BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Trois boules tirées d'un coup

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : trois boules blanches et quatre boules noires. On tire simultanément trois boules de l'urne.

On rappelle que, pour des entiers $0 \leq k \leq n$, le nombre $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ compte les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

1. 0,5 pts

Montre que l'univers Ω compte 35 tirages équiprobables. Montre ensuite que la probabilité de l'événement A « les trois boules ont la même couleur » est égale à $\dfrac{1}{7}$.

INDICE

Un tirage simultané est une partie à 3 éléments. Pour A, sépare deux cas incompatibles : trois blanches, ou trois noires.

2. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement B « au moins une des boules tirées est blanche ».

INDICE

Passe par l'événement contraire : aucune boule blanche n'est tirée.

3. 0,5 pts

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Montre que $p(X = 2) = \dfrac{12}{35}$.

INDICE

Choisis d'abord les deux boules blanches, puis la boule noire, et applique le principe multiplicatif.

4. 0,75 pts

Détermine la loi de probabilité de X, puis vérifie que la somme des probabilités obtenues vaut 1.

INDICE

X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. Compte chaque événement $(X = k)$ comme à la question 3.

5. 0,75 pts

Calcule l'espérance mathématique $E(X)$, puis interprète ce nombre.

INDICE

Écris les quatre produits $x_i\,p(X = x_i)$ avant de les additionner.

Exercice 2 3 pts

Quatre tirages avec remise

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux boules jaunes et trois boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace. On réalise ainsi quatre tirages.

On rappelle que, dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la probabilité d'obtenir exactement k succès est $C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$, pour $0 \leq k \leq n$.

1. 0,75 pts

Dans cette question, on ne regarde que les deux premiers tirages. Soient J_1 « la première boule est jaune » et J_2 « la deuxième boule est jaune ». Montre que $p(J_1 \cap J_2) = \dfrac{4}{25}$, puis que J_1 et J_2 sont indépendants.

INDICE

Une issue des deux premiers tirages est un couple de boules, avec répétition permise. Compare ensuite $p(J_1 \cap J_2)$ au produit $p(J_1) \times p(J_2)$.

2. 0,5 pts

On note X le nombre de boules jaunes obtenues au cours des quatre tirages. Montre que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$, $p(X = k) = C_4^k \left(\dfrac{2}{5}\right)^k \left(\dfrac{3}{5}\right)^{4-k}$.

INDICE

Quelle épreuve est répétée, et quel est son succès ? Les tirages sont-ils identiques et indépendants ?

3. 0,75 pts

Montre que $p(X = 1) = p(X = 2) = \dfrac{216}{625}$.

INDICE

Applique le rappel de l'énoncé avec $k = 1$, puis avec $k = 2$. On a $C_4^1 = 4$ et $C_4^2 = 6$.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule jaune au cours des quatre tirages.

INDICE

L'événement contraire de « au moins une jaune » est « aucune jaune ».

5. 0,5 pts

Déduis des questions 3 et 4 la probabilité d'obtenir au moins deux boules jaunes.

INDICE

Découpe l'événement $(X \geq 1)$ en deux événements incompatibles, dont $(X = 1)$.

Exercice 3 3 pts

Deux jetons, sans remise

Un sac contient huit jetons indiscernables au toucher : cinq jetons verts et trois jetons rouges. On tire un jeton au hasard et on ne le remet pas dans le sac. Puis on tire au hasard un second jeton. On note V_1 l'événement « le premier jeton est vert » et V_2 l'événement « le second jeton est vert ».

On rappelle la formule des probabilités totales : si $0 < p(A) < 1$, alors pour tout événement B, on a $p(B) = p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$.

1. 0,5 pts

Écris, sous forme de liste, l'arbre pondéré de cette expérience. Montre ensuite que $p(V_1 \cap V_2) = \dfrac{5}{14}$.

INDICE

Après un premier jeton vert, il reste 7 jetons, dont 4 verts. Multiplie ensuite le long du chemin.

2. 0,5 pts

Retrouve le résultat de la question 1 par un dénombrement, en prenant pour issues les listes ordonnées de deux jetons distincts.

