BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Application	10

Exercice 1

Dix cartes, trois événements

Un paquet contient dix cartes numérotées de 11 à 20. Nadia tire une carte au hasard et lit son numéro. On note les événements :

- A : « le numéro est premier » ;
- B : « le numéro est pair » ;
- C : « le numéro est supérieur ou égal à 17 ».

1.

Décris l'univers Ω et donne son cardinal. Écris ensuite A, B et C en extension.

INDICE

Une issue est le numéro lu. Pour A, teste chaque entier de 11 à 20 : un nombre premier a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

2.

Écris en extension les événements $A \cap C$, $B \cup C$ et $\overline{C}$. Traduis chacun par une phrase.

INDICE

« Et » garde les issues communes aux deux ensembles ; « ou » garde celles de l'un au moins. Le contraire de C contient les issues de Ω hors de C.

3.

Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Et B et C ? Justifie chaque réponse par une intersection.

INDICE

Deux événements sont incompatibles quand leur intersection est vide. Cherche un numéro commun, ou montre qu'il n'en existe aucun.

Exercice 2

Thé, pâtisserie : réunion et contraire

Dans un café de Safi, on choisit un client au hasard. On note T : « il commande un thé » et G : « il commande une pâtisserie ». Une enquête donne $p(T) = \frac{7}{12}$, $p(G) = \frac{1}{3}$ et $p(T \cup G) = \frac{3}{4}$.

1.

Calcule $p(T \cap G)$. Traduis cet événement par une phrase.

INDICE

Utilise la probabilité de la réunion de deux événements, puis isole $p(T \cap G)$. Mets les fractions au dénominateur 12.

2.

Calcule la probabilité que le client ne commande ni thé ni pâtisserie.

INDICE

« Ni thé ni pâtisserie » est le contraire de « thé ou pâtisserie ». Applique la règle du contraire.

3.

Calcule la probabilité que le client commande un thé, mais pas de pâtisserie.

INDICE

Découpe T en deux événements incompatibles : $T \cap G$ et $T \cap \overline{G}$. Additionne leurs probabilités.

Exercice 3

Trois jetons tirés d'un sac

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher : quatre jaunes, trois bleus et deux blancs. On tire simultanément trois jetons du sac.

1.

Justifie que l'univers est muni de la probabilité uniforme. Calcule $\mathrm{card}(\Omega)$.

INDICE

Le tirage est simultané : une issue est une partie de trois jetons, sans ordre. Rappel de première année : un ensemble à n éléments a C_n^k parties à k éléments.

2.

Calcule la probabilité de l'événement M : « les trois jetons ont la même couleur ».

INDICE

Trois jetons de même couleur sont tous jaunes ou tous bleus : deux jetons blancs ne suffisent pas. Compte chaque cas par une combinaison, puis additionne.

3.

Calcule la probabilité de l'événement D : « les trois jetons ont trois couleurs différentes », puis celle de l'événement S : « aucun jeton n'est blanc ».

INDICE

Pour D, choisis un jeton de chaque couleur : principe multiplicatif. Pour S, les trois jetons sont pris parmi les sept jetons qui ne sont pas blancs.

Exercice 4

Natation ou tennis : deux conditionnements

Un club de sport d'Oujda compte 40 adhérents. Chacun pratique une seule activité : la natation ou le tennis. On choisit un adhérent au hasard ; les 40 choix sont équiprobables.

	Natation	Tennis	Total
Filles	15	9	24
Garçons	6	10	16
Total	21	19	40

On note F : « l'adhérent est une fille » et N : « l'adhérent pratique la natation ».

1.

Calcule $p(F)$ et $p(F \cap N)$.

INDICE

Par équiprobabilité, une probabilité est un effectif divisé par 40. Lis $F \cap N$ au croisement d'une ligne et d'une colonne.

2.

Calcule $p_F(N)$ et interprète ce nombre.

INDICE

Comme $p(F) \neq 0$, applique la définition : $p_F(N) = \dfrac{p(F \cap N)}{p(F)}$.

3.

On sait que l'adhérent choisi pratique la natation. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

INDICE

La condition est maintenant N. Calcule $p(N)$, vérifie qu'il n'est pas nul, puis forme le quotient. Ce n'est pas $p_F(N)$.

Exercice 5

L'huile de trois vergers

Une coopérative de Taounate presse des olives venues de trois vergers. Chaque bidon contient l'huile d'un seul des trois vergers. On prélève un bidon d'huile au hasard et l'on note :

- V_1, V_2 et V_3 les événements « le bidon provient du premier, du deuxième, du troisième verger » ;
- D l'événement « l'huile du bidon est trop acide ».

On sait que :

- $p(V_1) = \frac{1}{2}$, $p(V_2) = \frac{1}{3}$ et $p(V_3) = \frac{1}{6}$;
- $p_{V_1}(D) = \frac{1}{10}$, $p_{V_2}(D) = \frac{1}{20}$ et $p_{V_3}(D) = \frac{1}{5}$.

1.

Justifie que V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements.

INDICE

Vérifie les deux conditions de la définition : incompatibles deux à deux, réunion égale à l'univers. Ajoute que chaque probabilité est non nulle.

2.

Calcule $p(D)$.

INDICE

Applique la formule des probabilités totales avec le système complet de la question 1. Réduis au dénominateur 60.

