BURHAN

Calcul des probabilités : exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Calcul des probabilités	Application	10

Exercice 1

Dix cartes, trois événements

Un paquet contient dix cartes numérotées de 11 à 20. Nadia tire une carte au hasard et lit son numéro. On note les événements :

- A : « le numéro est premier » ;
- B : « le numéro est pair » ;
- C : « le numéro est supérieur ou égal à 17 ».

1.

Décris l'univers Ω et donne son cardinal. Écris ensuite A, B et C en extension.

INDICE

Une issue est le numéro lu. Pour A, teste chaque entier de 11 à 20 : un nombre premier a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

CORRIGÉ

Univers. Une issue est le numéro de la carte tirée. Donc $\Omega = \{11, 12, \ldots, 20\}$ et $\mathrm{card}(\Omega) = 10$.

Événement A. Entre 11 et 20, les nombres premiers sont 11, 13, 17 et 19. Les autres numéros ne le sont pas : $15 = 3 \times 5$, et 12, 14, 16, 18, 20 sont divisibles par 2.

Conclusion. En extension :

- $A = \{11, 13, 17, 19\}$;
- $B = \{12, 14, 16, 18, 20\}$;
- $C = \{17, 18, 19, 20\}$.

2.

Écris en extension les événements $A \cap C$, $B \cup C$ et $\overline{C}$. Traduis chacun par une phrase.

INDICE

« Et » garde les issues communes aux deux ensembles ; « ou » garde celles de l'un au moins. Le contraire de C contient les issues de Ω hors de C.

CORRIGÉ

On garde les issues communes pour une intersection, celles de l'un au moins pour une réunion, et celles de Ω hors de C pour le contraire.

- $A \cap C = \{17, 19\}$: « le numéro est premier et supérieur ou égal à 17 ».
- $B \cup C = \{12, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$: « le numéro est pair ou supérieur ou égal à 17 ».
- $\overline{C} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$: « le numéro est inférieur ou égal à 16 ».

3.

Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Et B et C ? Justifie chaque réponse par une intersection.

INDICE

Deux événements sont incompatibles quand leur intersection est vide. Cherche un numéro commun, ou montre qu'il n'en existe aucun.

CORRIGÉ

Deux événements sont incompatibles lorsque leur intersection est vide.

Cas de A et B. Aucun élément de A n'est pair, donc $A \cap B = \emptyset$: entre 11 et 20, aucun numéro n'est à la fois premier et pair.

Cas de B et C. $B \cap C = \{18, 20\}$, qui n'est pas vide : la carte 18 réalise les deux événements.

Conclusion. A et B sont incompatibles ; B et C ne le sont pas.

Exercice 2

Thé, pâtisserie : réunion et contraire

Dans un café de Safi, on choisit un client au hasard. On note T : « il commande un thé » et G : « il commande une pâtisserie ». Une enquête donne $p(T) = \dfrac{7}{12}$, $p(G) = \dfrac{1}{3}$ et $p(T \cup G) = \dfrac{3}{4}$.

1.

Calcule $p(T \cap G)$. Traduis cet événement par une phrase.

INDICE

Utilise la probabilité de la réunion de deux événements, puis isole $p(T \cap G)$. Mets les fractions au dénominateur 12.

CORRIGÉ

Formule utilisée. D'après la probabilité de la réunion de deux événements :

$$\begin{aligned} p(T \cup G) = p(T) + p(G) \\ - p(T \cap G). \end{aligned}$$

Calcul. On isole $p(T \cap G)$, au dénominateur 12 :

$$\begin{aligned} p(T \cap G) &= \frac{7}{12} + \frac{4}{12} - \frac{9}{12} \\ &= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(T \cap G) = \dfrac{1}{6}$. L'événement $T \cap G$ est « le client commande un thé et une pâtisserie ».

2.

Calcule la probabilité que le client ne commande ni thé ni pâtisserie.

