BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Entraînement	8

Exercice 1

Trois bonbons, deux modèles de tirage

Un sachet contient six bonbons indiscernables au toucher : trois à la menthe, deux au citron et un à la fraise. Aya prend trois bonbons au hasard, l'un après l'autre. On note :

- A : « les trois bonbons ont trois parfums différents » ;
- B : « au moins un bonbon est à la menthe ».

1.

Aya ne remet aucun bonbon dans le sachet. Décris une issue, puis calcule $\mathrm{card}(\Omega)$.

INDICE

Les tirages sont successifs et sans remise : une issue est une liste ordonnée de trois bonbons distincts. Rappel de première année : $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

2.

Dans ce modèle, montre que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

INDICE

Choisis d'abord quel bonbon de chaque parfum est pris : $3 \times 2 \times 1$ choix. Compte ensuite les ordres possibles des trois parfums.

3.

Calcule $p(B)$ en passant par l'événement contraire.

INDICE

Le contraire de « au moins un bonbon à la menthe » est « aucun bonbon à la menthe ». Les trois bonbons sont alors pris parmi les trois autres.

4.

Aya remet maintenant chaque bonbon dans le sachet avant de prendre le suivant. Reprends le calcul de $p(A)$ et de $p(B)$ dans ce nouveau modèle.

INDICE

Avec remise, une issue est une liste de trois bonbons, répétitions permises : $\mathrm{card}(\Omega) = 6^3$. Garde le même découpage qu'avant.

Exercice 2

Colis express ou standard

Une plateforme de livraison expédie chaque colis en mode express ou en mode standard. Un colis part en express avec la probabilité $\frac{3}{4}$. En express, il arrive à l'heure avec la probabilité $\frac{9}{10}$; en standard, avec la probabilité $\frac{3}{5}$.

On choisit un colis au hasard. On note E : « le colis est expédié en express » et H : « le colis arrive à l'heure ».

1.

Traduis les données par des probabilités. Écris l'arbre pondéré sous forme de liste et contrôle la somme des branches à chaque nœud.

INDICE

Au premier niveau, place E et $\overline{E}$. Au second, place H et $\overline{H}$ sachant chacun d'eux. Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.

2.

Calcule $p(E \cap H)$, puis montre que $p(H) = \frac{33}{40}$.

INDICE

Pour $E \cap H$, suis un chemin de l'arbre. Pour $p(H)$, cherche par quels chemins un colis arrive à l'heure.

3.

Un client reçoit son colis à l'heure. Quelle est la probabilité que ce colis ait été expédié en express ?

INDICE

Quel événement est connu ? Il va au dénominateur.

4.

Un autre client reçoit son colis en retard. Calcule la probabilité que ce colis ait été expédié en standard.

INDICE

Même démarche qu'à la question 3, avec des contraires. Quel événement est connu cette fois ?

Exercice 3

Au salon du livre : indépendance et contraires

À un salon du livre de Casablanca, on choisit un visiteur au hasard. On note R : « il achète un roman » et K : « il assiste à une conférence ». Une enquête donne $p(R) = \frac{5}{8}$, $p(K) = \frac{2}{5}$ et $p(R \cup K) = \frac{31}{40}$.

1.

Calcule $p(R \cap K)$. Les événements R et K sont-ils incompatibles ?

INDICE

Isole $p(R \cap K)$ dans la formule de la probabilité d'une réunion. Mets tout au dénominateur 40.

2.

Montre que R et K sont indépendants.

INDICE

Compare $p(R \cap K)$ avec le produit $p(R) \times p(K)$.

3.

Déduis-en la probabilité qu'un visiteur n'achète pas de roman et n'assiste à aucune conférence. Contrôle avec $p(R \cup K)$.

INDICE

L'événement est $\overline{R} \cap \overline{K}$. Utilise l'indépendance des événements contraires. Pour le contrôle, cet événement est le contraire de $R \cup K$.

4.

Montre que la probabilité qu'un visiteur fasse exactement une des deux activités vaut $\frac{21}{40}$.

INDICE

« Exactement une » est la réunion de $R \cap \overline{K}$ et de $\overline{R} \cap K$, deux événements incompatibles. Chacun se calcule par un produit.

Exercice 4

Le plus petit des deux numéros

Une boîte contient cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux jetons. On note X le plus petit des deux numéros tirés.

1.

Calcule le nombre d'issues. Donne l'ensemble des valeurs de X.

INDICE

Le tirage est simultané : une issue est une partie de deux jetons, et il y en a C_5^2. Le plus petit numéro ne peut pas valoir 5.

2.

Détermine la loi de X et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

L'événement $(X = k)$ est réalisé quand on tire le jeton k et un jeton de numéro plus grand. Compte ces jetons plus grands.

3.

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

INDICE

Écris les quatre produits $x_i p_i$ pour $E(X)$, puis fais de même avec les carrés des valeurs.

4.

Détermine la fonction de répartition F de X. Présente-la dans un tableau par intervalles.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ avec les valeurs $1 < 2 < 3 < 4$, en intervalles fermés à gauche. Sur chaque intervalle, F vaut la somme des probabilités des valeurs déjà atteintes.

5.

Calcule $p(1 < X \leq 3)$ à l'aide de F, puis contrôle avec la loi.

