BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Entraînement	8

Exercice 1

Trois bonbons, deux modèles de tirage

Un sachet contient six bonbons indiscernables au toucher : trois à la menthe, deux au citron et un à la fraise. Aya prend trois bonbons au hasard, l'un après l'autre. On note :

- A : « les trois bonbons ont trois parfums différents » ;
- B : « au moins un bonbon est à la menthe ».

1.

Aya ne remet aucun bonbon dans le sachet. Décris une issue, puis calcule $\mathrm{card}(\Omega)$.

INDICE

Les tirages sont successifs et sans remise : une issue est une liste ordonnée de trois bonbons distincts. Rappel de première année : $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

CORRIGÉ

Modèle. On numérote les six bonbons pour les distinguer. L'ordre de sortie compte et il n'y a pas de remise : une issue est une liste ordonnée de trois bonbons distincts.

Cardinal.

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\Omega) &= A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 \\ &= 120.\end{aligned}$$

Conclusion. $\mathrm{card}(\Omega) = 120$. Les bonbons sont indiscernables au toucher : ces 120 listes sont équiprobables.

2.

Dans ce modèle, montre que $p(A) = \dfrac{3}{10}$.

INDICE

Choisis d'abord quel bonbon de chaque parfum est pris : $3 \times 2 \times 1$ choix. Compte ensuite les ordres possibles des trois parfums.

CORRIGÉ

Choix des bonbons. Une liste de A contient un bonbon à la menthe parmi 3, un au citron parmi 2 et le bonbon à la fraise : cela fait $3 \times 2 \times 1 = 6$ choix.

Ordre de sortie. Ces trois bonbons peuvent sortir dans $3! = 6$ ordres. Par le principe multiplicatif, $\mathrm{card}(A) = 6 \times 6 = 36$.

Conclusion. Par équiprobabilité :

$$p(A) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

3.

Calcule $p(B)$ en passant par l'événement contraire.

INDICE

Le contraire de « au moins un bonbon à la menthe » est « aucun bonbon à la menthe ». Les trois bonbons sont alors pris parmi les trois autres.

CORRIGÉ

Événement contraire. L'événement $\overline{B}$ est « aucun bonbon n'est à la menthe ». Ses listes sont formées des trois bonbons au citron ou à la fraise, dans un ordre quelconque : $\mathrm{card}(\overline{B}) = A_3^3 = 3! = 6$. Donc $p(\overline{B}) = \dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20}$.

Conclusion. Par la règle du contraire :

$$p(B) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.$$

4.

Aya remet maintenant chaque bonbon dans le sachet avant de prendre le suivant. Reprends le calcul de $p(A)$ et de $p(B)$ dans ce nouveau modèle.

INDICE

Avec remise, une issue est une liste de trois bonbons, répétitions permises : $\mathrm{card}(\Omega) = 6^3$. Garde le même découpage qu'avant.

CORRIGÉ

Nouveau modèle. Avec remise, une issue est une liste ordonnée de trois bonbons, répétitions permises. Les $6^3 = 216$ listes sont équiprobables.

Événement A. Les trois parfums sont différents, donc aucun bonbon n'est répété. On garde 6 choix des bonbons et 6 ordres : $\mathrm{card}(A) = 36$ et $p(A) = \dfrac{36}{216} = \dfrac{1}{6}$.

Événement B. Pour $\overline{B}$, chaque tirage donne l'un des 3 bonbons qui ne sont pas à la menthe : $\mathrm{card}(\overline{B}) = 3^3 = 27$. Donc :

$$\begin{aligned} p(B) &= 1 - \frac{27}{216} \\ &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Conclusion. Avec remise, $p(A) = \dfrac{1}{6}$ et $p(B) = \dfrac{7}{8}$. Le modèle change les résultats : on compte toujours Ω et l'événement dans le même modèle.