INDICE

« Ni thé ni pâtisserie » est le contraire de « thé ou pâtisserie ». Applique la règle du contraire.

CORRIGÉ

L'événement « ni thé ni pâtisserie » est $\overline{T \cup G}$, contraire de $T \cup G$. Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p\left(\overline{T \cup G}\right) &= 1 - p(T \cup G) \\ &= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le client ne commande ni thé ni pâtisserie avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

3.

Calcule la probabilité que le client commande un thé, mais pas de pâtisserie.

INDICE

Découpe T en deux événements incompatibles : $T \cap G$ et $T \cap \overline{G}$. Additionne leurs probabilités.

CORRIGÉ

Découpage de T. L'événement cherché est $T \cap \overline{G}$. Les événements $T \cap G$ et $T \cap \overline{G}$ sont incompatibles, et leur réunion est T. La probabilité d'une réunion d'événements incompatibles donne :

$$\begin{aligned} p(T) = p(T \cap G) \\ + p(T \cap \overline{G}). \end{aligned}$$

Calcul.

$$\begin{aligned} p(T \cap \overline{G}) &= \frac{7}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Conclusion. Le client commande un thé, mais pas de pâtisserie, avec la probabilité $\frac{5}{12}$.

Exercice 3

Trois jetons tirés d'un sac

Un sac contient neuf jetons indiscernables au toucher : quatre jaunes, trois bleus et deux blancs. On tire simultanément trois jetons du sac.

1.

Justifie que l'univers est muni de la probabilité uniforme. Calcule $\mathrm{card}(\Omega)$.

INDICE

Le tirage est simultané : une issue est une partie de trois jetons, sans ordre. Rappel de première année : un ensemble à n éléments a C_n^k parties à k éléments.

CORRIGÉ

Équiprobabilité. Les jetons sont indiscernables au toucher : toutes les parties de trois jetons ont la même chance d'être tirées. L'univers Ω est donc muni de la probabilité uniforme.

Cardinal. Le tirage est simultané : une issue est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 9 jetons. Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(\Omega) &= C_9^3 \\ &= \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} \\ &= 84.\end{aligned}$$

Conclusion. L'univers est muni de la probabilité uniforme, et $\mathrm{card}(\Omega) = 84$.

2.

Calcule la probabilité de l'événement M : « les trois jetons ont la même couleur ».

INDICE

Trois jetons de même couleur sont tous jaunes ou tous bleus : deux jetons blancs ne suffisent pas. Compte chaque cas par une combinaison, puis additionne.

CORRIGÉ

Dénombrement. Trois jetons de même couleur sont soit trois jaunes, soit trois bleus, car il n'y a que deux jetons blancs. Ces deux cas sont incompatibles, donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(M) &= C_4^3 + C_3^3 \\ &= 4 + 1 = 5.\end{aligned}$$

Probabilité. Par équiprobabilité :

$$\begin{aligned}p(M) &= \frac{\mathrm{card}(M)}{\mathrm{card}(\Omega)} \\ &= \frac{5}{84}.\end{aligned}$$

Conclusion. Les trois jetons ont la même couleur avec la probabilité $\dfrac{5}{84}$.

3.

Calcule la probabilité de l'événement D : « les trois jetons ont trois couleurs différentes », puis celle de l'événement S : « aucun jeton n'est blanc ».

INDICE

Pour D, choisis un jeton de chaque couleur : principe multiplicatif. Pour S, les trois jetons sont pris parmi les sept jetons qui ne sont pas blancs.

CORRIGÉ

Événement D. On choisit un jeton jaune parmi 4, un bleu parmi 3 et un blanc parmi 2. Par le principe multiplicatif, $\mathrm{card}(D) = 4 \times 3 \times 2 = 24$. Donc :

$$p(D) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

Événement S. Les trois jetons sont pris parmi les 7 jetons jaunes ou bleus : $\mathrm{card}(S) = C_7^3 = 35$. Donc :

$$p(S) = \frac{35}{84} = \frac{5}{12}.$$

Conclusion. $p(D) = \frac{2}{7}$ et $p(S) = \frac{5}{12}$.

