BURHAN

Calcul des probabilités

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/calcul-des-probabilites/cours

Chapitre	Semestre
Calcul des probabilités	Semestre 2

Prévoir l'imprévisible

À la fête de fin d'année du lycée, un stand propose un jeu simple. Tu lances deux fois un dé équilibré à quatre faces, numérotées de 1 à 4. Tu additionnes les deux résultats.

La somme va de 2 à 8. Avant de lancer, tu dois parier sur une somme. Laquelle choisir ?

Devine : Le bon pari

Sur quelle somme as-tu le plus de chances de gagner ?

A. Sur 2 ou sur 8.

Faux.
La somme 2 n'arrive que par le couple $(1, 1)$, et la somme 8 que par $(4, 4)$: une seule façon chacune.

B. Sur 5.

Juste.
Quatre couples donnent 5 : $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et $(4, 1)$. Aucune autre somme n'en a autant.

C. Peu importe : toutes les sommes se valent.

Faux.
Compte les couples : la somme 2 en a un seul, la somme 5 en a quatre.

Indice 1
Écris les deux résultats comme un couple, par exemple $(3, 1)$: premier lancer, puis second.
Indice 2
Range les couples selon leur somme.

Correction
Il y a 16 couples. Ils se répartissent ainsi selon leur somme :

Somme	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de couples	1	2	3	4	3	2	1

La somme 5 est obtenue par 4 couples sur 16 : c'est le meilleur pari.

Personne ne peut prévoir le prochain lancer. Pourtant, sur un très grand nombre de parties, la somme 5 sort à peu près une partie sur quatre. Sa fréquence se stabilise près de $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

C'est ce nombre stable que l'on appelle une **probabilité**. Ce chapitre apprend à le calculer exactement, sans lancer un seul dé.

Tu vas décrire une expérience par son **univers**, puis calculer des probabilités par des règles. Ensuite, tu tiendras compte d'une information : c'est la probabilité conditionnelle. Viendront l'indépendance, les variables aléatoires et la loi binomiale.

À chaque étape, tu apprendras à **rédiger** : nommer l'hypothèse, écrire le calcul, conclure par une phrase. C'est exactement ce que demande un « montrer que ».

Univers et événements

Lister les issues

Devine : Une pièce, puis un dé

Tu lances une pièce, qui donne Pile (P) ou Face (F), puis le dé à quatre faces. Une issue est un couple, comme $(P, 3)$. Combien y a-t-il d'issues ?

A. 6

Faux.
Tu as additionné $2 + 4$. Or chaque côté de la pièce s'associe à chacune des quatre faces.

B. 16

Faux.
$4 \times 4 = 16$ compterait deux dés à quatre faces. Ici, la pièce n'a que deux côtés.

C. 8

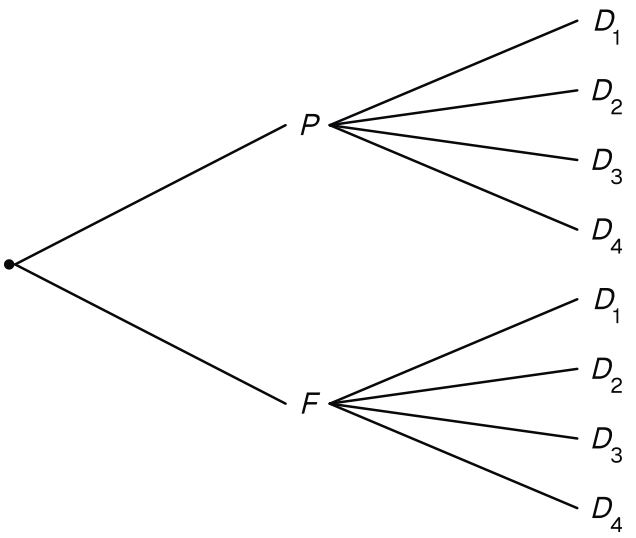
Juste.
Deux côtés, quatre faces : $2 \times 4 = 8$ couples, de $(P, 1)$ à $(F, 4)$.

Indice 1
Fixe d'abord le côté de la pièce : combien de couples commencent par P ?

Correction
Les issues sont $(P, 1)$, $(P, 2)$, $(P, 3)$, $(P, 4)$, $(F, 1)$, $(F, 2)$, $(F, 3)$ et $(F, 4)$. Il y en a $2 \times 4 = 8$.

Petit rappel de 1BAC. Le **cardinal** d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{card}(E)$, est son nombre d'éléments. Pour deux ensembles finis E et D, on a $\mathrm{card}(E \times D) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(D)$.

Avec $E = \{P, F\}$ et $D = \{1, 2, 3, 4\}$, on retrouve $\mathrm{card}(E \times D) = 2 \times 4 = 8$. Enfin, un ensemble à n éléments a 2^n parties : $\{1, 2, 3\}$ en a $2^3 = 8$.



Arbre de choix de l'expérience : la pièce donne P ou F, puis le dé à quatre faces donne 1, 2, 3 ou 4 (événements D_1 à D_4). Chaque chemin est un couple : 2 × 4 = 8 issues.

Définition : Expérience aléatoire, univers et événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît toutes les issues possibles, sans pouvoir prévoir celle qui se réalisera. L'ensemble de ses issues est l'**univers**, noté Ω ; dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini non vide.

1. Un **événement** est une partie de Ω. L'événement A est **réalisé** si l'issue obtenue appartient à A.
2. Un **événement élémentaire** est un événement qui contient une seule issue : $\{\omega\}$, avec $\omega \in \Omega$.
3. Ω est l'**événement certain** ; $\emptyset$ est l'**événement impossible**.

Deux lancers du dé

Exemple : Deux lancers du dé à quatre faces

On lance deux fois le dé à quatre faces. Une issue est un couple (a, b) : a est le premier résultat, b le second. Ainsi $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^2$ et $\mathrm{card}(\Omega) = 16$.

- « La somme vaut 5 » est l'événement $\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.
- « La somme vaut 8 » est l'événement élémentaire $\{(4, 4)\}$.
- « La somme vaut 9 » est l'événement impossible $\emptyset$.
- « La somme est au moins 2 » est l'événement certain Ω.

Définition : Opérations sur les événements

Soient A et B deux événements d'un univers Ω.

1. L'événement « A et B » est l'intersection $A \cap B$; l'événement « A ou B » est la réunion $A \cup B$.
2. L'**événement contraire** de A est $\overline{A} = \Omega \setminus A$: il est réalisé exactement quand A ne l'est pas.
3. A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$: ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.
4. On dit que A **implique** B si $A \subset B$.

Exemple : Combiner des événements

Toujours avec deux lancers, soient B « le premier résultat est 4 » et S « la somme vaut 5 ».

- $B \cap S = \{(4,1)\}$: un seul couple réalise les deux.
- $B \cup S$ contient $4 + 4 - 1 = 7$ couples.
- $\overline{B}$ est « le premier résultat n'est pas 4 » : il contient 12 couples.
- « Les deux résultats sont égaux » et S sont incompatibles : deux résultats égaux donnent une somme paire.
- « Deux fois le résultat 4 » implique B, car $\{(4,4)\} \subset B$.

Traduire une phrase

Vérifie : Pas de 1

Avec deux lancers, soient U « le premier résultat est 1 » et V « le second résultat est 1 ». Quel événement traduit « aucun des deux résultats n'est 1 » ?

A. $\overline{U} \cup \overline{V}$

Faux.
Cet événement signifie « au moins un résultat n'est pas 1 ». Le couple $(1,3)$ le réalise, alors qu'il contient un 1.

B. $\overline{U} \cap \overline{V}$

Juste.
« Aucun 1 », c'est « pas de 1 au premier lancer **et** pas de 1 au second ».

C. $\overline{U \cap V}$

Faux.
C'est le contraire de « deux résultats égaux à 1 ». Le couple $(1,3)$ le réalise, alors qu'il contient un 1.

Indice 1
Traduis « aucun » par deux négations reliées par « et ».

Correction

« Aucun des deux résultats n'est 1 » s'écrit $\overline{U} \cap \overline{V}$. C'est aussi le contraire de « au moins un 1 », soit $\overline{U \cup V}$.

Cet événement contient les 9 couples formés avec 2, 3 et 4.