Exercice 2

Colis express ou standard

Une plateforme de livraison expédie chaque colis en mode express ou en mode standard. Un colis part en express avec la probabilité $\frac{3}{4}$. En express, il arrive à l'heure avec la probabilité $\frac{9}{10}$; en standard, avec la probabilité $\frac{3}{5}$.

On choisit un colis au hasard. On note E : « le colis est expédié en express » et H : « le colis arrive à l'heure ».

1.

Traduis les données par des probabilités. Écris l'arbre pondéré sous forme de liste et contrôle la somme des branches à chaque nœud.

INDICE

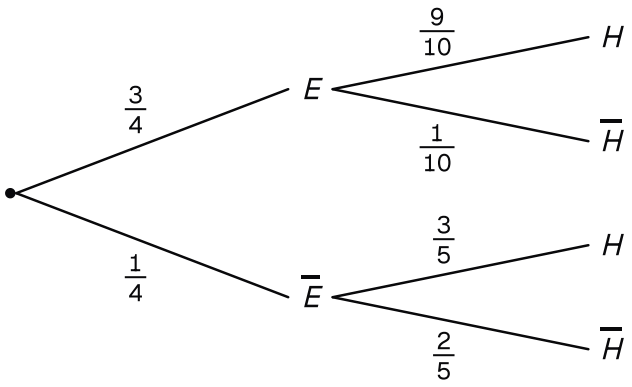
Au premier niveau, place E et $\overline{E}$. Au second, place H et $\overline{H}$ sachant chacun d'eux. Les branches issues d'un même nœud ont pour somme 1.

CORRIGÉ

Les données s'écrivent $p(E) = \dfrac{3}{4}$, $p_E(H) = \dfrac{9}{10}$ et $p_{\overline{E}}(H) = \dfrac{3}{5}$. L'arbre pondéré :

- E, avec $p(E) = \dfrac{3}{4}$:
  - H, avec $p_E(H) = \dfrac{9}{10}$;
  - $\overline{H}$, avec $p_E(\overline{H}) = \dfrac{1}{10}$.
- $\overline{E}$, avec $p(\overline{E}) = \dfrac{1}{4}$:
  - H, avec $p_{\overline{E}}(H) = \dfrac{3}{5}$;
  - $\overline{H}$, avec $p_{\overline{E}}(\overline{H}) = \dfrac{2}{5}$.

Contrôle : $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$, $\dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{10} = 1$ et $\dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} = 1$.



Arbre pondéré des colis : E, express, de probabilité 3/4, puis H, à l'heure, avec 9/10 sachant E et 3/5 sachant le contraire de E.

2.

Calcule $p(E \cap H)$, puis montre que $p(H) = \dfrac{33}{40}$.

INDICE

Pour $E \cap H$, suis un chemin de l'arbre. Pour $p(H)$, cherche par quels chemins un colis arrive à l'heure.

CORRIGÉ

Probabilité de $E \cap H$. Comme $p(E) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} p(E \cap H) &= p(E) \times p_E(H) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{40}. \end{aligned}$$

Probabilité de H. E et $\overline{E}$ forment un système complet, et chacun a une probabilité non nulle. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p(H) &= p(E)\, p_E(H) \\ &\quad + p(\overline{E})\, p_{\overline{E}}(H) \\ &= \frac{27}{40} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{27}{40} + \frac{6}{40} = \frac{33}{40}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(E \cap H) = \dfrac{27}{40}$ et $p(H) = \dfrac{33}{40}$.

3.

Un client reçoit son colis à l'heure. Quelle est la probabilité que ce colis ait été expédié en express ?

INDICE

Quel événement est connu ? Il va au dénominateur.

CORRIGÉ

On cherche $p_H(E)$. Comme $p(H) = \dfrac{33}{40} \neq 0$, la définition de la probabilité conditionnelle donne :

$$\begin{aligned} p_H(E) &= \frac{p(H \cap E)}{p(H)} \\ &= \frac{27}{40} \times \frac{40}{33} \\ &= \frac{27}{33} = \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que le colis est arrivé à l'heure, il a été expédié en express avec la probabilité $\dfrac{9}{11}$.

