BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Niveau examen	5

Exercice 1 3 pts

Trois boules tirées d'un coup

Une urne contient sept boules indiscernables au toucher : trois boules blanches et quatre boules noires. On tire simultanément trois boules de l'urne.

On rappelle que, pour des entiers $0 \leq k \leq n$, le nombre $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ compte les parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

1. 0,5 pts

Montre que l'univers Ω compte 35 tirages équiprobables. Montre ensuite que la probabilité de l'événement A « les trois boules ont la même couleur » est égale à $\dfrac{1}{7}$.

INDICE

Un tirage simultané est une partie à 3 éléments. Pour A, sépare deux cas incompatibles : trois blanches, ou trois noires.

CORRIGÉ

Univers. Les boules sont indiscernables au toucher : les tirages sont équiprobables. Un tirage simultané de trois boules est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 7 boules. Donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(\Omega) &= C_7^3 \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35. \end{aligned}$$

Événement A. Il se réalise de deux façons incompatibles :

- trois blanches : $C_3^3 = 1$ tirage ;
- trois noires : $C_4^3 = 4$ tirages.

Donc $\operatorname{card}(A) = 1 + 4 = 5$, et par équiprobabilité :

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{\operatorname{card}(A)}{\operatorname{card}(\Omega)} \\ &= \frac{5}{35} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. L'univers compte 35 tirages équiprobables, et $p(A) = \dfrac{1}{7}$.

2. 0,5 pts

Calcule la probabilité de l'événement B « au moins une des boules tirées est blanche ».

INDICE

Passe par l'événement contraire : aucune boule blanche n'est tirée.

CORRIGÉ

L'événement contraire $\overline{B}$ est « les trois boules tirées sont noires ». Il compte $C_4^3 = 4$ tirages, donc $p(\overline{B}) = \dfrac{4}{35}$. Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p(B) &= 1 - p(\overline{B}) \\ &= 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}. \end{aligned}$$

Conclusion. Au moins une des boules tirées est blanche avec la probabilité $\dfrac{31}{35}$.

3. 0,5 pts

On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Montre que $p(X = 2) = \dfrac{12}{35}$.

INDICE

Choisis d'abord les deux boules blanches, puis la boule noire, et applique le principe multiplicatif.

CORRIGÉ

L'événement $(X = 2)$ est réalisé quand on tire deux blanches et une noire. Il y a $C_3^2 = 3$ choix pour les deux blanches et $C_4^1 = 4$ choix pour la noire. Par le principe multiplicatif, cet événement compte $3 \times 4 = 12$ tirages.

Conclusion. Par équiprobabilité, $p(X = 2) = \dfrac{12}{35}$.

4. 0,75 pts

Détermine la loi de probabilité de X, puis vérifie que la somme des probabilités obtenues vaut 1.

INDICE

X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. Compte chaque événement $(X = k)$ comme à la question 3.

CORRIGÉ

Valeurs. On tire trois boules et l'urne contient trois blanches : X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

Dénombrement.

- $(X = 0)$: trois noires, soit $C_4^3 = 4$ tirages.
- $(X = 1)$: une blanche et deux noires, soit $C_3^1 \times C_4^2 = 3 \times 6 = 18$ tirages.
- $(X = 2)$: 12 tirages, d'après la question 3.
- $(X = 3)$: trois blanches, soit $C_3^3 = 1$ tirage.

Loi. Par équiprobabilité :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

Contrôle. $\dfrac{4 + 18 + 12 + 1}{35} = \dfrac{35}{35} = 1$.

5. 0,75 pts

Calcule l'espérance mathématique $E(X)$, puis interprète ce nombre.

INDICE

Écris les quatre produits $x_i \, p(X = x_i)$ avant de les additionner.

CORRIGÉ

Espérance. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} \\ &\quad + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} \\ &= \frac{18 + 24 + 3}{35} \\ &= \frac{45}{35} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Interprétation. Sur de très nombreuses répétitions de l'expérience, le nombre moyen de boules blanches tirées se rapproche de $\dfrac{9}{7}$.

Conclusion. $E(X) = \dfrac{9}{7}$.

Exercice 2 3 pts

Quatre tirages avec remise

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux boules jaunes et trois boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace. On réalise ainsi quatre tirages.