Méthode : décrire l'univers et traduire des événements

1. **Préciser une issue** : est-ce un nombre, un couple, une liste ? Puis donner Ω ou son cardinal.
2. **Traduire** chaque phrase en symboles : « et » devient $\cap$, « ou » devient $\cup$, une négation devient le contraire.
3. **Contrôler** sur une issue précise que l'événement écrit dit bien la phrase.

Rédaction attendue. On lance trois fois une pièce.

« Une issue est une liste de trois lettres, comme (P, F, F). Donc $\mathrm{card}(\Omega) = 2^3 = 8$. L'événement G « au moins un Pile » est le contraire de « aucun Pile », c'est-à-dire de $\{(F, F, F)\}$. Donc G contient $8 - 1 = 7$ issues. Contrôle : (P, F, F) réalise G et contient bien un Pile. »

À toi : Deux tirages avec remise

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3. Tu tires une boule, tu notes son numéro et tu la remets. Puis tu en tires une seconde.

Décris Ω et donne son cardinal. Écris A « les deux numéros sont différents » et C « le second numéro est strictement plus grand que le premier ». A-t-on $C \subset A$? Les événements A et C sont-ils incompatibles ?

Indice 1

Une issue est un couple de numéros, répétition permise.

Indice 2

Écris d'abord $\overline{A}$: il est plus court que A.

Réponse

$\Omega = \{1, 2, 3\}^2$, donc $\mathrm{card}(\Omega) = 3 \times 3 = 9$.

$\overline{A} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, donc A contient les 6 autres couples. Et $C = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Si le second numéro est strictement plus grand, les deux numéros diffèrent : $C \subset A$. Enfin $A \cap C = C \neq \emptyset$: A et C ne sont pas incompatibles.

Probabilité sur un univers fini

Peser les issues

Devine : Un dé truqué

Un dé à quatre faces est truqué. Les faces 1, 2 et 3 ont la même probabilité. La face 4 a une probabilité triple de chacune d'elles. Quelle est la probabilité de la face 4 ?

A. $\frac{1}{4}$

Faux.
$\frac{1}{4}$ conviendrait à un dé équilibré. Ici, la face 4 est favorisée.

B. $\frac{3}{4}$

Faux.
Tu as triplé $\frac{1}{4}$ sans changer les autres faces. Le total vaudrait $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$, plus que 1.

C. $\frac{1}{2}$

Juste.
Avec x pour chacune des trois faces, $x+x+x+3x=6x=1$. Donc $x=\frac{1}{6}$, et la face 4 vaut $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Indice 1

Note x la probabilité de la face 1. Exprime les quatre probabilités avec x.

Indice 2

Les quatre probabilités ont pour somme 1.

Correction

Notons x la probabilité de chacune des faces 1, 2 et 3. La face 4 a la probabilité $3x$. La somme vaut 1 : $6x=1$, donc $x=\frac{1}{6}$.

La face 4 a pour probabilité $3x=\frac{1}{2}$.

Une probabilité commence ainsi : on donne un **poids** à chaque issue. Les poids sont positifs, et leur somme vaut 1.

Pour un événement, on additionne les poids de ses issues. Avec le dé truqué, « face paire » contient 2 et 4. Sa probabilité est $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

Définition : Probabilité sur un univers fini

Soit $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ un univers fini. Définir une **probabilité** p sur Ω, c'est associer à chaque issue ω_i un réel $p(\{\omega_i\})$, de sorte que :

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\quad p(\{\omega_i\})\geq 0 \qquad \text{et} \qquad p(\{\omega_1\})+p(\{\omega_2\})+\cdots+p(\{\omega_n\})=1.$$

La **probabilité d'un événement** A non vide, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des issues qui appartiennent à A ; on pose $p(\emptyset) = 0$. Le couple (Ω, p) est un **espace probabilisé fini**.

Exemple : Des poids qui conviennent, et d'autres non

- Une roue de loterie a trois secteurs : rouge, vert et bleu, de probabilités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$. Ces réels sont positifs et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$: ils définissent une probabilité. L'événement « rouge ou bleu » a pour probabilité $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.
- Les poids $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ ne conviennent pas : leur somme vaut $\frac{7}{6}$.
- Les poids $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ ont pour somme 1, mais ne conviennent pas : un poids est négatif.

Les règles de calcul

Avec le dé truqué, « face paire » a pour probabilité $\frac{2}{3}$, et « face impaire » $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$. La somme vaut 1.

Pourquoi est-ce vrai pour tout événement et son contraire ? Pourquoi une probabilité ne dépasse-t-elle jamais 1 ? La démonstration n'utilise que la définition par les poids.

Propriété : Règles de calcul des probabilités

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements.

1. $0 \leq p(A) \leq 1$ et $p(\Omega) = 1$.
2. Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
3. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
4. Si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$.

Démonstration

Étape 1. Si $A = \emptyset$, $p(A) = 0$. Sinon, $p(A)$ est une somme de termes positifs, prise parmi les termes de la somme qui vaut 1 et dont tous les termes sont positifs. Donc $0 \leq p(A) \leq 1$. Avec $A = \Omega$, tous les termes sont pris : $p(\Omega) = 1$.

Étape 2. Si $A \cap B = \emptyset$, chaque issue de $A \cup B$ appartient à A ou à B, mais pas aux deux. La somme sur $A \cup B$ est donc la somme sur A plus la somme sur B, une somme sur l'événement impossible valant $p(\emptyset) = 0$.

Étape 3. A et $\overline{A}$ sont incompatibles, et $A \cup \overline{A} = \Omega$. Par l'étape 2, $p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1$.

Étape 4. Si $A \subset B$, alors B est la réunion des événements incompatibles A et $B \cap \overline{A}$. Par l'étape 2, $p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$, et $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$ par l'étape 1. Donc $p(B) \geq p(A)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout se ramène à additionner des poids positifs. Deux événements incompatibles n'ont aucune issue commune : aucun poids n'est compté deux fois.

Pour les autres règles, on **découpe** un événement en morceaux incompatibles, puis on additionne.

Vérifie : L'argument de l'inclusion

Le point 4 dit : si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$. La preuve écrit $p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$. Quel argument permet alors de conclure ?

A. $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$, car c'est une somme de poids positifs.
Juste.
On ajoute à $p(A)$ un nombre positif ou nul : on obtient au moins $p(A)$.

B. $p(B) \leq 1$.
Faux.
C'est vrai, mais cela compare $p(B)$ à 1, et non à $p(A)$.

C. A et B sont incompatibles.
Faux.
Si A n'est pas vide, $A \cap B = A \neq \emptyset$: A et B ne sont pas incompatibles.

Indice 1
Regarde le terme ajouté à $p(A)$: quel est son signe ?

Correction
On a $p(B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$, et $p(B \cap \overline{A}) \geq 0$ par le point 1. Donc $p(B) \geq p(A)$.

La réunion de deux événements

Exemple : Contre-exemple : additionner sans précaution

Avec le dé truqué, soient A « face paire » et C « face au moins 3 ». On a $p(A) = \frac{2}{3}$ et $p(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

La somme $p(A) + p(C) = \frac{4}{3}$ dépasse 1 : ce n'est pas $p(A \cup C)$. En réalité, $A \cup C = \{2, 3, 4\}$ et $p(A \cup C) = \frac{5}{6}$. L'écart vaut $\frac{4}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2} = p(\{4\})$.

Pourquoi cet écart ? La face 4 est dans A et dans C : son poids a été compté deux fois.

Propriété : Probabilité de la réunion de deux événements

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. Alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Démonstration

Étape 1. $A \cup B$ est la réunion des événements incompatibles A et $B \cap \overline{A}$. Par « Règles de calcul des probabilités » (point 2), $p(A \cup B) = p(A) + p(B \cap \overline{A})$.

Étape 2. B est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $B \cap \overline{A}$. Par le même point 2, $p(B) = p(A \cap B) + p(B \cap \overline{A})$, donc $p(B \cap \overline{A}) = p(B) - p(A \cap B)$.