4.

Un autre client reçoit son colis en retard. Calcule la probabilité que ce colis ait été expédié en standard.

INDICE

Même démarche qu'à la question 3, avec des contraires. Quel événement est connu cette fois ?

CORRIGÉ

Probabilité du retard. Par la règle du contraire, $p(\overline{H}) = 1 - \dfrac{33}{40} = \dfrac{7}{40}$, qui n'est pas nul.

Chemin $\overline{E}$ puis $\overline{H}$. Par les probabilités composées, $p(\overline{E} \cap \overline{H}) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{40}$.

Probabilité conditionnelle.

$$\begin{aligned} p_{\overline{H}}(\overline{E}) &= \frac{p(\overline{H} \cap \overline{E})}{p(\overline{H})} \\ &= \frac{4}{40} \times \frac{40}{7} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que le colis est arrivé en retard, il a été expédié en standard avec la probabilité $\dfrac{4}{7}$.

Exercice 3

Au salon du livre : indépendance et contraires

À un salon du livre de Casablanca, on choisit un visiteur au hasard. On note R : « il achète un roman » et K : « il assiste à une conférence ». Une enquête donne $p(R) = \dfrac{5}{8}$, $p(K) = \dfrac{2}{5}$ et $p(R \cup K) = \dfrac{31}{40}$.

1.

Calcule $p(R \cap K)$. Les événements R et K sont-ils incompatibles ?

INDICE

Isole $p(R \cap K)$ dans la formule de la probabilité d'une réunion. Mets tout au dénominateur 40.

CORRIGÉ

Calcul. Par la probabilité de la réunion de deux événements, $p(R \cap K) = p(R) + p(K) - p(R \cup K)$. Au dénominateur 40 :

$$\begin{aligned} p(R \cap K) &= \frac{25}{40} + \frac{16}{40} - \frac{31}{40} \\ &= \frac{10}{40} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Incompatibilité. Comme $p(R \cap K) \neq 0$, l'événement $R \cap K$ n'est pas vide.

Conclusion. $p(R \cap K) = \dfrac{1}{4}$, et les événements R et K ne sont pas incompatibles.

2.

Montre que R et K sont indépendants.

INDICE

Compare $p(R \cap K)$ avec le produit $p(R) \times p(K)$.

CORRIGÉ

On calcule le produit des probabilités :

$$\begin{aligned} p(R) \times p(K) &= \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $p(R \cap K) = p(R) \times p(K)$.

Conclusion. Par définition, R et K sont indépendants. Ils sont indépendants sans être incompatibles : ces deux notions ne se confondent pas.

3.

Déduis-en la probabilité qu'un visiteur n'achète pas de roman et n'assiste à aucune conférence. Contrôle avec $p(R \cup K)$.

INDICE

L'événement est $\overline{R} \cap \overline{K}$. Utilise l'indépendance des événements contraires. Pour le contrôle, cet événement est le contraire de $R \cup K$.

CORRIGÉ

Calcul. Comme R et K sont indépendants, $\overline{R}$ et $\overline{K}$ le sont aussi. Donc :

$$\begin{aligned} p(\overline{R} \cap \overline{K}) &= p(\overline{R}) \times p(\overline{K}) \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{40}. \end{aligned}$$

Contrôle. $\overline{R} \cap \overline{K}$ est le contraire de $R \cup K$, et $1 - \dfrac{31}{40} = \dfrac{9}{40}$.

Conclusion. Un visiteur n'achète pas de roman et n'assiste à aucune conférence avec la probabilité $\dfrac{9}{40}$.

4.

Montre que la probabilité qu'un visiteur fasse exactement une des deux activités vaut $\dfrac{21}{40}$.