Exercice 4

Natation ou tennis : deux conditionnements

Un club de sport d'Oujda compte 40 adhérents. Chacun pratique une seule activité : la natation ou le tennis. On choisit un adhérent au hasard ; les 40 choix sont équiprobables.

	Natation	Tennis	Total
Filles	15	9	24
Garçons	6	10	16
Total	21	19	40

On note F : « l'adhérent est une fille » et N : « l'adhérent pratique la natation ».

1.

Calcule $p(F)$ et $p(F \cap N)$.

INDICE

Par équiprobabilité, une probabilité est un effectif divisé par 40. Lis $F \cap N$ au croisement d'une ligne et d'une colonne.

CORRIGÉ

Les 40 choix sont équiprobables : la probabilité d'un événement est son effectif divisé par 40.

- Les filles sont 24, donc $p(F) = \dfrac{24}{40} = \dfrac{3}{5}$.
- L'événement $F \cap N$ contient les 15 filles qui pratiquent la natation, donc $p(F \cap N) = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$.

2.

Calcule $p_F(N)$ et interprète ce nombre.

INDICE

Comme $p(F) \neq 0$, applique la définition : $p_F(N) = \dfrac{p(F \cap N)}{p(F)}$.

CORRIGÉ

Calcul. On a $p(F) = \dfrac{3}{5} \neq 0$. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_F(N) &= \frac{p(F \cap N)}{p(F)} \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Contrôle sur le tableau. On compte 15 nageuses parmi 24 filles, et $\dfrac{15}{24} = \dfrac{5}{8}$.

Conclusion. $p_F(N) = \dfrac{5}{8}$: si l'adhérent choisi est une fille, il pratique la natation avec la probabilité $\dfrac{5}{8}$.

3.

On sait que l'adhérent choisi pratique la natation. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

INDICE

La condition est maintenant N. Calcule $p(N)$, vérifie qu'il n'est pas nul, puis forme le quotient. Ce n'est pas $p_F(N)$.

CORRIGÉ

On cherche $p_N(F)$. Les nageurs sont 21, donc $p(N) = \dfrac{21}{40} \neq 0$. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} p_N(F) &= \frac{p(N \cap F)}{p(N)} \\ &= \frac{15}{40} \times \frac{40}{21} \\ &= \frac{15}{21} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Conclusion. Sachant que l'adhérent pratique la natation, c'est une fille avec la probabilité $\dfrac{5}{7}$.

Ce nombre diffère de $p_F(N) = \dfrac{5}{8}$: on ne confond jamais la probabilité de N sachant F et celle de F sachant N.

Exercice 5

L'huile de trois vergers

Une coopérative de Taounate presse des olives venues de trois vergers. Chaque bidon contient l'huile d'un seul des trois vergers. On prélève un bidon d'huile au hasard et l'on note :

- V_1, V_2 et V_3 les événements « le bidon provient du premier, du deuxième, du troisième verger » ;
- D l'événement « l'huile du bidon est trop acide ».

On sait que :

- $p(V_1) = \frac{1}{2}, p(V_2) = \frac{1}{3}$ et $p(V_3) = \frac{1}{6}$;
- $p_{V_1}(D) = \frac{1}{10}, p_{V_2}(D) = \frac{1}{20}$ et $p_{V_3}(D) = \frac{1}{5}$.

1.

Justifie que V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements.

INDICE

Vérifie les deux conditions de la définition : incompatibles deux à deux, réunion égale à l'univers. Ajoute que chaque probabilité est non nulle.

CORRIGÉ

Incompatibilité. D'après l'énoncé, un bidon provient d'un seul verger : les événements V_1, V_2 et V_3 sont deux à deux incompatibles.