On rappelle que, dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la probabilité d'obtenir exactement k succès est $C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$, pour $0 \leq k \leq n$.

1. 0,75 pts

Dans cette question, on ne regarde que les deux premiers tirages. Soient J_1 « la première boule est jaune » et J_2 « la deuxième boule est jaune ». Montre que $p(J_1 \cap J_2) = \dfrac{4}{25}$, puis que J_1 et J_2 sont indépendants.

INDICE

Une issue des deux premiers tirages est un couple de boules, avec répétition permise. Compare ensuite $p(J_1 \cap J_2)$ au produit $p(J_1) \times p(J_2)$.

CORRIGÉ

Modèle. Les boules sont indiscernables au toucher et chaque boule est remise : les $5^2 = 25$ couples de boules sont équiprobables.

Intersection. L'événement $J_1 \cap J_2$ compte $2 \times 2 = 4$ couples, d'où $p(J_1 \cap J_2) = \dfrac{4}{25}$.

Indépendance. L'événement J_1 compte $2 \times 5 = 10$ couples, donc $p(J_1) = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$. De même, J_2 compte $5 \times 2 = 10$ couples, et $p(J_2) = \dfrac{2}{5}$. Ainsi $p(J_1) \times p(J_2) = \dfrac{4}{25} = p(J_1 \cap J_2)$.

Conclusion. $p(J_1 \cap J_2) = \dfrac{4}{25}$, et les événements J_1 et J_2 sont indépendants.

2. 0,5 pts

On note X le nombre de boules jaunes obtenues au cours des quatre tirages. Montre que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$, $p(X = k) = C_4^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$.

INDICE

Quelle épreuve est répétée, et quel est son succès ? Les tirages sont-ils identiques et indépendants ?

CORRIGÉ

Épreuve. L'épreuve est le tirage d'une boule, et le succès est « la boule tirée est jaune ». Par équiprobabilité, sa probabilité est $p = \frac{2}{5}$.

Répétition. Chaque boule est replacée : la composition de l'urne ne change pas d'un tirage au suivant. Les quatre épreuves sont donc identiques et indépendantes. Elles forment un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{2}{5}$, dont X compte les succès.

Conclusion. Le rappel de l'énoncé, avec $n = 4$ et $p = \frac{2}{5}$, donne, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$:

$$\begin{aligned} &p(X = k) \\ &= C_4^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}. \end{aligned}$$

Autrement dit, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{2}{5}\right)$.

3. 0,75 pts

Montre que $p(X=1)=p(X=2)=\dfrac{216}{625}$.

INDICE

Applique le rappel de l'énoncé avec $k=1$, puis avec $k=2$. On a $C_4^1=4$ et $C_4^2=6$.

CORRIGÉ

D'après la question 2, on applique la formule avec $k=1$, puis avec $k=2$. On a $C_4^1=4$ et $C_4^2=6$.

Pour $k=1$.

$$\begin{aligned} p(X=1) &= 4\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3 \\ &= 4\times\frac{2}{5}\times\frac{27}{125} \\ &= \frac{216}{625}. \end{aligned}$$

Pour $k=2$.

$$\begin{aligned} &p(X=2) \\ &= 6\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= 6\times\frac{4}{25}\times\frac{9}{25} \\ &= \frac{216}{625}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X=1)=p(X=2)=\dfrac{216}{625}$.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule jaune au cours des quatre tirages.

INDICE

L'événement contraire de « au moins une jaune » est « aucune jaune ».

CORRIGÉ

L'événement « au moins une boule jaune » est $(X\geq 1)$. Son contraire est $(X=0)$, de probabilité $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=\dfrac{81}{625}$. Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p(X\geq 1) &= 1-\frac{81}{625} \\ &= \frac{544}{625}. \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient au moins une boule jaune avec la probabilité $\dfrac{544}{625}$.

5. 0,5 pts

Déduis des questions 3 et 4 la probabilité d'obtenir au moins deux boules jaunes.

INDICE

Découpe l'événement $(X \geq 1)$ en deux événements incompatibles, dont $(X = 1)$.