INDICE

« Exactement une » est la réunion de $R \cap \overline{K}$ et de $\overline{R} \cap K$, deux événements incompatibles. Chacun se calcule par un produit.

CORRIGÉ

Découpage. L'événement cherché est la réunion des événements incompatibles $R \cap \overline{K}$ et $\overline{R} \cap K$.

Chaque terme. Par l'indépendance des contraires :

$$\begin{aligned} p(R \cap \overline{K}) &= \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}, \\ p(\overline{R} \cap K) &= \frac{3}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Somme. La probabilité cherchée vaut $\dfrac{15}{40} + \dfrac{6}{40} = \dfrac{21}{40}$.

Contrôle. $p(R \cup K) - p(R \cap K) = \dfrac{31}{40} - \dfrac{10}{40} = \dfrac{21}{40}$.

Conclusion. Un visiteur fait exactement une des deux activités avec la probabilité $\dfrac{21}{40}$.

Exercice 4

Le plus petit des deux numéros

Une boîte contient cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux jetons. On note X le plus petit des deux numéros tirés.

1.

Calcule le nombre d'issues. Donne l'ensemble des valeurs de X.

INDICE

Le tirage est simultané : une issue est une partie de deux jetons, et il y en a C_5^2. Le plus petit numéro ne peut pas valoir 5.

CORRIGÉ

Univers. Une issue est une partie à deux éléments de $\{1,2,3,4,5\}$. Il y en a $C_5^2 = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$. Les jetons sont indiscernables au toucher : ces 10 issues sont équiprobables.

Valeurs de X. Le plus petit des deux numéros vaut au moins 1. Il vaut au plus 4, car l'autre numéro est plus grand.

Conclusion. Il y a 10 issues, et $X(\Omega) = \{1,2,3,4\}$.

2.

Détermine la loi de X et vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

INDICE

L'événement $(X = k)$ est réalisé quand on tire le jeton k et un jeton de numéro plus grand. Compte ces jetons plus grands.

CORRIGÉ

Dénombrement. Soit $k \in \{1,2,3,4\}$. L'événement $(X = k)$ contient les parties $\{k, j\}$ avec $k < j \leq 5$: il y en a $5 - k$.

Loi. Par équiprobabilité :

x_i	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

Contrôle. $\dfrac{4+3+2+1}{10} = 1$.

3.

Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

INDICE

Écris les quatre produits $x_i p_i$ pour $E(X)$, puis fais de même avec les carrés des valeurs.

CORRIGÉ

Espérance. Par définition, avec la loi au dénominateur 10 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} \\ &\quad + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{20}{10} = 2. \end{aligned}$$

Moment d'ordre deux. De même :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1 \times \frac{4}{10} + 4 \times \frac{3}{10} \\ &\quad + 9 \times \frac{2}{10} + 16 \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{50}{10} = 5. \end{aligned}$$

Variance, puis écart-type. On utilise le calcul pratique de la variance : $V(X) = 5 - 2^2 = 1$. Donc $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$.

Conclusion. $E(X) = 2$, $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = 1$.

4.

Détermine la fonction de répartition F de X. Présente-la dans un tableau par intervalles.

INDICE

Découpe $\mathbb{R}$ avec les valeurs $1 < 2 < 3 < 4$, en intervalles fermés à gauche. Sur chaque intervalle, F vaut la somme des probabilités des valeurs déjà atteintes.

CORRIGÉ

Par l'expression de la fonction de répartition, F est constante sur chaque intervalle fermé à gauche. Elle y vaut la somme des probabilités des valeurs déjà atteintes :

x	$]-\infty, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, 4[$	$[4, +\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

Par exemple, pour $x \in [2, 3[$:

$$\begin{aligned} F(x) &= p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= \frac{4 + 3}{10} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

5.

Calcule $p(1 < X \leq 3)$ à l'aide de F, puis contrôle avec la loi.