Conclusion. En remplaçant dans l'étape 1 : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Exemple : Utiliser la formule de la réunion

Dans un lycée de Fès, on choisit un élève. Soient A « il joue au basket » et B « il chante dans la chorale ». On sait que $p(A) = \frac{3}{5}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cap B) = \frac{3}{10}$. Par la formule de la réunion :

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{6 + 5 - 3}{10} \\ &= \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

« Ni l'un ni l'autre » est le contraire de $A \cup B$. Par la règle du contraire, sa probabilité est donc $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Passer par le contraire

Méthode : passer par l'événement contraire

1. **Repérer** les mots « au moins un », « au plus », « pas tous ».
2. **Nommer** le contraire : « au moins un » devient « aucun ».
3. **Calculer** la probabilité du contraire, puis **conclure** par $p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

Rédaction attendue. On lance trois fois une pièce équilibrée : les 8 issues ont le même poids $\frac{1}{8}$. Soit G l'événement « au moins un Pile ».

« Le contraire $\overline{G}$ signifie : aucun Pile. Il n'est réalisé que par l'issue (F, F, F), donc $p(\overline{G}) = \frac{1}{8}$. Par la règle du contraire, $p(G) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. »

À toi : Deux retards

Un livreur de Tanger fait deux tournées par jour. Soient R_1 « il est en retard le matin » et R_2 « il est en retard le soir ». On sait que $p(R_1) = \frac{2}{5}$, $p(R_2) = \frac{1}{3}$ et $p(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10}$.

Calcule la probabilité qu'il soit en retard au moins une fois dans la journée. Calcule ensuite la probabilité qu'il ne soit jamais en retard.

Indice 1

« Au moins une fois en retard » est l'événement $R_1 \cup R_2$.

Indice 2

« Jamais en retard » est le contraire de « au moins une fois en retard ».

Réponse

« En retard au moins une fois » est l'événement $R_1 \cup R_2$. Par la formule de la réunion :

$$\begin{aligned} p(R_1 \cup R_2) &= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \\ &= \frac{12 + 10 - 3}{30} \\ &= \frac{19}{30}. \end{aligned}$$

« Jamais en retard » est le contraire de $R_1 \cup R_2$. Par la règle du contraire, sa probabilité est $1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30}$.

Conclusion. Le livreur est en retard au moins une fois avec la probabilité $\frac{19}{30}$, et jamais en retard avec la probabilité $\frac{11}{30}$.

Équiprobabilité et modèles de tirage

Des issues qui se valent

Devine : Le nombre de Pile

Tu lances deux pièces équilibrées et tu comptes les Pile obtenus : 0, 1 ou 2. Ces trois résultats ont-ils la même probabilité ?

A. Oui : $\frac{1}{3}$ chacun.

Faux.

Les résultats 0, 1 et 2 ne sont pas obtenus d'autant de façons : « un Pile » arrive par (P, F) ou par (F, P).

B. Non : « deux Pile » est le plus probable.

Faux.

« Deux Pile » n'arrive que par (P, P) : c'est un couple sur quatre.

C. Non : « un Pile » a la probabilité $\frac{1}{2}$.

Juste.

Sur les quatre couples (P,P), (P,F), (F,P) et (F,F), deux donnent un seul Pile.

Indice 1
Distingue les deux pièces : une issue est un couple, comme (P,F).

Correction
Les quatre couples (P,P), (P,F), (F,P) et (F,F) ont la même chance, car les pièces sont équilibrées. « Un Pile » en contient deux : sa probabilité est $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
« Zéro Pile » et « deux Pile » ont chacun la probabilité $\frac{1}{4}$.

Définition : Hypothèse d'équiprobabilité

Soit Ω un univers fini de cardinal n. On dit qu'il y a **équiprobabilité**, ou que p est la **probabilité uniforme** sur Ω, si toutes les issues ont la même probabilité :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad p(\{\omega\}) = \frac{1}{n}.$$

Des expressions comme « au hasard », « dé équilibré » ou « boules indiscernables au toucher » traduisent cette hypothèse.

Exemple : Choisir le bon univers

Pour deux pièces équilibrées, l'univers des couples, de cardinal 4, est muni de la probabilité uniforme : chaque couple a la probabilité $\frac{1}{4}$.

L'univers $\{0,1,2\}$ du nombre de Pile convient aussi, mais il n'est **pas** muni de la probabilité uniforme : ses poids sont $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Pour calculer en comptant, on choisit un univers où les issues se valent.

Compter pour calculer

Avec les quatre couples équiprobables, chaque couple pèse $\frac{1}{4}$. « Un Pile » contient 2 couples, donc pèse $2\times\frac{1}{4}$.

Pourquoi est-ce vrai en général ? Quand les issues se valent, une probabilité se calcule-t-elle toujours en comptant ?

Propriété : Probabilité d'un événement en situation d'équiprobabilité

Soit Ω un univers fini muni de la probabilité uniforme. Pour tout événement A :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Démonstration

Étape 1. Notons $n = \mathrm{card}(\Omega)$. Par « Hypothèse d'équiprobabilité », chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{n}$.

Étape 2. Si $A \neq \emptyset$, par « Probabilité sur un univers fini », $p(A)$ est la somme des probabilités des issues de A. Cette somme compte $\mathrm{card}(A)$ termes égaux à $\frac{1}{n}$.

Conclusion. $p(A) = \mathrm{card}(A) \times \frac{1}{n} = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Si $A = \emptyset$, les deux membres sont nuls.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Des poids égaux de somme 1 valent chacun $\frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}$. Additionner $\mathrm{card}(A)$ poids égaux revient à multiplier.

Sans équiprobabilité, l'étape 1 tombe : la formule ne s'applique plus.

Vérifie : Le dé truqué, encore

On reprend le dé truqué à quatre faces : la face 4 a la probabilité $\frac{1}{2}$, chacune des trois autres $\frac{1}{6}$. Un élève écrit : « deux faces paires sur quatre faces, donc une face paire a la probabilité $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ».
Qu'en penses-tu ?

A. C'est faux : les faces n'ont pas la même probabilité, et la bonne valeur est $\frac{2}{3}$.

Juste.
Le calcul par comptage exige l'équiprobabilité. Ici, on additionne les poids : $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

B. C'est juste : deux faces favorables sur quatre.

Faux.
Compter les faces suppose qu'elles se valent. Or la face 4 pèse trois fois plus que la face 2.

C. C'est faux : la bonne valeur est $\frac{3}{4}$.

Faux.
$\frac{3}{4}$ ne vient d'aucun calcul correct. La somme des poids des faces 2 et 4 vaut $\frac{2}{3}$.

Indice 1
Relis l'hypothèse de l'énoncé démontré : que suppose-t-il sur les issues ?

Correction
Le raisonnement suppose l'équiprobabilité, qui est fausse ici. On revient à la définition : $p(\{2,4\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

Exemple : Un entier au hasard

On choisit au hasard un entier entre 1 et 30 : il y a équiprobabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, 30\}$.

- « Multiple de 4 » : 4, 8, ..., 28, soit 7 nombres, d'où la probabilité $\dfrac{7}{30}$.
- « Multiple de 6 » : 5 nombres, d'où $\dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.
- « Multiple de 4 et de 6 » : 12 et 24, d'où $\dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$.

Trois façons de tirer

Petit rappel de 1BAC. Parmi n objets, on forme $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ listes ordonnées de k objets distincts, et $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$ parties à k éléments. Par exemple, $A_6^2 = 30$, $C_6^2 = 15$ et $C_8^3 = 56$.

Propriété : Cardinal de l'univers dans les trois modèles de tirage

On tire k objets parmi n objets discernables, où n et k sont des entiers naturels non nuls, avec $k \leq n$ pour un tirage sans remise ou simultané. L'univers Ω des issues vérifie :

1. pour k tirages **successifs avec remise**, une issue est une liste ordonnée de k objets, répétitions permises : $\operatorname{card}(\Omega) = n^k$;
2. pour k tirages **successifs sans remise**, une issue est une liste ordonnée de k objets distincts : $\operatorname{card}(\Omega) = A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$;
3. pour un tirage **simultané** de k objets, une issue est une partie à k éléments : $\operatorname{card}(\Omega) = C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Démonstration

Idée de la preuve. Ces trois nombres sont des résultats de dénombrement de la première année du baccalauréat, rappelés ici.

Étape 1. Avec remise, chacun des k tirages offre n choix : le principe multiplicatif donne n^k listes.