Réunion. Tout bidon provient de l'un des trois vergers : $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \Omega$.

Conclusion. V_1, V_2 et V_3 forment un système complet d'événements. Leurs probabilités sont de plus non nulles. Contrôle : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

2.

Calcule $p(D)$.

INDICE

Applique la formule des probabilités totales avec le système complet de la question 1. Réduis au dénominateur 60.

CORRIGÉ

Les événements V_1, V_2, V_3 forment un système complet, et chacun a une probabilité non nulle. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(V_1)\,p_{V_1}(D) \\ &\quad + p(V_2)\,p_{V_2}(D) \\ &\quad + p(V_3)\,p_{V_3}(D) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{30} \\ &= \frac{3+1+2}{60} \\ &= \frac{6}{60} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(D) = \dfrac{1}{10}$.

3.

Contrôle ce résultat : calcule $p(\overline{D})$ par la même formule, puis vérifie que $p(D) + p(\overline{D}) = 1$.

INDICE

Pour chaque verger, $p_{V_i}(\overline{D}) = 1 - p_{V_i}(D)$, car la probabilité sachant V_i est une probabilité.

CORRIGÉ

Probabilités sachant V_i. La probabilité sachant V_i est une probabilité, donc $p_{V_i}(\overline{D}) = 1 - p_{V_i}(D)$. On obtient $\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{19}{20}$ et $\dfrac{4}{5}$.

Probabilités totales.

$$\begin{aligned} p(\overline{D}) &= \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \\ &\quad + \frac{1}{3} \times \frac{19}{20} \\ &\quad + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{27 + 19 + 8}{60} \\ &= \frac{54}{60} = \frac{9}{10}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(\overline{D}) = \dfrac{9}{10}$, et l'on a bien $p(D) + p(\overline{D}) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{9}{10} = 1$.

Exercice 6

Un dé à vingt faces : indépendant ou non ?

On lance un dé équilibré à vingt faces, numérotées de 1 à 20. On note A : « le résultat est un multiple de 4 », B : « le résultat est inférieur ou égal à 8 » et C : « le résultat est pair ».

1.

Montre que A et B sont indépendants.

INDICE

Le dé est équilibré : chaque face a la probabilité $\frac{1}{20}$. Calcule $p(A)$, $p(B)$ et $p(A \cap B)$ séparément, puis compare.

CORRIGÉ

Équiprobabilité. Le dé est équilibré : il y a équiprobabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Pour tout événement E, $p(E) = \dfrac{\text{card}(E)}{20}$.

Les trois probabilités.

- $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, donc $p(A) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.
- $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$, donc $p(B) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$.
- $A \cap B = \{4, 8\}$, donc $p(A \cap B) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$.

Comparaison.

$$\begin{aligned} p(A) \times p(B) &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$: les événements A et B sont indépendants.

2.

Les événements A et C sont-ils indépendants ?

INDICE

Un multiple de 4 est toujours pair : écris $A \cap C$ sans calcul. Compare ensuite comme à la question 1.

CORRIGÉ

Probabilité de $A \cap C$. Tout multiple de 4 est pair : $A \subset C$. Donc $A \cap C = A$ et $p(A \cap C) = \dfrac{1}{4}$.

Produit. C contient 10 faces, donc $p(C) = \dfrac{1}{2}$ et $p(A) \times p(C) = \dfrac{1}{8}$.

Conclusion. Comme $\dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8}$, on a $p(A \cap C) \neq p(A) \times p(C)$: les événements A et C ne sont pas indépendants.

3.

Déduis de la question 1 la probabilité que le résultat ne soit pas un multiple de 4 et soit strictement supérieur à 8. Contrôle en comptant les faces.

INDICE

L'événement cherché est $\overline{A} \cap \overline{B}$. Les contraires de deux événements indépendants sont indépendants.