INDICE

Écris l'événement $(1 < X \leq 3)$ comme une différence de deux événements de la forme $(X \leq t)$.

CORRIGÉ

Avec F. Pour tous réels $a < b$, $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Donc :

$$\begin{aligned} p(1 < X \leq 3) &= F(3) - F(1) \\ &= \frac{9}{10} - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle avec la loi. L'événement $(1 < X \leq 3)$ est réalisé quand X vaut 2 ou 3, et $\frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$.

Conclusion. $p(1 < X \leq 3) = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

Répondre au hasard à un questionnaire

Un questionnaire comporte cinq questions. Chaque question propose quatre réponses, dont une seule est juste. Karim répond à chaque question au hasard, indépendamment des autres questions. On note X le nombre de réponses justes.

1.

Justifie que le nombre X de réponses justes suit une loi binomiale. Donne n et le paramètre p.

INDICE

Nomme l'épreuve (répondre à une question), le succès et sa probabilité. Justifie l'indépendance et donne le nombre de répétitions.

CORRIGÉ

- **Épreuve.** L'épreuve consiste à répondre au hasard à une question. Le succès « la réponse est juste » a la probabilité $\frac{1}{4}$, car une réponse sur quatre est juste et le choix se fait au hasard. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$.
- **Répétition.** L'épreuve est répétée 5 fois, de façon indépendante par hypothèse.

Conclusion. X est le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{4}$. Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{4}\right)$, avec $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$.

2.

Calcule la probabilité que Karim donne exactement trois réponses justes.

INDICE

Combien de façons de choisir les trois bonnes réponses parmi les cinq ? Quelle est la probabilité d'une liste donnée ?

CORRIGÉ

Par la formule de la loi binomiale, avec $k = 3$:

$$\begin{aligned} p(X = 3) &= C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= 10 \times \frac{1}{64} \times \frac{9}{16} \\ &= \frac{90}{1024} = \frac{45}{512}. \end{aligned}$$

Conclusion. Karim donne exactement trois réponses justes avec la probabilité $\frac{45}{512}$.

3.

Calcule la probabilité que Karim donne au moins une réponse juste.

INDICE

Passe par le contraire : aucune réponse juste, c'est l'événement $(X = 0)$.

CORRIGÉ

Le contraire de $(X \geq 1)$ est $(X = 0)$. Or $p(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$. Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - \frac{243}{1024} \\ &= \frac{781}{1024}. \end{aligned}$$

Conclusion. Karim donne au moins une réponse juste avec la probabilité $\frac{781}{1024}$.

4.

Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Utilise les formules de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale.

CORRIGÉ

Comme X suit la loi $\mathcal{B}\left(5, \frac{1}{4}\right)$, les formules de la loi binomiale donnent :

$$\begin{aligned} E(X) &= 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \\ V(X) &= 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}. \end{aligned}$$

5.

Chaque réponse juste rapporte 3 points et chaque réponse fausse retire 1 point. On note N la note de Karim. Montre que $N = 4X - 5$, puis calcule $E(N)$ et $V(N)$.

INDICE

Il y a X réponses justes et $5 - X$ réponses fausses. Utilise ensuite les formules de $E(aX + b)$ et $V(aX + b)$.

CORRIGÉ

Expression de N. Karim donne X réponses justes et $5 - X$ réponses fausses. Donc :

$$N = 3X - (5 - X) = 4X - 5.$$

Espérance et variance. On applique $E(aX + b) = a\,E(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2\,V(X)$, avec $a = 4$ et $b = -5$:

$$E(N) = 4 \times \frac{5}{4} - 5 = 0,$$
$$V(N) = 4^2 \times \frac{15}{16} = 15.$$

Conclusion. $N = 4X - 5$, $E(N) = 0$ et $V(N) = 15$. En répondant au hasard, Karim obtient en moyenne une note nulle.