3.

Contrôle ce résultat : calcule $p(\overline{D})$ par la même formule, puis vérifie que $p(D) + p(\overline{D}) = 1$.

INDICE

Pour chaque verger, $p_{V_i}(\overline{D}) = 1 - p_{V_i}(D)$, car la probabilité sachant V_i est une probabilité.

Exercice 6

Un dé à vingt faces : indépendant ou non ?

On lance un dé équilibré à vingt faces, numérotées de 1 à 20. On note A : « le résultat est un multiple de 4 », B : « le résultat est inférieur ou égal à 8 » et C : « le résultat est pair ».

1.

Montre que A et B sont indépendants.

INDICE

Le dé est équilibré : chaque face a la probabilité $\frac{1}{20}$. Calcule $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$ séparément, puis compare.

2.

Les événements A et C sont-ils indépendants ?

INDICE

Un multiple de 4 est toujours pair : écris $A \cap C$ sans calcul. Compare ensuite comme à la question 1.

3.

Déduis de la question 1 la probabilité que le résultat ne soit pas un multiple de 4 et soit strictement supérieur à 8. Contrôle en comptant les faces.

INDICE

L'événement cherché est $\overline{A} \cap \overline{B}$. Les contraires de deux événements indépendants sont indépendants.

Exercice 7

L'écart entre deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge et l'autre vert. Les deux lancers sont indépendants. On note X l'écart entre les deux résultats : le plus grand moins le plus petit, et 0 s'ils sont égaux. Par exemple, si le dé rouge donne 2 et le vert 5, alors $X = 3$.

1.

Décris l'univers et donne son cardinal. Justifie l'équiprobabilité, puis donne l'ensemble des valeurs de X.

INDICE

Une issue est un couple (résultat du rouge, résultat du vert). Les deux dés sont équilibrés et lancés indépendamment : qu'en déduis-tu pour la probabilité d'un couple ?

2.

Détermine la loi de probabilité de X. Présente-la dans un tableau.

INDICE

Pour chaque valeur k, compte les couples dont l'écart vaut k. Pour $k \neq 0$, pense aux deux ordres : $(a, a+k)$ et $(a+k, a)$.

3.

Vérifie que la somme des probabilités vaut 1. Calcule ensuite $p(X \geq 3)$.

INDICE

Additionne les nombres de couples plutôt que les fractions. Pour $p(X \geq 3)$, additionne les probabilités des valeurs 3, 4 et 5.

Exercice 8

Quatre flèches vers le centre

Un archer tire quatre flèches. À chaque tir, il atteint le centre de la cible avec la probabilité $\frac{3}{5}$. Les tirs sont indépendants les uns des autres. On note X le nombre de flèches qui atteignent le centre.

1.

Montre que X suit une loi binomiale, dont tu préciseras les paramètres.

INDICE

Nomme l'épreuve répétée, le succès et sa probabilité. Dis combien de fois l'épreuve est répétée, et pourquoi les répétitions sont indépendantes.

2.

Calcule $p(X = 2)$ et $p(X = 4)$.

INDICE

Combien de façons de choisir les rangs de deux tirs réussis parmi quatre ? Quelle est la probabilité d'une liste de tirs donnée ?

3.

Calcule la probabilité qu'au moins une flèche atteigne le centre. Donne ensuite $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Le contraire de « au moins une flèche au centre » est « aucune flèche au centre ». Pour $E(X)$ et $V(X)$, utilise les formules de la loi binomiale.

Exercice 9

Un ticket à quatre dirhams

Un ticket de jeu coûte 4 dirhams. Le gain net X du joueur, en dirhams et mise déduite, suit la loi suivante :

x_i	-4	0	6	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$

1.

Vérifie que le tableau définit bien une loi. Calcule $E(X)$. Le jeu est-il favorable, défavorable ou équitable pour le joueur ?

INDICE

Additionne les probabilités au dénominateur 20, puis fais la somme des produits $x_i p_i$. Un jeu est équitable quand l'espérance du gain net est nulle.

2.

Calcule $E(X^2)$, puis $V(X)$.

INDICE

Élève chaque valeur au carré, en gardant les mêmes probabilités. Puis utilise le calcul pratique de la variance.

3.

Calcule l'écart-type $\sigma(X)$ sous forme exacte.

INDICE

$\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$. Traite séparément le numérateur et le dénominateur.

Exercice 10

Lire une fonction de répartition

Une variable aléatoire X a pour fonction de répartition F, donnée par intervalles :

x	$]-\infty,-2[$	$[-2,1[$	$[1,3[$	$[3,4[$	$[4,+\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

1.

Lis dans le tableau $F(0)$, $F(3)$ et $F(10)$. Que signifie $F(3)$?

INDICE

Cherche l'intervalle qui contient chaque nombre. Les intervalles sont fermés à gauche : 3 appartient à $[3,4[$.

2.

Déduis-en la loi de probabilité de X.

INDICE

Repère les réels où F change de valeur. Que représente la hauteur d'un saut ?

3.

Calcule $p(-2<X\leq 3)$ et $p(X>1)$ à l'aide de F.

INDICE

Écris $(-2<X\leq 3)$ comme une différence de deux événements de la forme $(X\leq t)$: pour tous réels $a<b$, $p(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$. Pour $(X>1)$, pense au contraire.