CORRIGÉ

Calcul. L'événement cherché est $\overline{A} \cap \overline{B}$. Comme A et B sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi, par la propriété sur l'indépendance et les événements contraires. Donc :

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap \overline{B}) &= p(\overline{A}) \times p(\overline{B}) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Contrôle. De 9 à 20, il y a 12 faces, dont 3 multiples de 4 : 12, 16 et 20. Il reste 9 faces, d'où la probabilité $\frac{9}{20}$.

Conclusion. Le résultat n'est pas un multiple de 4 et dépasse strictement 8 avec la probabilité $\frac{9}{20}$.

Exercice 7

L'écart entre deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge et l'autre vert. Les deux lancers sont indépendants. On note X l'écart entre les deux résultats : le plus grand moins le plus petit, et 0 s'ils sont égaux. Par exemple, si le dé rouge donne 2 et le vert 5, alors $X = 3$.

1.

Décris l'univers et donne son cardinal. Justifie l'équiprobabilité, puis donne l'ensemble des valeurs de X.

INDICE

Une issue est un couple (résultat du rouge, résultat du vert). Les deux dés sont équilibrés et lancés indépendamment : qu'en déduis-tu pour la probabilité d'un couple ?

CORRIGÉ

Univers. Une issue est un couple (a, b) : a est le résultat du dé rouge, b celui du dé vert. Donc $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$ et $\mathrm{card}(\Omega) = 6 \times 6 = 36$.

Équiprobabilité. Les dés sont équilibrés et lancés indépendamment : chaque couple a la probabilité $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Valeurs de X. L'écart vaut 0 pour un double, et au plus 5, pour $(1, 6)$ et $(6, 1)$. Soit k un entier de 0 à 5 : la valeur k est atteinte par le couple $(1, 1 + k)$.

Conclusion. $\mathrm{card}(\Omega) = 36$, les couples sont équiprobables et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.

Détermine la loi de probabilité de X. Présente-la dans un tableau.

INDICE

Pour chaque valeur k, compte les couples dont l'écart vaut k. Pour $k \neq 0$, pense aux deux ordres : $(a, a + k)$ et $(a + k, a)$.

CORRIGÉ

Dénombrement. Pour $k = 0$, les couples sont les 6 doubles. Soit k un entier de 1 à 5 : l'écart vaut k pour les couples $(a, a + k)$ et $(a + k, a)$, avec $1 \leq a \leq 6 - k$. Il y en a $2(6 - k)$, soit 10, 8, 6, 4 et 2 couples.

Loi. Par équiprobabilité, on divise chaque effectif par 36 :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

3.

Vérifie que la somme des probabilités vaut 1. Calcule ensuite $p(X \geq 3)$.

INDICE

Additionne les nombres de couples plutôt que les fractions. Pour $p(X \geq 3)$, additionne les probabilités des valeurs 3, 4 et 5.

CORRIGÉ

Somme. Les effectifs donnent $6 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 36$ couples : la somme des probabilités vaut $\dfrac{36}{36} = 1$.

Calcul de $p(X \geq 3)$. L'événement $(X \geq 3)$ est la réunion des événements incompatibles $(X = 3)$, $(X = 4)$ et $(X = 5)$. Donc :

$$\begin{aligned} p(X \geq 3) &= \frac{6 + 4 + 2}{36} \\ &= \frac{12}{36} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion. La somme des probabilités vaut 1, et $p(X \geq 3) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 8

Quatre flèches vers le centre

Un archer tire quatre flèches. À chaque tir, il atteint le centre de la cible avec la probabilité $\frac{3}{5}$. Les tirs sont indépendants les uns des autres. On note X le nombre de flèches qui atteignent le centre.

1.

Montre que X suit une loi binomiale, dont tu préciseras les paramètres.

INDICE

Nomme l'épreuve répétée, le succès et sa probabilité. Dis combien de fois l'épreuve est répétée, et pourquoi les répétitions sont indépendantes.