Exercice 6

Cartes étoiles : gain moyen et mise équitable

Un jeu se joue avec huit cartes posées face cachée : deux cartes « étoile » et six cartes blanches. Le joueur paie 4 dirhams, puis retourne simultanément trois cartes au hasard. Il reçoit 20 dirhams s'il découvre les deux étoiles, 3 dirhams s'il en découvre une seule, et rien sinon. On note G son gain net, mise déduite.

1.

Calcule le nombre d'issues, puis montre que la probabilité de découvrir exactement une étoile vaut $\dfrac{15}{28}$.

INDICE

Une issue est une partie de trois cartes parmi huit. Pour une seule étoile, choisis l'étoile, puis deux cartes blanches.

CORRIGÉ

Univers. Les cartes sont retournées au hasard : les parties de trois cartes sont équiprobables. Le tirage est simultané, donc :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\Omega) &= C_8^3 \\ &= \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56.\end{aligned}$$

Une seule étoile. On choisit une étoile parmi 2 et deux cartes blanches parmi 6 : cela fait $2\times C_6^2 = 2\times 15 = 30$ issues.

Conclusion. Il y a 56 issues, et la probabilité de découvrir exactement une étoile vaut $\dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$.

2.

Détermine la loi de G.

INDICE

Les valeurs de G sont $20-4$, $3-4$ et $0-4$. Avec deux étoiles, la troisième carte est blanche ; sans étoile, les trois cartes sont blanches.

CORRIGÉ

Valeurs. Le gain net vaut $20-4$, $3-4$ ou $0-4$: les valeurs de G sont -4, -1 et 16.

Dénombrement.

- $(G=16)$: les deux étoiles et une carte blanche parmi 6, soit $C_2^2\times 6=6$ issues.
- $(G=-1)$: une seule étoile, soit 30 issues d'après la question 1.
- $(G=-4)$: trois cartes blanches, soit $C_6^3=20$ issues.

Contrôle : $6+30+20=56$.

Loi. Par équiprobabilité :

x_i	-4	-1	16
$p(G=x_i)$	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{28}$

3.

Calcule $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

INDICE

Garde le dénominateur 56 : chaque valeur est multipliée par son nombre d'issues, puis on divise la somme par 56.

CORRIGÉ

Par définition de l'espérance, au dénominateur 56 :

$$\begin{aligned} E(G) &= -4\times\frac{20}{56} \\ &\quad +(-1)\times\frac{30}{56} \\ &\quad +16\times\frac{6}{56} \\ &= \frac{-80-30+96}{56} \\ &= -\frac{14}{56}=-\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $E(G)<0$: le jeu est défavorable au joueur, qui perd en moyenne un quart de dirham par partie.

4.

L'organisateur veut rendre le jeu équitable sans changer les montants reçus. Quelle mise doit-il demander ?

INDICE

Appelle m la mise. Que vaut l'espérance du gain net en fonction de m ? Que veut dire « équitable » ?

CORRIGÉ

Montant reçu. Soit R le montant reçu : R vaut 0, 3 ou 20, avec les probabilités $\frac{20}{56}$, $\frac{30}{56}$ et $\frac{6}{56}$. Donc :

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{3 \times 30 + 20 \times 6}{56} \\ &= \frac{210}{56} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Mise équitable. Avec une mise m, le gain net est $R - m$, et $E(R - m) = E(R) - m$. Le jeu est équitable si et seulement si $E(R) - m = 0$, soit $m = \frac{15}{4} = 3{,}75$.

Contrôle. Avec $m = 4$, on retrouve $E(G) = \frac{15}{4} - 4 = -\frac{1}{4}$.

Conclusion. L'organisateur doit demander une mise de $3{,}75$ dirhams.

Exercice 7

Trois feux de circulation

Sur son trajet, Imane passe trois feux de circulation, réglés indépendamment les uns des autres. Elle trouve le premier feu au vert avec la probabilité $\frac{1}{2}$, le deuxième avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et le troisième avec la probabilité $\frac{3}{4}$. On note X le nombre de feux verts rencontrés.