CORRIGÉ

Les événements $(X = 1)$ et $(X \geq 2)$ sont incompatibles, et leur réunion est $(X \geq 1)$. Donc $p(X \geq 1) = p(X = 1) + p(X \geq 2)$. Avec les questions 3 et 4 :

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= \frac{544}{625} - \frac{216}{625} \\ &= \frac{328}{625}. \end{aligned}$$

Conclusion. On obtient au moins deux boules jaunes avec la probabilité $\frac{328}{625}$.

Exercice 3 3 pts

Deux jetons, sans remise

Un sac contient huit jetons indiscernables au toucher : cinq jetons verts et trois jetons rouges. On tire un jeton au hasard et on ne le remet pas dans le sac. Puis on tire au hasard un second jeton. On note V_1 l'événement « le premier jeton est vert » et V_2 l'événement « le second jeton est vert ».

On rappelle la formule des probabilités totales : si $0 < p(A) < 1$, alors pour tout événement B, on a $p(B) = p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$.

1. 0,5 pts

Écris, sous forme de liste, l'arbre pondéré de cette expérience. Montre ensuite que $p(V_1 \cap V_2) = \dfrac{5}{14}$.

INDICE

Après un premier jeton vert, il reste 7 jetons, dont 4 verts. Multiplie ensuite le long du chemin.

CORRIGÉ

Arbre. Le premier jeton est tiré au hasard parmi 8 : $p(V_1) = \dfrac{5}{8}$ et $p(\overline{V_1}) = \dfrac{3}{8}$. Sans remise, le second jeton est tiré parmi les 7 jetons restants.

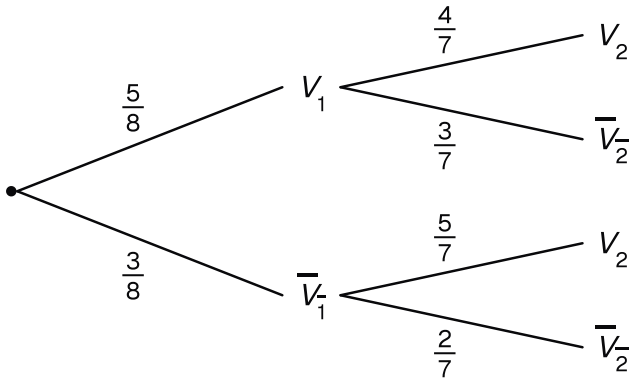
- V_1, avec $p(V_1) = \dfrac{5}{8}$:
  - V_2, avec $p_{V_1}(V_2) = \dfrac{4}{7}$;
  - $\overline{V_2}$, avec $p_{V_1}(\overline{V_2}) = \dfrac{3}{7}$.
- $\overline{V_1}$, avec $p(\overline{V_1}) = \dfrac{3}{8}$:
  - V_2, avec $p_{\overline{V_1}}(V_2) = \dfrac{5}{7}$;
  - $\overline{V_2}$, avec $p_{\overline{V_1}}(\overline{V_2}) = \dfrac{2}{7}$.

À chaque nœud, les branches ont pour somme 1.

Probabilité de $V_1 \cap V_2$. Comme $p(V_1) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} p(V_1 \cap V_2) &= p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{20}{56} = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(V_1 \cap V_2) = \dfrac{5}{14}$.



Arbre pondéré des deux tirages sans remise dans le sac de 5 jetons verts et 3 rouges : 5/8 pour V_1, puis 4/7 ou 5/7 pour V_2 selon le premier jeton.

2. 0,5 pts

Retrouve le résultat de la question 1 par un dénombrement, en prenant pour issues les listes ordonnées de deux jetons distincts.

INDICE

Compte les listes ordonnées de 2 jetons parmi 8, puis celles de 2 jetons verts parmi 5.

CORRIGÉ

Modèle. Les jetons sont indiscernables au toucher : les $A_8^2 = 8 \times 7 = 56$ listes ordonnées de deux jetons distincts sont équiprobables.

Dénombrement. L'événement $V_1 \cap V_2$ en compte $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$.

Conclusion. $p(V_1 \cap V_2) = \dfrac{20}{56} = \dfrac{5}{14}$: on retrouve le résultat de la question 1.

3. 0,75 pts

Montre que $p(V_2) = \dfrac{5}{8}$.

INDICE

Quel système complet vois-tu au premier tirage ?