CORRIGÉ

- **Épreuve.** Un tir a deux issues : le succès « la flèche atteint le centre », de probabilité $\frac{3}{5}$, et l'échec, de probabilité $\frac{2}{5}$. C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{5}$.
- **Répétition.** L'épreuve est répétée $n = 4$ fois, et les tirs sont indépendants par hypothèse. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{3}{5}$.

Conclusion. X compte les succès de ce schéma, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5}\right)$.

2.

Calcule $p(X=2)$ et $p(X=4)$.

INDICE

Combien de façons de choisir les rangs de deux tirs réussis parmi quatre ? Quelle est la probabilité d'une liste de tirs donnée ?

CORRIGÉ

Formule. Comme X suit la loi $\mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5}\right)$, pour tout $k \in \{0,1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned} &p(X=k) \\ &= C_4^k \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(\frac{2}{5}\right)^{4-k}. \end{aligned}$$

Pour $k=2$.

$$\begin{aligned} p(X=2) &= C_4^2 \times \frac{9}{25} \times \frac{4}{25} \\ &= \frac{6 \times 36}{625} = \frac{216}{625}. \end{aligned}$$

Pour $k=4$.

$$\begin{aligned} p(X=4) &= C_4^4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \\ &= \frac{81}{625}. \end{aligned}$$

Conclusion. $p(X=2) = \frac{216}{625}$ et $p(X=4) = \frac{81}{625}$.

3.

Calcule la probabilité qu'au moins une flèche atteigne le centre. Donne ensuite $E(X)$ et $V(X)$.

INDICE

Le contraire de « au moins une flèche au centre » est « aucune flèche au centre ». Pour $E(X)$ et $V(X)$, utilise les formules de la loi binomiale.

CORRIGÉ

Au moins une flèche au centre. Le contraire de $(X \geq 1)$ est $(X = 0)$, et $p(X = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$.

Par la règle du contraire :

$$\begin{aligned} p(X \geq 1) &= 1 - \frac{16}{625} \\ &= \frac{609}{625}. \end{aligned}$$

Espérance et variance. Pour la loi $\mathcal{B}\left(4, \frac{3}{5}\right)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}, \\ V(X) &= 4 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{25}. \end{aligned}$$

Conclusion. Au moins une flèche atteint le centre avec la probabilité $\frac{609}{625}$; $E(X) = \frac{12}{5}$ et $V(X) = \frac{24}{25}$.

Exercice 9

Un ticket à quatre dirhams

Un ticket de jeu coûte 4 dirhams. Le gain net X du joueur, en dirhams et mise déduite, suit la loi suivante :

x_i	-4	0	6	16
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$

1.

Vérifie que le tableau définit bien une loi. Calcule $E(X)$. Le jeu est-il favorable, défavorable ou équitable pour le joueur ?

INDICE

Additionne les probabilités au dénominateur 20, puis fais la somme des produits $x_i p_i$. Un jeu est équitable quand l'espérance du gain net est nulle.

CORRIGÉ

Loi. Les probabilités sont positives et $\frac{10+5+3+2}{20} = 1$: le tableau définit bien une loi.

Espérance. Par définition :

$$\begin{aligned} E(X) &= -4 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 6 \times \frac{3}{20} + 16 \times \frac{1}{10} \\ &= -2 + \frac{9}{10} + \frac{8}{5} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Interprétation. L'espérance du gain net n'est pas nulle : le jeu n'est pas équitable. Sur un grand nombre de tickets, le joueur gagne en moyenne un demi-dirham par ticket.

Conclusion. $E(X) = \frac{1}{2} > 0$: le jeu est favorable au joueur.

2.

Calcule $E(X^2)$, puis $V(X)$.

INDICE

Élève chaque valeur au carré, en gardant les mêmes probabilités. Puis utilise le calcul pratique de la variance.