1.

Montre que la probabilité que les trois feux soient verts vaut $\frac{1}{4}$, et que celle qu'aucun ne soit vert vaut $\frac{1}{24}$.

INDICE

Les trois passages sont des épreuves indépendantes : multiplie les probabilités obtenues à chaque feu.

CORRIGÉ

Les passages aux trois feux sont des épreuves indépendantes. Dans ce modèle, on multiplie les probabilités du résultat obtenu à chaque feu.

Trois feux verts.

$$\begin{aligned} p(X=3) &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aucun feu vert.

$$\begin{aligned} p(X=0) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Conclusion. Les trois feux sont verts avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et aucun ne l'est avec la probabilité $\frac{1}{24}$.

2.

Calcule $p(X=1)$, puis déduis $p(X=2)$ sans nouveau produit.

INDICE

Un seul feu vert : trois listes incompatibles, selon le rang du feu vert. Ensuite, la somme des probabilités de la loi vaut 1.

CORRIGÉ

Un seul feu vert. L'événement $(X=1)$ est la réunion de trois événements incompatibles : vert au premier feu seulement, au deuxième seulement, ou au troisième seulement. Donc :

$$\begin{aligned} p(X=1) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{1+2+3}{24} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Deux feux verts. La somme des probabilités de la loi vaut 1, avec $p(X=0)=\dfrac{1}{24}$ et $p(X=1)=p(X=3)=\dfrac{6}{24}$. Donc :

$$\begin{aligned} p(X=2) &= 1 - \frac{1}{24} - \frac{6}{24} \\ &\quad - \frac{6}{24} \\ &= \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X=1)=\dfrac{1}{4}$ et $p(X=2)=\dfrac{11}{24}$.

3.

Un camarade affirme que X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$. Montre qu'il se trompe.

INDICE

Une loi est donnée par les probabilités de ses valeurs. Compare $p(X=3)$ avec la valeur que donnerait cette loi binomiale.

CORRIGÉ

Méthode. Une loi est donnée par les probabilités de ses valeurs. Pour montrer que X ne suit pas la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$, il suffit de trouver une valeur dont les deux probabilités diffèrent.

Contre-exemple. Avec la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{2}{3}\right)$, on aurait :

$$\begin{aligned} p(X=3) &= C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, $p(X=3) = \frac{1}{4}$, et $\frac{1}{4} \neq \frac{8}{27}$, car $27 \neq 32$.

Conclusion. L'affirmation du camarade est fausse.

Remarque : les trois feux n'ont pas la même probabilité de vert, donc l'expérience n'est pas un schéma de Bernoulli. Cela rend l'affirmation suspecte, mais ne suffit pas à la réfuter : seul le calcul le fait.

4.

Calcule $E(X)$. Compare avec la somme $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

INDICE

Garde le dénominateur 24 pour la loi : $\frac{1}{24}$, $\frac{6}{24}$, $\frac{11}{24}$ et $\frac{6}{24}$.

CORRIGÉ

Espérance. Par définition, avec la loi au dénominateur 24 :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{6}{24} \\ &\quad + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{6}{24} \\ &= \frac{6 + 22 + 18}{24} \\ &= \frac{46}{24} = \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

Comparaison. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+8+9}{12} = \frac{23}{12}$.

Conclusion. $E(X) = \frac{23}{12}$. Les deux nombres sont égaux : ici, le nombre moyen de feux verts est la somme des probabilités de vert des trois feux.

Exercice 8

Cinq clés et une porte

Un gardien possède un trousseau de cinq clés, dont une seule ouvre la porte du local. Il essaie les clés une à une, au hasard, et met de côté chaque clé qui a échoué. On note X le rang de l'essai qui ouvre la porte. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, on note O_k : « le k-ième essai ouvre la porte ».

1.