Étape 2. Sans remise, le premier tirage offre n choix, le deuxième $n-1$, et le k-ième $n-k+1$: on obtient A_n^k listes.

Étape 3. Un tirage simultané ne tient pas compte de l'ordre : chaque partie à k éléments donne $k!$ listes ordonnées, d'où $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

Étapes omises : la preuve du principe multiplicatif, le dénombrement des $k!$ ordres d'une partie, établis en première année, et l'égalité $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, qui donne la forme factorielle.

Exemple : Une urne, trois modèles

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 vertes et 2 rouges. On tire 2 boules. On cherche la probabilité de l'événement A « deux boules vertes ».

Modèle	$\text{card}(\Omega)$	$\text{card}(A)$	$p(A)$
simultané	$C_6^2 = 15$	$C_4^2 = 6$	$\frac{2}{5}$
successifs sans remise	$A_6^2 = 30$	$A_4^2 = 12$	$\frac{2}{5}$
successifs avec remise	$6^2 = 36$	$4^2 = 16$	$\frac{4}{9}$

Sans remise, compter avec ou sans l'ordre donne la même probabilité, si l'univers et l'événement sont comptés de la même façon. La remise, elle, change le résultat.

Rédiger un calcul par dénombrement

Méthode : calculer une probabilité par dénombrement

1. **Justifier l'équiprobabilité** : relever le mot de l'énoncé qui la garantit, comme « au hasard » ou « indiscernables au toucher ».
2. **Fixer le modèle** : se demander si l'ordre compte, et s'il y a remise.
3. **Compter** $\text{card}(\Omega)$ et $\text{card}(A)$ dans ce même modèle, en découpant A en cas si besoin.
4. **Conclure** par $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$, puis simplifier.

Rédaction attendue. Une boîte contient 8 cartes indiscernables au toucher : 5 bleues et 3 jaunes. On en tire 3 simultanément. Soit D « exactement deux cartes bleues ».

« Les cartes sont indiscernables au toucher : il y a équiprobabilité. Une issue est une partie de 3 cartes, donc $\text{card}(\Omega) = C_8^3 = 56$. On choisit 2 bleues et 1 jaune : $\text{card}(D) = C_5^2 \times C_3^1 = 30$. Donc $p(D) = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$. »

Attention : Un seul modèle par calcul

Avec la même boîte, un élève cherche la probabilité de « trois cartes bleues ». Il compte Ω par $C_8^3 = 56$, puis l'événement par $A_5^3 = 60$. Il obtient $\dfrac{60}{56}$, plus grand que 1 : c'est impossible.

Il a compté l'univers sans ordre et l'événement avec ordre. Dans le seul modèle simultané, $C_5^3 = 10$ et la probabilité vaut $\dfrac{10}{56} = \dfrac{5}{28}$. Avant de compter, demande-toi si l'ordre compte et si les tirages se font avec remise.

Choisir le modèle

Vérifie : Un code de cadenas

Un cadenas s'ouvre avec un code de trois chiffres **distincts**, pris parmi $1, 2, \ldots, 9$. L'ordre des chiffres compte. Combien y a-t-il de codes possibles ?

A. $9^3 = 729$

Faux.

9^3 autorise les répétitions, comme le code 447. Or les chiffres sont distincts.

B. $A_9^3 = 504$

Juste.

Une liste ordonnée de 3 chiffres distincts : $9 \times 8 \times 7 = 504$.

C. $C_9^3 = 84$

Faux.

C_9^3 ne tient pas compte de l'ordre. Or 123 et 321 sont deux codes différents.

Indice 1

Pose les deux questions : l'ordre compte-t-il ? Un chiffre peut-il revenir ?

Correction

L'ordre compte et les chiffres sont distincts : un code est une liste ordonnée sans répétition. Il y a $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ codes.

À toi : Même couleur

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 blanches et 3 noires. On tire successivement 2 boules, sans remise.

Calcule la probabilité que les deux boules aient la même couleur. Reprends ensuite le calcul avec remise.

Indice 1

Sans remise, une issue est une liste ordonnée de 2 boules distinctes : compte-les par un arrangement.

Indice 2

« Même couleur » se découpe en deux cas incompatibles : deux blanches, ou deux noires.

Réponse

Les boules sont indiscernables au toucher : il y a équiprobabilité.

Sans remise. $\mathrm{card}(\Omega) = A_5^2 = 20$. Deux blanches : $A_2^2 = 2$; deux noires : $A_3^2 = 6$. La probabilité vaut $\dfrac{2+6}{20} = \dfrac{2}{5}$.

Avec remise. $\mathrm{card}(\Omega) = 5^2 = 25$. Deux blanches : $2^2 = 4$; deux noires : $3^2 = 9$. La probabilité vaut $\dfrac{4+9}{25} = \dfrac{13}{25}$.

Probabilité conditionnelle

Une information change tout

Devine : Un indice sur la somme

On lance deux fois le dé équilibré à quatre faces. Sans rien savoir, le premier résultat vaut 4 avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Un ami regarde et t'annonce : « la somme vaut 6 ». Quelle est maintenant la probabilité que le premier résultat soit 4 ?

A. Toujours $\dfrac{1}{4}$: l'information ne change rien.

Faux.

La somme 6 élimine beaucoup de couples, par exemple $(4,4)$ et $(1,1)$. Il faut recompter.

B. $\dfrac{1}{16}$

Faux.

$\dfrac{1}{16}$ est la probabilité de « premier résultat 4 **et** somme 6 » parmi les 16 couples. Or l'information réduit les couples possibles.

C. $\dfrac{1}{3}$

Juste.

Trois couples donnent la somme 6 : $(2,4)$, $(3,3)$ et $(4,2)$. Un seul commence par 4.

Indice 1

Quels couples restent possibles, une fois la somme connue ?

Correction

Sachant que la somme vaut 6, il ne reste que $(2,4)$, $(3,3)$ et $(4,2)$, qui se valent. Un seul commence par 4 : la probabilité devient $\dfrac{1}{3}$.

L'information « la somme vaut 6 » a réduit l'univers à 3 couples. On a compté 1 couple favorable parmi ces 3.

Avec les probabilités sur les 16 couples, c'est un quotient : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1/16}{3/16}$. Au numérateur, « premier résultat 4 et somme 6 ». Au dénominateur, l'événement connu.

La définition

Définition : Probabilité conditionnelle

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. Pour tout événement B, la **probabilité de B sachant A** est le réel :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Exemple : Pluie et retard

À un arrêt de bus de Rabat, soient A « il pleut » et B « le bus est en retard ». On sait que $p(A) = \frac{2}{5}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Comme $p(A) \neq 0$:

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Quand il pleut, le bus est en retard avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Une vraie probabilité

Sachant A, on ne garde que les issues de A, et on divise leurs poids par $p(A)$.

Pourquoi obtient-on ainsi une vraie probabilité, avec la règle du contraire et celle de la réunion ? La démonstration répond.

Propriété : La probabilité sachant un événement est une probabilité

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et A un événement tel que $p(A) \neq 0$. L'application $B \mapsto p_A(B)$ est une probabilité sur Ω. En particulier, $p_A(A) = 1$ et, pour tout événement B, $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

Démonstration

Étape 1. Par « Règles de calcul des probabilités » (point 1), $p(A) \geq 0$; comme $p(A) \neq 0$, on a $p(A) > 0$. Pour chaque issue ω, posons $q(\omega) = \frac{p(\{\omega\})}{p(A)}$ si $\omega \in A$, et $q(\omega) = 0$ sinon. Ces réels sont positifs.

Étape 2. La somme des $q(\omega)$ sur Ω vaut $\frac{p(A)}{p(A)} = 1$. Par « Probabilité sur un univers fini », ils définissent une probabilité q sur Ω.

Étape 3. Pour un événement B, la somme des $q(\omega)$ sur B est la somme des $p(\{\omega\})$ sur $A \cap B$, divisée par $p(A)$. Par « Probabilité conditionnelle », c'est $p_A(B)$. Donc $q(B) = p_A(B)$ pour tout B.

Conclusion. $p_A(A) = \dfrac{p(A)}{p(A)} = 1$, et « Règles de calcul des probabilités » (point 3), appliquées à q, donnent $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

Sur un arbre, on lit $p(A)$, puis $p_A(B)$. À l'arrêt de bus de Rabat, $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$: c'est justement $p(A \cap B)$.