CORRIGÉ

Les événements V_1 et $\overline{V_1}$ forment un système complet, et $0 < p(V_1) < 1$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(V_2) &= p(V_1)\, p_{V_1}(V_2) \\ &\quad + p(\overline{V_1})\, p_{\overline{V_1}}(V_2) \\ &= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{20 + 15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(V_2) = \dfrac{5}{8}$.

4. 0,5 pts

Calcule la probabilité que les deux jetons tirés soient de couleurs différentes.

INDICE

Deux chemins de l'arbre conviennent, et ils correspondent à des événements incompatibles.

CORRIGÉ

L'événement « couleurs différentes » est la réunion des événements incompatibles $V_1 \cap \overline{V_2}$ et $\overline{V_1} \cap V_2$. Par les probabilités composées, sa probabilité vaut :

$$\begin{aligned} &\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \\ &= \frac{15 + 15}{56} \\ &= \frac{30}{56} = \frac{15}{28}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les deux jetons tirés sont de couleurs différentes avec la probabilité $\frac{15}{28}$.

5. 0,75 pts

On constate que le second jeton tiré est vert. Quelle est la probabilité que le premier jeton tiré ait été rouge ?

INDICE

Quel événement est connu ? Il se place au dénominateur.

CORRIGÉ

On cherche $p_{V_2}(\overline{V_1})$, avec $p(V_2) = \frac{5}{8} \neq 0$ d'après la question 3.

Numérateur. Par les probabilités composées, $p(\overline{V_1} \cap V_2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$.

Quotient.

$$\begin{aligned} p_{V_2}(\overline{V_1}) &= \frac{p(\overline{V_1} \cap V_2)}{p(V_2)} \\ &= \frac{15}{56} \times \frac{8}{5} = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que le second jeton est vert, le premier était rouge avec la probabilité $\frac{3}{7}$.

Exercice 4 3 pts

Une pièce qui préfère Pile

Une pièce de monnaie est truquée : en un lancer, la probabilité d'obtenir Pile est le triple de la probabilité d'obtenir Face. On lance cette pièce trois fois, et les lancers sont indépendants. On note X le nombre de Pile obtenus.

On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$.

1. 0,25 pts

Montre qu'en un lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à $\frac{3}{4}$.

INDICE

Note q la probabilité d'obtenir Face : les probabilités des deux issues ont pour somme 1.

CORRIGÉ

Notons q la probabilité d'obtenir Face ; celle d'obtenir Pile est alors $3q$. Pile et Face sont les deux seules issues d'un lancer, donc $3q + q = 1$, soit $q = \frac{1}{4}$.

Conclusion. La probabilité d'obtenir Pile vaut $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. 0,5 pts

Montre que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{4}\right)$.

INDICE

Nomme l'épreuve, le succès, son paramètre, le nombre d'épreuves, puis l'hypothèse d'indépendance.

CORRIGÉ

- **Épreuve.** On répète une même épreuve : lancer la pièce. Le succès « obtenir Pile » a la probabilité $p = \frac{3}{4}$, d'après la question 1.
- **Répétition.** Les trois lancers sont identiques et, par hypothèse, indépendants. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $\frac{3}{4}$.

Conclusion. Le nombre de succès X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{4}\right)$.

3. 0,75 pts

Détermine la loi de probabilité de X et présente-la dans un tableau.

INDICE

Pour chaque entier k de 0 à 3, calcule $C_3^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$ en gardant le dénominateur 64.

CORRIGÉ

Formule. X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3. Pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$p(X=k) = C_3^k \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}.$$

Valeurs.

- $p(X=0) = 1 \times 1 \times \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$;
- $p(X=1) = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$;
- $p(X=2) = 3 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$;
- $p(X=3) = 1 \times \frac{27}{64} \times 1 = \frac{27}{64}$.

Loi.

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

Contrôle. $\frac{1+9+27+27}{64} = \frac{64}{64} = 1$.

4. 0,75 pts

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$. Vérifie ensuite la valeur de $V(X)$ à l'aide de la formule $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.

INDICE

Utilise les formules de la loi binomiale. Pour la vérification, calcule $E(X^2)$ avec le tableau de la question 3.