INDICE

Écris l'événement $(1 < X \leq 3)$ comme une différence de deux événements de la forme $(X \leq t)$.

Exercice 5

Répondre au hasard à un questionnaire

Un questionnaire comporte cinq questions. Chaque question propose quatre réponses, dont une seule est juste. Karim répond à chaque question au hasard, indépendamment des autres questions. On note X le nombre de réponses justes.

1.

Justifie que le nombre X de réponses justes suit une loi binomiale. Donne n et le paramètre p.

INDICE

Nomme l'épreuve (répondre à une question), le succès et sa probabilité. Justifie l'indépendance et donne le nombre de répétitions.

2.

Calcule la probabilité que Karim donne exactement trois réponses justes.

INDICE

Combien de façons de choisir les trois bonnes réponses parmi les cinq ? Quelle est la probabilité d'une liste donnée ?

3.

Calcule la probabilité que Karim donne au moins une réponse juste.

INDICE

Passe par le contraire : aucune réponse juste, c'est l'événement $(X = 0)$.

4.

Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Utilise les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale.

5.

Chaque réponse juste rapporte 3 points et chaque réponse fausse retire 1 point. On note N la note de Karim. Montre que $N = 4X - 5$, puis calcule $E(N)$ et $V(N)$.

INDICE

Il y a X réponses justes et $5 - X$ réponses fausses. Utilise ensuite les formules de $E(aX + b)$ et $V(aX + b)$.

Exercice 6

Cartes étoiles : gain moyen et mise équitable

Un jeu se joue avec huit cartes posées face cachée : deux cartes « étoile » et six cartes blanches. Le joueur paie 4 dirhams, puis retourne simultanément trois cartes au hasard. Il reçoit 20 dirhams s'il découvre les deux étoiles, 3 dirhams s'il en découvre une seule, et rien sinon. On note G son gain net, mise déduite.

1.

Calcule le nombre d'issues, puis montre que la probabilité de découvrir exactement une étoile vaut $\frac{15}{28}$.

INDICE

Une issue est une partie de trois cartes parmi huit. Pour une seule étoile, choisis l'étoile, puis deux cartes blanches.

2.

Détermine la loi de G.

INDICE

Les valeurs de G sont $20-4$, $3-4$ et $0-4$. Avec deux étoiles, la troisième carte est blanche ; sans étoile, les trois cartes sont blanches.

3.

Calcule $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

INDICE

Garde le dénominateur 56 : chaque valeur est multipliée par son nombre d'issues, puis on divise la somme par 56.

4.

L'organisateur veut rendre le jeu équitable sans changer les montants reçus. Quelle mise doit-il demander ?

INDICE

Appelle m la mise. Que vaut l'espérance du gain net en fonction de m ? Que veut dire « équitable » ?

Exercice 7

Trois feux de circulation

Sur son trajet, Imane passe trois feux de circulation, réglés indépendamment les uns des autres. Elle trouve le premier feu au vert avec la probabilité $\frac{1}{2}$, le deuxième avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et le troisième avec la probabilité $\frac{3}{4}$. On note X le nombre de feux verts rencontrés.

1.

Montre que la probabilité que les trois feux soient verts vaut $\frac{1}{4}$, et que celle qu'aucun ne soit vert vaut $\frac{1}{24}$.

INDICE

Les trois passages sont des épreuves indépendantes : multiplie les probabilités obtenues à chaque feu.

2.

Calcule $p(X = 1)$, puis déduis $p(X = 2)$ sans nouveau produit.

INDICE

Un seul feu vert : trois listes incompatibles, selon le rang du feu vert. Ensuite, la somme des probabilités de la loi vaut 1.

3.

Un camarade affirme que X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$. Montre qu'il se trompe.

INDICE

Une loi est donnée par les probabilités de ses valeurs. Compare $p(X = 3)$ avec la valeur que donnerait cette loi binomiale.

4.

Calcule $E(X)$. Compare avec la somme $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

INDICE

Garde le dénominateur 24 pour la loi : $\frac{1}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{11}{24}$ et $\frac{6}{24}$.

Exercice 8

Cinq clés et une porte

Un gardien possède un trousseau de cinq clés, dont une seule ouvre la porte du local. Il essaie les clés une à une, au hasard, et met de côté chaque clé qui a échoué. On note X le rang de l'essai qui ouvre la porte. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on note O_k : « le k-ième essai ouvre la porte ».

1.

Calcule $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

INDICE

Écris $(X = 2)$ avec O_1 et O_2. Combien reste-t-il de clés après un échec ?

2.

Montre que $p(X = 3) = \dfrac{1}{5}$, puis donne la loi de X.

INDICE

Écris $(X = 3)$ comme l'intersection de trois événements. Pour le rang 4, regroupe les deux premiers échecs en un seul événement.

3.

Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Toutes les probabilités valent $\dfrac{1}{5}$: mets ce facteur en évidence. Pense à $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

4.

Un autre jour, le gardien ne met plus de côté les clés qui échouent : il reprend chaque fois une clé au hasard parmi les cinq. Calcule la probabilité qu'il ouvre la porte en deux essais au plus. Compare avec le premier protocole.

INDICE

Les essais sont maintenant des épreuves indépendantes, de même probabilité de succès $\dfrac{1}{5}$. Passe par le contraire : deux échecs de suite.