Pourquoi ce produit donne-t-il toujours la probabilité de « A et B » ? La démonstration part de la définition.

Propriété : Formule des probabilités composées

Soient A, B et C trois événements d'un espace probabilisé fini (Ω, p).

1. Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$.
2. Si $p(A \cap B) \neq 0$, alors $p(A \cap B \cap C) = p(A) \times p_A(B) \times p_{A \cap B}(C)$.

Démonstration

Étape 1 (point 1). Par « Probabilité conditionnelle », $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$; on multiplie les deux membres par $p(A)$, qui n'est pas nul.

Étape 2. Supposons $p(A \cap B) \neq 0$. Comme $A \cap B \subset A$, « Règles de calcul des probabilités » (points 1 et 4) donne $0 < p(A \cap B) \leq p(A)$: donc $p(A) \neq 0$.

Étape 3 (point 2). L'étape 1, appliquée aux événements $A \cap B$ et C, donne $p(A \cap B \cap C) = p(A \cap B) \times p_{A \cap B}(C)$. L'étape 1, appliquée à A et B, donne $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. On remplace.

Ce que disent les preuves

Vérifie : Une hypothèse cachée

Le point 2 de la formule des probabilités composées suppose seulement $p(A \cap B) \neq 0$. Pourtant, la preuve écrit $p_A(B)$, qui exige $p(A) \neq 0$. Pourquoi est-ce permis ?

A. Car $A \cap B \subset A$, donc $0 < p(A \cap B) \leq p(A)$.
Juste.
C'est l'étape 2 : la règle de l'inclusion transmet la non-nullité de $p(A \cap B)$ à $p(A)$.

B. Car $p(A) = p(A \cap B)$.
Faux.
C'est faux en général. Avec deux lancers du dé, « premier résultat 4 » a la probabilité $\dfrac{1}{4}$, et son intersection avec « somme 6 » seulement $\dfrac{1}{16}$.

C. Ce n'est pas utile : $p_A(B)$ existe toujours.
Faux.

$p_A(B)$ est un quotient par $p(A)$: il n'existe que si $p(A) \neq 0$.

Indice 1

Compare les événements $A \cap B$ et A : lequel contient l'autre ?

Correction

Comme $A \cap B \subset A$, la règle de l'inclusion donne $p(A \cap B) \leq p(A)$. Or $p(A \cap B) > 0$, donc $p(A) > 0$: $p_A(B)$ existe.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Conditionner par A, c'est garder les issues de A et diviser leurs poids par $p(A)$. On obtient une nouvelle probabilité : le contraire et la réunion se calculent avec p_A comme avec p.

La formule des probabilités composées n'est que la définition, multipliée par $p(A)$.

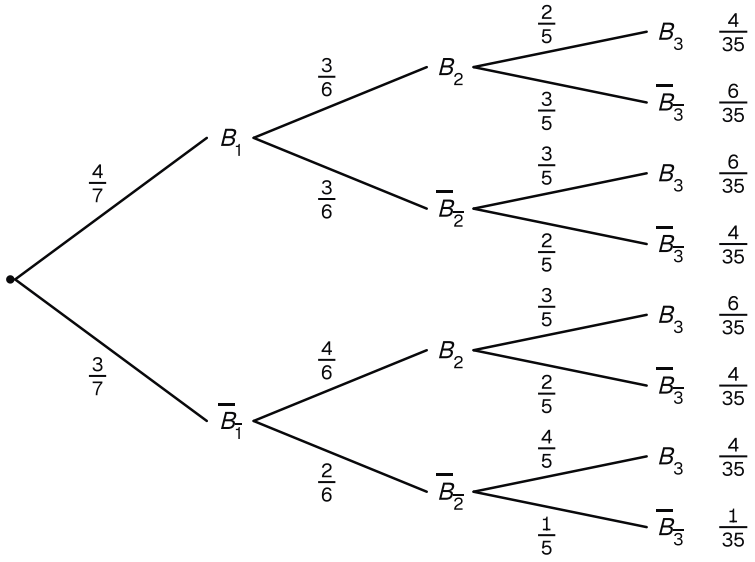
Exemple : Trois stylos sans remise

Une trousse contient 4 stylos bleus et 3 rouges. On en sort 3 au hasard, un par un, sans remise. Soit B_i « le i-ième stylo est bleu ».

- Après un bleu, il reste 3 bleus parmi 6 stylos : $p_{B_1}(B_2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, et donc $p_{B_1}(\overline{B_2}) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
- De même, après deux bleus, $p_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \dfrac{2}{5}$.

Par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) &= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{4}{35}. \end{aligned}$$



Les trois tirages sans remise dans la trousse en arbre : à chaque étage, la probabilité dépend des stylos qui restent, et le chemin des trois bleus vaut 4/35.

Organiser par un arbre

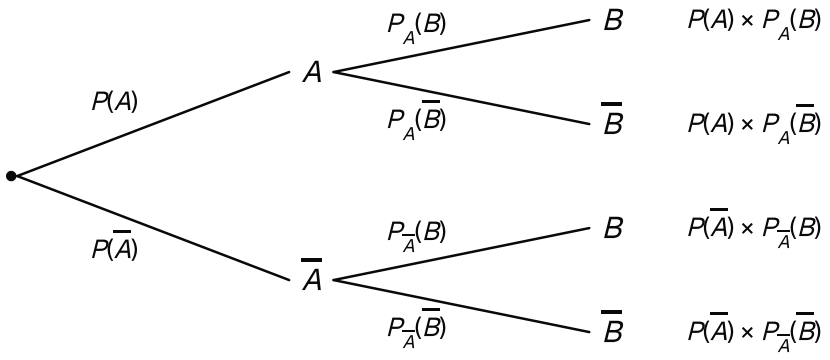
Méthode : un arbre pondéré écrit en liste

1. **Nommer** les événements de chaque étape, par exemple B, $\overline{B}$, puis R, $\overline{R}$.
2. **Écrire l'arbre** en liste : au premier niveau $p(B)$, au second des probabilités sachant, comme $p_B(R)$.
3. **Contrôler** : à chaque nœud, les branches ont pour somme 1.
4. **Multiplier** le long d'un chemin, par la formule des probabilités composées.

Rédaction attendue. Dans un lycée de Meknès, on choisit un élève au hasard. B : « il vient en bus », R : « il arrive en retard ».

- B : $\dfrac{3}{5}$
  - R : $\dfrac{1}{4}$; $\overline{R}$: $\dfrac{3}{4}$
- $\overline{B}$: $\dfrac{2}{5}$
  - R : $\dfrac{1}{8}$; $\overline{R}$: $\dfrac{7}{8}$

« Comme $p(B) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne $p(B \cap R) = p(B) \times p_B(R) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{20}$. »



Arbre pondéré général à deux étages : A ou son contraire d'abord, puis B ou son contraire, avec des probabilités conditionnelles sur les branches du second étage. Le produit des nombres d'un chemin donne sa probabilité.

Attention : Trois nombres à ne pas confondre

Reprends les deux lancers du dé, avec Q « le premier résultat est 4 » et S « la somme vaut 6 ».

- « Q et S » : $p(Q \cap S) = \dfrac{1}{16}$.
- « Q sachant S » : $p_S(Q) = \dfrac{1}{3}$.
- « S sachant Q » : $p_Q(S) = \dfrac{1/16}{1/4} = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi $p_S(Q) \neq p_Q(S)$: l'événement qui conditionne va au **dénominateur**. Sur un arbre, une branche du second niveau porte une probabilité sachant, jamais une intersection.

À toi : Deux boules sans remise

Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires, indiscernables au toucher. On tire une boule, sans la remettre, puis une seconde. Soient N_1 « la première est noire » et N_2 « la seconde est noire ».

Écris l'arbre en liste, puis calcule $p(N_1 \cap N_2)$ et $p(\overline{N_1} \cap N_2)$.

Indice 1
Au premier tirage, il y a 5 boules. Au second, il en reste 4, et leur couleur dépend du premier tirage.
Indice 2
Le long d'un chemin, on multiplie, par la formule des probabilités composées.