CORRIGÉ

Formules de la loi binomiale. Comme X suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{4}\right)$:

$$E(X) = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4},$$
$$V(X) = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}.$$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$.

Vérification. Avec le tableau de la question 3, le terme de la valeur 0 étant nul :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1 \times \frac{9}{64} + 4 \times \frac{27}{64} \\ &\quad + 9 \times \frac{27}{64} \\ &= \frac{360}{64} = \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{45}{8} - \frac{81}{16} = \frac{9}{16}$: on retrouve $V(X)$.

Conclusion. $E(X) = \frac{9}{4}$, $V(X) = \frac{9}{16}$ et $\sigma(X) = \frac{3}{4}$.

5. 0,75 pts

Détermine la fonction de répartition F de X, sous forme d'un tableau par intervalles. Déduis-en la probabilité $p(1 < X \leq 3)$.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ aux valeurs 0, 1, 2 et 3, en intervalles fermés à gauche, puis cumule les probabilités.

CORRIGÉ

Fonction de répartition. Sur chaque intervalle, $F(x)$ est la somme des probabilités des valeurs de X inférieures ou égales à x :

x	$]-\infty, 0[$	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, +\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{37}{64}$	1

Par exemple, pour $x \in [1, 2[$: $F(x) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$.

Probabilité demandée. Pour tous réels $a < b$, $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Donc :

$$\begin{aligned} p(1 < X \leq 3) &= F(3) - F(1) \\ &= 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}. \end{aligned}$$

Contrôle. $p(X = 2) + p(X = 3) = \frac{54}{64} = \frac{27}{32}$.

Conclusion. $p(1 < X \leq 3) = \frac{27}{32}$.

Exercice 5 3 pts

Un dé choisit l'urne

On dispose de trois urnes, qui contiennent des boules indiscernables au toucher :

- l'urne U_1 contient une boule blanche et deux boules noires ;
- l'urne U_2 contient trois boules blanches et une boule noire ;
- l'urne U_3 contient deux boules blanches et quatre boules noires.

On lance un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. Si le dé donne 1, on tire une boule au hasard dans U_1. S'il donne 2 ou 3, on tire une boule au hasard dans U_2. Sinon, on tire une boule au hasard dans U_3. On considère les événements suivants :

- A_1 : « le dé donne 1 » ; A_2 : « le dé donne 2 ou 3 » ; A_3 : « le dé donne 4, 5 ou 6 » ;
- P : « le dé donne un nombre pair » ; B : « la boule tirée est blanche ».

On rappelle la formule des probabilités totales : si A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors $p(B) = p(A_1)\,p_{A_1}(B) + p(A_2)\,p_{A_2}(B) + p(A_3)\,p_{A_3}(B)$.

1. 0,5 pts

Montre que les événements A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements, puis donne leurs probabilités.

INDICE

Écris chaque événement à l'aide des faces du dé. Les six faces sont équiprobables.

CORRIGÉ

Incompatibilité. Le dé donne un et un seul des nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6. L'événement A_1 correspond à la face 1, A_2 aux faces 2 et 3, A_3 aux faces 4, 5 et 6. Aucune face n'appartient à deux de ces groupes : $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Réunion. Chaque face appartient à l'un des groupes : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$. Donc A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements.

Probabilités. Le dé est équilibré, donc ses six faces sont équiprobables : $p(A_1) = \dfrac{1}{6}$, $p(A_2) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $p(A_3) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion. A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements, de probabilités non nulles $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$.

2. 0,75 pts

Montre que $p(B) = \dfrac{17}{36}$.

INDICE

Lis dans chaque urne la probabilité de tirer une boule blanche, puis applique le rappel de l'énoncé.