INDICE

Compte les listes ordonnées de 2 jetons parmi 8, puis celles de 2 jetons verts parmi 5.

3. 0,75 pts

Montre que $p(V_2) = \dfrac{5}{8}$.

INDICE

Quel système complet vois-tu au premier tirage ?

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

INDICE

Deux chemins de l'arbre conviennent, et ils correspondent à des événements incompatibles.

5. 0,75 pts

On constate que le second jeton tiré est vert. Quelle est la probabilité que le premier jeton tiré ait été rouge ?

INDICE

Quel événement est connu ? Il se place au dénominateur.

Exercice 4 3 pts

Une pièce qui préfère Pile

Une pièce de monnaie est truquée : en un lancer, la probabilité d'obtenir Pile est le triple de la probabilité d'obtenir Face. On lance cette pièce trois fois, et les lancers sont indépendants. On note X le nombre de Pile obtenus.

On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$.

1. 0,25 pts

Montre qu'en un lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à $\frac{3}{4}$.

INDICE

Note q la probabilité d'obtenir Face : les probabilités des deux issues ont pour somme 1.

2. 0,5 pts

Montre que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{4}\right)$.

INDICE

Nomme l'épreuve, le succès, son paramètre, le nombre d'épreuves, puis l'hypothèse d'indépendance.

3. 0,75 pts

Détermine la loi de probabilité de X et présente-la dans un tableau.

INDICE

Pour chaque entier k de 0 à 3, calcule $C_3^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$ en gardant le dénominateur 64.

4. 0,75 pts

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. Vérifie ensuite la valeur de $V(X)$ à l'aide de la formule $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.

INDICE

Utilise les formules de la loi binomiale. Pour la vérification, calcule $E(X^2)$ avec le tableau de la question 3.

5. 0,75 pts

Détermine la fonction de répartition F de X, sous forme d'un tableau par intervalles. Déduis-en la probabilité $p(1 < X \leq 3)$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ aux valeurs 0, 1, 2 et 3, en intervalles fermés à gauche, puis cumule les probabilités.

Exercice 5 3 pts

Un dé choisit l'urne

On dispose de trois urnes, qui contiennent des boules indiscernables au toucher :

- l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires ;
- l'urne U_2 contient trois boules blanches et une boule noire ;
- l'urne U_3 contient deux boules blanches et quatre boules noires.

On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. Si le dé donne 1, on tire une boule au hasard dans U_1. S'il donne 2 ou 3, on tire une boule au hasard dans U_2. Sinon, on tire une boule au hasard dans U_3. On considère les événements suivants :

- A_1 : « le dé donne 1 » ; A_2 : « le dé donne 2 ou 3 » ; A_3 : « le dé donne 4, 5 ou 6 » ;
- P : « le dé donne un nombre pair » ; B : « la boule tirée est blanche ».

On rappelle la formule des probabilités totales : si A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $p(B) = p(A_1)\,p_{A_1}(B) + p(A_2)\,p_{A_2}(B) + p(A_3)\,p_{A_3}(B)$.

1. 0,5 pts

Montre que les événements A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements, puis donne leurs probabilités.

INDICE

Écris chaque événement à l'aide des faces du dé. Les six faces sont équiprobables.

2. 0,75 pts

Montre que $p(B) = \dfrac{17}{36}$.

INDICE

Lis dans chaque urne la probabilité de tirer une boule blanche, puis applique le rappel de l'énoncé.

3. 0,5 pts

On constate que la boule tirée est blanche. Déduis de la question 2 la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U_2.

INDICE

L'événement connu est B : il se place au dénominateur.

4. 0,75 pts

Montre que $p(P \cap B) = \dfrac{17}{72}$. Montre ensuite que les événements P et B sont indépendants.

INDICE

Le dé donne un nombre pair s'il donne 2, ou bien 4 ou 6. Ces deux cas mènent à deux urnes différentes.

5. 0,5 pts

On ajoute une boule blanche dans l'urne U_1, sans rien changer d'autre. Les événements P et B sont-ils encore indépendants ?

INDICE

La face 1 n'est pas paire : $p(P \cap B)$ ne change pas. Recalcule seulement $p(B)$.