Réponse
- $N_1 : \dfrac{2}{5}$
  - $N_2 : \dfrac{1}{4}$; $\overline{N_2} : \dfrac{3}{4}$

- $\overline{N_1}$: $\dfrac{3}{5}$
  - N_2 : $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; $\overline{N_2}$: $\dfrac{1}{2}$

Comme $p(N_1) \neq 0$ et $p(\overline{N_1}) \neq 0$, la formule des probabilités composées donne, en multipliant le long de chaque chemin :

$$p(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

et

$$p(\overline{N_1} \cap N_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Conclusion. Les deux boules sont noires avec la probabilité $\dfrac{1}{10}$; la première est blanche et la seconde noire avec la probabilité $\dfrac{3}{10}$.

Système complet et probabilités totales

Découper l'univers

Devine : Combien d'élèves en retard

On reprend le lycée de Meknès : $p(B) = \dfrac{3}{5}$, $p_B(R) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{B}}(R) = \dfrac{1}{8}$. On a trouvé $p(B \cap R) = \dfrac{3}{20}$.

On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?

A. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$

Faux.

Ces deux nombres sont des probabilités sachant : chacune ne concerne qu'un groupe d'élèves.

B. $\dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}$

Juste.

Un élève en retard vient en bus ou non : $p(\overline{B} \cap R) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{20}$, puis on additionne.

C. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{3}{16}$

Faux.

Les deux groupes n'ont pas la même taille : $\dfrac{3}{5}$ des élèves contre $\dfrac{2}{5}$. Il faut pondérer.

Indice 1

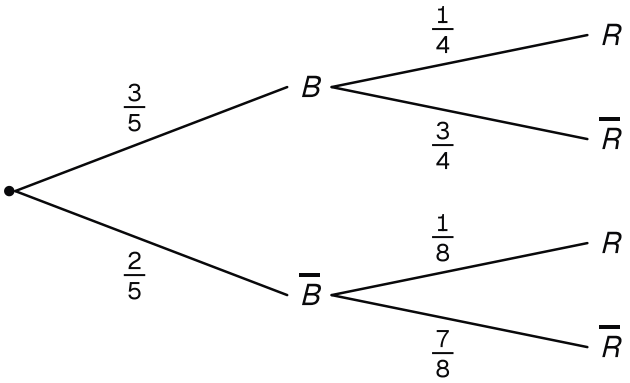
Un élève en retard est venu comment ?

Correction

On découpe R en deux morceaux incompatibles, $B \cap R$ et $\overline{B} \cap R$.

On a $p(B \cap R) = \dfrac{3}{20}$. Par la formule des probabilités composées, $p(\overline{B} \cap R) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{20}$.

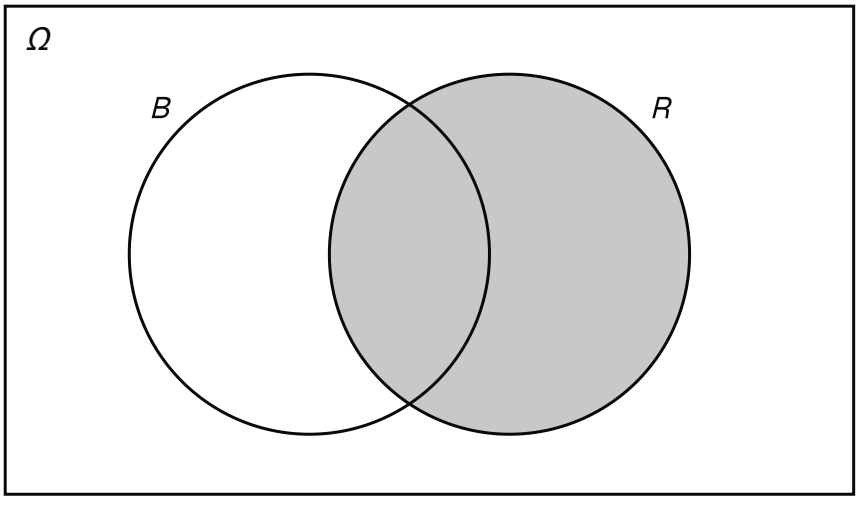
Donc $p(R) = \dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}$.



Les données du lycée de Meknès en arbre : B, venir en bus, de probabilité 3/5, puis R, arriver en retard, avec 1/4 sachant B et 1/8 sachant le contraire de B. L'événement R se lit au bout de deux chemins.

Le calcul a marché parce que B et $\overline{B}$ découpent l'univers sans trou ni chevauchement. Chaque élève est dans un morceau, et un seul.

On peut découper en plus de deux morceaux. Par exemple, pour un dé à six faces : « 1 ou 2 », « 3 ou 4 », « 5 ou 6 ».



Le lycée de Meknès en ensembles : la frontière de B coupe l'événement R en deux morceaux disjoints, la partie de R dans B et la partie de R hors de B.

Définition : Système complet d'événements

Soient Ω un univers fini, m un entier tel que $m \geq 2$, et $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des événements. On dit qu'ils forment un **système complet d'événements** de Ω si :

1. ils sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$;
2. leur réunion est l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$.

Par exemple, pour tout événement A, les événements A et $\overline{A}$ forment un système complet.

Vérifie : Sans trou ni chevauchement

On lance deux fois le dé à quatre faces. Laquelle de ces familles est un système complet d'événements ?

A. « au moins un 1 » et « au moins un 4 »

Faux.
Le couple $(1, 4)$ est dans les deux, et le couple $(2, 3)$ dans aucun.

B. « somme au plus 4 » et « somme au moins 4 »

Faux.
Le couple $(1, 3)$, de somme 4, est dans les deux : ces événements ne sont pas incompatibles.

C. « somme paire » et « somme impaire »

Juste.
Une somme est paire ou impaire, jamais les deux : les événements sont incompatibles et leur réunion est l'univers.

Indice 1
Pour chaque famille, cherche un couple qui serait dans deux événements, ou dans aucun.

Correction
Seule la famille « somme paire », « somme impaire » convient.

Les deux autres échouent. Le couple $(1, 4)$ réalise « au moins un 1 » et « au moins un 4 », et $(2, 3)$ n'en réalise aucun. Le couple $(1, 3)$ a une somme à la fois au plus 4 et au moins 4.

La formule des probabilités totales

Pour trouver $p(R)$, on a additionné les morceaux $p(B \cap R)$ et $p(\overline{B} \cap R)$, puis écrit chacun comme un produit.

Pourquoi n'oublie-t-on aucune issue de R ? Pourquoi n'en compte-t-on aucune deux fois ? Et pourquoi chaque morceau est-il un produit ? La démonstration répond avec deux énoncés déjà vus.

Théorème : Formule des probabilités totales

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_m$ un système complet d'événements tels que $p(A_i) \neq 0$ pour tout i. Pour tout événement B :

$$p(B) = p(A_1)\, p_{A_1}(B) + p(A_2)\, p_{A_2}(B) + \cdots + p(A_m)\, p_{A_m}(B).$$

En particulier, si $0 < p(A) < 1$: $p(B) = p(A)\,p_A(B) + p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B)$.

Démonstration

Étape 1. Chaque issue de B appartient à un et un seul des A_i, car les A_i sont deux à deux incompatibles et de réunion Ω. Elle appartient donc à un et un seul des événements $B \cap A_i$.

Étape 2. Par « Probabilité sur un univers fini », $p(B)$ est la somme des probabilités des issues de B. On regroupe ces issues selon l'événement $B \cap A_i$ qui les contient : $p(B) = p(B \cap A_1) + \cdots + p(B \cap A_m)$, un terme vide valant 0.

Étape 3. Par « Formule des probabilités composées », $p(B \cap A_i) = p(A_i)\,p_{A_i}(B)$, car $p(A_i) \neq 0$.

Conclusion. On remplace chaque terme. Le cas particulier est celui du système complet A, $\overline{A}$: $0 < p(A) < 1$ donne $p(A) \neq 0$ et, par « Règles de calcul des probabilités » (point 3), $p(\overline{A}) = 1 - p(A) \neq 0$.

Vérifie : Chaque hypothèse à sa place

Dans la démonstration de la formule des probabilités totales, à quoi sert l'hypothèse $p(A_i) \neq 0$ pour tout i ?