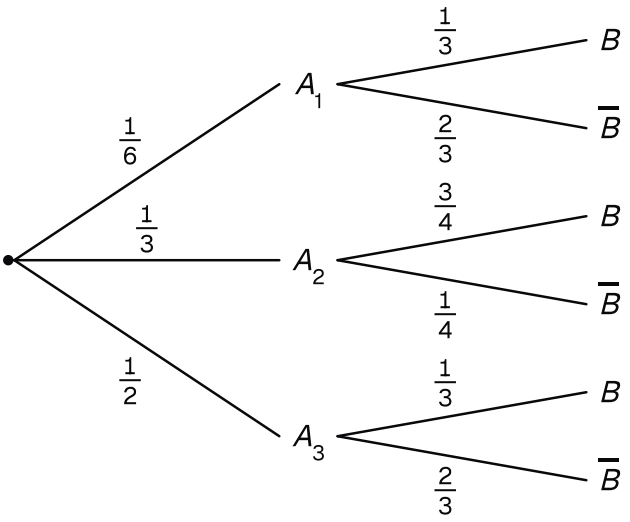
CORRIGÉ

Probabilités conditionnelles. Sachant A_1, on tire une boule au hasard parmi les 3 boules de U_1, dont 1 blanche : $p_{A_1}(B) = \dfrac{1}{3}$. De même, $p_{A_2}(B) = \dfrac{3}{4}$ et $p_{A_3}(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Probabilités totales. D'après la question 1, A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule rappelée donne :

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2 + 9 + 6}{36} = \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(B) = \dfrac{17}{36}$.



Arbre pondéré de l'expérience : le dé désigne l'urne, A_1 avec 1/6, A_2 avec 1/3, A_3 avec 1/2, puis la boule est blanche (B) avec 1/3, 3/4 ou 1/3 selon l'urne.

3. 0,5 pts

On constate que la boule tirée est blanche. Déduis de la question 2 la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U_2.

INDICE

L'événement connu est B : il se place au dénominateur.

CORRIGÉ

On cherche $p_B(A_2)$, avec $p(B) = \dfrac{17}{36} \neq 0$ d'après la question 2.

Numérateur. Par les probabilités composées :

$$\begin{aligned} p(A_2 \cap B) &= p(A_2) \times p_{A_2}(B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quotient.

$$\begin{aligned} p_B(A_2) &= \frac{p(A_2 \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{36}{17} = \frac{9}{17}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que la boule tirée est blanche, elle vient de l'urne U_2 avec la probabilité $\dfrac{9}{17}$.

4. 0,75 pts

Montre que $p(P \cap B) = \dfrac{17}{72}$. Montre ensuite que les événements P et B sont indépendants.

INDICE

Le dé donne un nombre pair s'il donne 2, ou bien 4 ou 6. Ces deux cas mènent à deux urnes différentes.

CORRIGÉ

Découpage. Les nombres pairs du dé sont 2, 4 et 6. L'événement $P \cap B$ est la réunion de deux événements incompatibles, car ils correspondent à des faces différentes du dé. Les probabilités composées donnent :

- le dé donne 2, puis la boule tirée dans U_2 est blanche : $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{8}$;
- le dé donne 4 ou 6, puis la boule tirée dans U_3 est blanche : $\dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

Donc :

$$\begin{aligned} p(P \cap B) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{9+8}{72} = \frac{17}{72}. \end{aligned}$$

Indépendance. Les faces sont équiprobables, donc $p(P) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Avec la question 2 :

$$\begin{aligned} & p(P) \times p(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{17}{36} \\ &= \frac{17}{72} = p(P \cap B). \end{aligned}$$

Conclusion. $p(P \cap B) = \dfrac{17}{72}$, et les événements P et B sont indépendants.

5. 0,5 pts

On ajoute une boule blanche dans l'urne U_1, sans rien changer d'autre. Les événements P et B sont-ils encore indépendants ?

INDICE

La face 1 n'est pas paire : $p(P \cap B)$ ne change pas. Recalcule seulement $p(B)$.

CORRIGÉ

Nouvelle probabilité de B. L'urne U_1 contient maintenant deux boules blanches et deux boules noires : $p_{A_1}(B) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Les autres données ne changent pas. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1+3+2}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Probabilité de $P \cap B$. Le nombre 1 n'est pas pair, donc $P \cap A_1 = \emptyset$. Le calcul de la question 4 n'utilise que les faces $2, 4, 6$ et les urnes U_2 et U_3, qui ne changent pas. On a donc toujours $p(P \cap B) = \dfrac{17}{72}$, et $p(P) = \dfrac{1}{2}$.

Comparaison. $p(P) \times p(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$, et $\dfrac{17}{72} \neq \dfrac{1}{4}$ car $17 \times 4 = 68 \neq 72$.

Conclusion. Les événements P et B ne sont plus indépendants.