CORRIGÉ

Calcul de $E(X^2)$. On élève chaque valeur au carré, en gardant les mêmes probabilités :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 16 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 36 \times \frac{3}{20} \\ &\quad + 256 \times \frac{1}{10} \\ &= 8 + \frac{27}{5} + \frac{128}{5} \\ &= 8 + 31 = 39. \end{aligned}$$

Variance. Par le calcul pratique de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \\ &= 39 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 39 - \frac{1}{4} = \frac{155}{4}. \end{aligned}$$

Conclusion. $E(X^2) = 39$ et $V(X) = \dfrac{155}{4}$.

3.

Calcule l'écart-type $\sigma(X)$ sous forme exacte.

INDICE

$\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$. Traite séparément le numérateur et le dénominateur.

CORRIGÉ

Par définition, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{155}{4}}$. Donc :

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{155}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{155}}{2}.$$

Comme $155 = 5 \times 31$, l'entier 155 n'a aucun facteur carré autre que 1 : la racine $\sqrt{155}$ ne se simplifie pas.

Conclusion. $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{155}}{2}$.

Exercice 10

Lire une fonction de répartition

Une variable aléatoire X a pour fonction de répartition F, donnée par intervalles :

x	$]-\infty,-2[$	$[-2,1[$	$[1,3[$	$[3,4[$	$[4,+\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	1

1.

Lis dans le tableau $F(0)$, $F(3)$ et $F(10)$. Que signifie $F(3)$?

INDICE

Cherche l'intervalle qui contient chaque nombre. Les intervalles sont fermés à gauche : 3 appartient à $[3,4[$.

CORRIGÉ

Lecture. On cherche l'intervalle qui contient chaque réel.

- $0 \in [-2,1[$, donc $F(0)=\frac{1}{8}$.
- $3 \in [3,4[$, donc $F(3)=\frac{7}{8}$.
- $10 \in [4,+\infty[$, donc $F(10)=1$.

Interprétation. Par définition, $F(3)=p(X\leq 3)$: la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à 3 vaut $\frac{7}{8}$.

2.

Déduis-en la loi de probabilité de X.

INDICE

Repère les réels où F change de valeur. Que représente la hauteur d'un saut ?

CORRIGÉ

Valeurs de X. La fonction F ne change de valeur qu'en -2, 1, 3 et 4 : ce sont les valeurs que X prend avec une probabilité non nulle.

Hauteur des sauts. Par les probabilités calculées avec la fonction de répartition :

- $p(X=-2)=F(-2)=\frac{1}{8}$;
- $p(X=1)=F(1)-F(-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$;
- $p(X=3)=F(3)-F(1)=\frac{7}{8}-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$;
- $p(X=4)=F(4)-F(3)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$.

Contrôle : $\frac{1+3+3+1}{8}=1$.

Conclusion. X prend les valeurs -2, 1, 3 et 4, avec les probabilités respectives $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

3.

Calcule $p(-2 < X \leq 3)$ et $p(X > 1)$ à l'aide de F.

INDICE

Écris $(-2 < X \leq 3)$ comme une différence de deux événements de la forme $(X \leq t)$: pour tous réels $a < b$, $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Pour $(X > 1)$, pense au contraire.

CORRIGÉ

Première probabilité. Pour tous réels $a < b$, $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Donc :

$$\begin{aligned} &p(-2 < X \leq 3) \\ &= F(3) - F(-2) \\ &= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Seconde probabilité. L'événement $(X > 1)$ est le contraire de $(X \leq 1)$. Donc :

$$\begin{aligned} p(X > 1) &= 1 - F(1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Contrôle avec la loi. $p(X = 1) + p(X = 3) = \frac{3}{4}$ et $p(X = 3) + p(X = 4) = \frac{1}{2}$.

Conclusion. $p(-2 < X \leq 3) = \frac{3}{4}$ et $p(X > 1) = \frac{1}{2}$.