A. À écrire $p(B \cap A_i) = p(A_i)\,p_{A_i}(B)$, car $p_{A_i}(B)$ n'existe que si $p(A_i) \neq 0$.
Juste.
C'est l'étape 3, qui utilise la formule des probabilités composées.

B. À garantir que chaque issue de B est dans un seul A_i.
Faux.
Cela vient des deux conditions du système complet : incompatibles deux à deux, de réunion Ω. C'est l'étape 1.

C. À diviser par $p(B)$.
Faux.
La formule ne divise jamais par $p(B)$: B peut même être impossible.

Indice 1
Cherche dans la démonstration l'endroit où apparaît une probabilité sachant A_i.

Correction
L'hypothèse sert à l'étape 3 : $p_{A_i}(B)$ n'est défini que si $p(A_i) \neq 0$. L'étape 1, elle, utilise les deux conditions du système complet.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Un système complet range chaque issue dans un morceau, et un seul. On additionne donc les probabilités des morceaux de B, sans oubli ni doublon.

Chaque morceau $p(B \cap A_i)$ devient ensuite un produit, par la formule des probabilités composées.

Exemple : Contre-exemple : un morceau oublié

Deux lancers du dé à quatre faces. Soit U « le premier résultat est 1 » : $p(U) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

Prenons A_1 « somme au plus 4 » et A_2 « somme au moins 6 », de 6 couples chacun : $p(A_1) = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$. On trouve $p_{A_1}(U) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ et $p_{A_2}(U) = 0$. La formule donnerait $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} \times 0 = \dfrac{3}{16}$, et non $\dfrac{1}{4}$.

Le couple $(1, 4)$, de somme 5, n'est dans aucun des deux : la famille n'est pas un système complet.

Remonter l'arbre

Méthode : probabilités totales, puis inversion

1. **Contrôler le découpage** : les événements du premier niveau doivent former un système complet, chacun de probabilité non nulle.
2. **Calculer** $p(B)$ par la formule des probabilités totales.
3. **Inverser** : $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, le numérateur venant des probabilités composées.
4. **Conclure** en nommant l'événement connu, celui qui conditionne.

Rédaction attendue. Dans un atelier de Casablanca, soient M « la pièce vient de la machine 1 » et D « la pièce est défectueuse ». On sait que $p(M) = \dfrac{2}{3}$, $p_M(D) = \dfrac{1}{10}$ et $p_{\overline{M}}(D) = \dfrac{1}{5}$.

« M et $\overline{M}$ forment un système complet, et $p(M)$ et $p(\overline{M})$ ne sont pas nuls. Par la formule des probabilités totales, $p(D) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{15}$. Comme $p(D) \neq 0$, $p_D(M) = \dfrac{1/15}{2/15} = \dfrac{1}{2}$. Sachant la pièce défectueuse, elle vient de la machine 1 avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$. »

Vérifie : Remonter au bus

Au lycée de Meknès, un élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il soit venu en bus ?

A. $\dfrac{1}{4}$

Faux.
$\dfrac{1}{4}$ est $p_B(R)$: la probabilité d'être en retard sachant le bus. On demande l'inverse, $p_R(B)$.

B. $\dfrac{3}{4}$

Juste.

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{3/20}{1/5} = \frac{3}{4}.$$

C. $\frac{3}{20}$

Faux.

$\frac{3}{20}$ est $p(B \cap R)$, la probabilité de « bus et retard ». Il faut encore diviser par $p(R)$.

Indice 1

L'événement connu est R : il va au dénominateur.

Indice 2

Tu connais déjà $p(B \cap R)$ et $p(R)$.

Correction

On cherche $p_R(B)$, avec $p(R) = \frac{1}{5} \neq 0$. Alors $p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{3}{20} \times 5 = \frac{3}{4}$.

Conclusion. Sachant qu'un élève est en retard, il est venu en bus avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

À toi : Une pièce choisit l'urne

La première urne contient 2 boules rouges et 3 vertes ; la seconde, 4 rouges et 1 verte. On lance une pièce équilibrée. Pile : on tire une boule au hasard dans la première urne. Face : dans la seconde.

Soient P « la pièce donne Pile » et R « la boule est rouge ». Calcule $p(R)$, puis $p_R(P)$.

Indice 1

Le système complet est formé de P et $\overline{P}$, de probabilité $\frac{1}{2}$ chacun.

Indice 2

Écris l'arbre en liste, puis applique la formule des probabilités totales.

Réponse

- P : $\frac{1}{2}$
  - R : $\frac{2}{5}$; $\overline{R}$: $\frac{3}{5}$
- $\overline{P}$: $\frac{1}{2}$
  - R : $\frac{4}{5}$; $\overline{R}$: $\frac{1}{5}$

P et $\overline{P}$ forment un système complet, et aucun des deux n'a une probabilité nulle. Par la formule des probabilités totales, $p(R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

Comme $p(R) \neq 0$, $p_R(P) = \frac{p(P \cap R)}{p(R)} = \frac{1/5}{3/5} = \frac{1}{3}$.

Indépendance de deux événements

Une information qui ne change rien

Devine : Pair, et alors ?

Douze cartes portent les numéros 1 à 12. Tu en tires une au hasard : les douze tirages sont équiprobables. On note A : « le numéro est pair » et B : « le numéro est un multiple de 3 ». On t'annonce que A est réalisé. Quelle est alors la probabilité de B ?

A. $\dfrac{1}{6}$

Faux.

C'est $p(A \cap B) = \dfrac{2}{12}$: tu ne t'es pas restreint aux cartes paires.

B. $\dfrac{2}{3}$

Faux.

Tu as divisé les 4 multiples de 3 par les 6 cartes paires. Or 3 et 9 sont impairs : ils ne comptent plus.

C. $\dfrac{1}{3}$

Juste.

Parmi les 6 cartes paires, seules 6 et 12 sont multiples de 3 : $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

D. $\dfrac{1}{2}$

Faux.

C'est $p(A)$, pas la probabilité de B sachant A.

Indice 1

Quelles cartes l'information A élimine-t-elle ?

Indice 2

Parmi les cartes restantes, lesquelles sont multiples de 3 ?

Correction

Sachant A, il reste six cartes équiprobables : $2, 4, 6, 8, 10, 12$. Deux sont multiples de 3 : 6 et 12.

Donc $p_A(B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Sans information, $p(B) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$ aussi : savoir que A est réalisé ne change rien pour B.

Remarque aussi : $p(A \cap B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$, et $p(A) \times p(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Définition : Événements indépendants

Soient (Ω, p) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. On dit que A et B sont **indépendants** si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Exemple : indépendants ou non ?

Garde les douze cartes et A : « le numéro est pair ». Prends maintenant C : « le numéro est inférieur ou égal à 5 ».

- $p(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ et $p(C) = \dfrac{5}{12}$, donc $p(A) \times p(C) = \dfrac{5}{24}$.
- $A \cap C = \{2, 4\}$, donc $p(A \cap C) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

Comme $\dfrac{1}{6} \neq \dfrac{5}{24}$, les événements A et C ne sont pas indépendants. D'ailleurs $p_A(C) = \dfrac{1}{3}$, alors que $p(C) = \dfrac{5}{12}$.

Pour A et B, au contraire, $p_A(B) = p(B)$. Les deux égalités vont-elles toujours ensemble ? **Pourquoi est-ce vrai ?** La définition de $p_A(B)$ relie $p(A \cap B)$ et $p(A)$.

Deux propriétés démontrées

Propriété : Indépendance et probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé fini, avec $p(A) \neq 0$. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow p_A(B) = p(B).$$

Démonstration

Sens direct. Supposons A et B indépendants. Par « Probabilité conditionnelle » puis « Événements indépendants » : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$.

Réciproque. Supposons $p_A(B) = p(B)$. Par « Formule des probabilités composées » (point 1), $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(A) \times p(B)$: A et B sont indépendants.

Conclusion. Les deux sens sont prouvés.

Exemple : Contre-exemple : un événement de probabilité nulle

L'équivalence suppose $p(A) \neq 0$. Prends $A = \emptyset$ et un événement B quelconque. Alors $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$ et $p(A) \times p(B) = 0$: A et B sont indépendants.

Pourtant $p_A(B)$ n'a pas de sens, car on ne divise pas par $p(A) = 0$. Sans la condition, le second membre de l'équivalence n'existe pas.

