégalité stricte exclut la valeur elle-même : ici $p(G<1)=F(-4)$.

Attention : La variance d'une transformation affine

Avec $V(G) = \frac{25}{2}$, la variable $2G - 3$ a pour variance $2^2 \times \frac{25}{2} = 50$. Ce n'est pas $2 \times \frac{25}{2} - 3 = 22$. La constante -3 décale les valeurs sans changer leur dispersion.

Avant l'examen

- L'équiprobabilité est justifiée par un mot de l'énoncé.
- L'univers et l'événement sont comptés dans le même modèle de tirage.
- Chaque probabilité sachant précise l'événement qui conditionne, de probabilité non nulle.
- La formule des probabilités totales nomme son système complet.
- L'indépendance est prouvée par un calcul, jamais par l'incompatibilité.
- La loi binomiale nomme l'épreuve, le succès, p, n et l'indépendance.
- Chaque loi a une somme égale à 1.
- La fonction de répartition se lit sur des intervalles fermés à gauche.

À l'examen. La répétition d'épreuves de type binomial figure dans 2 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), uniquement en rattrapage. La loi n'y est pas nommée : c'est à toi de reconnaître un schéma de Bernoulli, puis de le justifier.