Calcule $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

INDICE

Écris $(X = 2)$ avec O_1 et O_2. Combien reste-t-il de clés après un échec ?

CORRIGÉ

Premier essai. La clé est choisie au hasard parmi 5, dont une seule convient : $p(X = 1) = p(O_1) = \dfrac{1}{5}$.

Deuxième essai. L'événement $(X = 2)$ est $\overline{O_1} \cap O_2$. Sachant $\overline{O_1}$, il reste 4 clés, dont la bonne. Comme $p(\overline{O_1}) = \dfrac{4}{5} \neq 0$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned} p(X = 2) &= p(\overline{O_1}) \times p_{\overline{O_1}}(O_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X = 1) = p(X = 2) = \dfrac{1}{5}$.

2.

Montre que $p(X=3)=\dfrac{1}{5}$, puis donne la loi de X.

INDICE

Écris $(X=3)$ comme l'intersection de trois événements. Pour le rang 4, regroupe les deux premiers échecs en un seul événement.

CORRIGÉ

Rang 3. On a $(X=3)=\overline{O_1}\cap\overline{O_2}\cap O_3$. Comme $p(\overline{O_1})=\dfrac{4}{5}\neq 0$, la formule des probabilités composées pour deux événements donne :

$$\begin{aligned} p(\overline{O_1}\cap\overline{O_2}) &= \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{3}{5}\neq 0. \end{aligned}$$

Après deux échecs, il reste 3 clés, dont la bonne. La formule pour trois événements donne :

$$\begin{aligned} p(X=3) &= \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Rang 4. De même, $p(\overline{O_1}\cap\overline{O_2}\cap\overline{O_3})=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{5}\neq 0$. La formule pour trois événements, appliquée à $\overline{O_1}\cap\overline{O_2}$, $\overline{O_3}$ et O_4, donne :

$$\begin{aligned} p(X=4) &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Rang 5. La somme des probabilités d'une loi vaut 1, donc $p(X=5)=1-4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Conclusion. $p(X=3)=\dfrac{1}{5}$, et chaque rang de 1 à 5 a la même probabilité $\dfrac{1}{5}$.

3.

Calcule $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Toutes les probabilités valent $\dfrac{1}{5}$: mets ce facteur en évidence. Pense à $1+4+9+16+25=55$.

CORRIGÉ

Espérance. Toutes les probabilités valent $\dfrac{1}{5}$. Comme $1+2+3+4+5=15$:

$$E(X)=\frac{15}{5}=3.$$

Variance. Comme $1+4+9+16+25=55$, on a $E(X^2)=\dfrac{55}{5}=11$. Par le calcul pratique de la variance :

$$V(X)=11-3^2=2.$$

Conclusion. $E(X)=3$ et $V(X)=2$: en moyenne, le gardien ouvre la porte au troisième essai.

4.

Un autre jour, le gardien ne met plus de côté les clés qui échouent : il reprend chaque fois une clé au hasard parmi les cinq. Calcule la probabilité qu'il ouvre la porte en deux essais au plus. Compare avec le premier protocole.

INDICE

Les essais sont maintenant des épreuves indépendantes, de même probabilité de succès $\frac{1}{5}$. Passe par le contraire : deux échecs de suite.

CORRIGÉ

Nouveau modèle. Chaque essai choisit une clé au hasard parmi 5, indépendamment des précédents : les essais sont des épreuves indépendantes, de probabilité de succès $\frac{1}{5}$.

Contraire. Le contraire de « ouvrir en deux essais au plus » est « deux échecs de suite », de probabilité $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$. La probabilité cherchée vaut donc :

$$1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Comparaison. Avec le premier protocole, $p(X \leq 2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = \frac{10}{25}$.

Conclusion. Sans mettre de côté les clés, le gardien ouvre en deux essais au plus avec la probabilité $\frac{9}{25}$. Mettre de côté les clés qui échouent l'aide, car $\frac{10}{25} > \frac{9}{25}$.