Et les contraires ? Avec les cartes, A : « pair » et $\overline{B}$: « non multiple de 3 » donnent $A \cap \overline{B} = \{2, 4, 8, 10\}$. Or $\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}$. **Pourquoi est-ce vrai ?** On retire de A la partie $A \cap B$.

Propriété : Indépendance et événements contraires

Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et B sont indépendants, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration

Étape 1. A est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$. Par « Règles de calcul des probabilités » (point 2), $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$.

Étape 2. Par hypothèse, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Donc $p(A \cap \overline{B}) = p(A)\big(1 - p(B)\big) = p(A) \times p(\overline{B})$, par le point 3 des mêmes règles. Ainsi A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Étape 3. La définition est symétrique en A et B : en échangeant leurs rôles, $\overline{A}$ et B sont indépendants. On applique enfin les étapes 1 et 2 au couple d'événements indépendants $\overline{A}$ et B : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Pour l'équivalence, une seule égalité sert dans les deux sens : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. On la lit de gauche à droite, puis de droite à gauche.

Pour les contraires, on découpe A en deux morceaux incompatibles, $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$. Puis on applique deux fois le résultat obtenu, en échangeant les rôles.

Découper un événement en morceaux incompatibles : garde ce réflexe.

Vérifie : L'argument de l'étape 1

Dans la preuve de « Indépendance et événements contraires », on écrit $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$. Quel argument justifie cette égalité ?

A. A et B sont indépendants.

Faux.
L'indépendance ne sert qu'à l'étape 2, pour remplacer $p(A \cap B)$ par $p(A) \times p(B)$.

B. $\overline{B}$ est le contraire de B, donc $p(\overline{B}) = 1 - p(B)$.

Faux.
Cette règle sert plus tard. Ici, il s'agit de $A \cap \overline{B}$, pas de $\overline{B}$.

C. A est la réunion des événements incompatibles $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$.

Juste.
La règle d'additivité pour deux événements incompatibles donne $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$.

Indice 1
Une issue de A réalise B, ou ne le réalise pas.
Indice 2
Quelle règle de calcul additionne deux probabilités ?

Correction

Toute issue de A est dans $A \cap B$ ou dans $A \cap \overline{B}$, jamais dans les deux. Ces deux événements sont incompatibles, et leur réunion est A.

Par la règle d'additivité pour deux événements incompatibles, $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$. On isole ensuite $p(A \cap \overline{B})$. L'indépendance n'intervient pas encore.

Calculer et rédiger

Exemple : passer aux contraires

Soient A et B deux événements indépendants, avec $p(A) = \dfrac{2}{5}$ et $p(B) = \dfrac{1}{4}$. Cherchons la probabilité qu'aucun des deux ne soit réalisé.

D'après la propriété « Indépendance et événements contraires », $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants. Donc :

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap \overline{B}) &= p(\overline{A}) \times p(\overline{B}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Contrôle par la réunion. On a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = \dfrac{1}{10}$ par indépendance. Puis $p(A \cup B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{11}{20}$, et $1 - \dfrac{11}{20} = \dfrac{9}{20}$.

Méthode : montrer que deux événements sont indépendants, ou non

On lance un dé équilibré à huit faces, numérotées de 1 à 8. **Montrer que** R : « le résultat est inférieur ou égal à 4 » et S : « le résultat est pair » sont indépendants.

1. **Nommer le modèle.** Le dé est équilibré : les huit issues sont équiprobables.
2. **Calculer séparément.** $p(R) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $p(S) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$. De plus, $R \cap S = \{2, 4\}$, donc $p(R \cap S) = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$.
3. **Comparer.** $p(R) \times p(S) = \dfrac{1}{4} = p(R \cap S)$.
4. **Conclure.** « On a $p(R \cap S) = p(R) \times p(S)$: les événements R et S sont donc indépendants. » Si l'égalité est fausse, on conclut qu'ils ne le sont pas.

Attention : Confondre incompatibles et indépendants

Avec le même dé à huit faces, prends U : « le résultat est 1 ou 2 » et W : « le résultat est 7 ou 8 ». Ils sont incompatibles : $U \cap W = \emptyset$, donc $p(U \cap W) = 0$. Mais $p(U) \times p(W) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$. Donc U et W ne sont **pas** indépendants.

Pour l'incompatibilité, on regarde les ensembles ; pour l'indépendance, on compare des probabilités.

Plus généralement, deux événements incompatibles, chacun de probabilité non nulle, ne sont jamais indépendants : la probabilité de leur intersection est nulle, pas le produit de leurs probabilités.

À toi : la roue de loterie

Une roue de loterie équilibrée a dix secteurs égaux, numérotés de 1 à 10. On note K : « le numéro est pair », L : « le numéro est inférieur ou égal à 3 » et H : « le numéro est inférieur ou égal à 4 ». Montre que K et L ne sont pas indépendants, puis que K et H le sont. Rédige comme dans la méthode.

Indice 1
Les dix secteurs sont équiprobables : chaque probabilité est un nombre de secteurs divisé par 10.
Indice 2
Écris $K \cap L$ et $K \cap H$ en extension.

Réponse
La roue est équilibrée : les dix issues sont équiprobables. On a $p(K) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$, $p(L) = \dfrac{3}{10}$ et $p(H) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

$K \cap L = \{2\}$, donc $p(K \cap L) = \dfrac{1}{10}$. Or $p(K) \times p(L) = \dfrac{3}{20}$. Comme $\dfrac{1}{10} \neq \dfrac{3}{20}$, K et L ne sont pas indépendants.

$K \cap H = \{2, 4\}$, donc $p(K \cap H) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$. Or $p(K) \times p(H) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5}$. Donc K et H sont indépendants.

Un seul secteur de plus change la conclusion : l'indépendance ne se devine pas, elle se calcule.

Épreuves indépendantes et schéma de Bernoulli

Deux expériences à la suite

Devine : Un dé, puis une pièce

Tu lances un dé équilibré à quatre faces, numérotées de 1 à 4, puis une pièce équilibrée. Le résultat du dé n'influe pas sur la pièce. Quelle est la probabilité d'obtenir « 4, puis pile » ?

A. $\dfrac{1}{6}$
Faux.
Tu as compté $4 + 2 = 6$ résultats. Or une issue est un couple, comme $(4, \text{pile})$: il y en a $4 \times 2 = 8$.

B. $\frac{1}{8}$

Juste.

Les 8 couples sont équiprobables, et un seul convient. C'est aussi $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$

Faux.

Tu as additionné $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Or on veut les deux résultats à la fois : ce n'est pas une réunion.

D. $\frac{1}{4}$

Faux.

C'est la probabilité d'obtenir 4 au dé, quel que soit le côté de la pièce.

Indice 1

Une issue de l'expérience est un couple : résultat du dé, puis côté de la pièce.

Indice 2

Combien y a-t-il de couples ? Sont-ils équiprobables ?

Correction

Une issue est un couple (dé, pièce) : il y en a $4 \times 2 = 8$, tous équiprobables. Un seul couple convient : $(4, \text{pile})$. La probabilité vaut donc $\frac{1}{8}$.

Remarque : $\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$. On multiplie les probabilités des deux épreuves : c'est le modèle qui suit.

Définition : Épreuves indépendantes

Une expérience aléatoire est formée de n épreuves successives ($n \geq 1$), la k-ième ayant un univers fini Ω_k muni d'une probabilité p_k. On dit que ces épreuves sont **indépendantes** si l'on modélise l'expérience par l'univers des listes $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, avec $\omega_k \in \Omega_k$, muni de la probabilité :

$$p\big(\{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\}\big) = p_1(\{\omega_1\}) \times p_2(\{\omega_2\}) \times \cdots \times p_n(\{\omega_n\}).$$

On choisit ce modèle quand l'issue d'une épreuve n'influe pas sur les autres : lancers successifs d'un dé, tirages successifs avec remise. Pour $n = 1$, ce modèle est celui de l'unique épreuve.

Exemple : une urne, puis un dé

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. Tu tires une boule au hasard, puis tu lances un dé équilibré à six faces. Les deux épreuves sont indépendantes. Par la définition des épreuves indépendantes :

$$p\big(\{(\text{rouge}, 6)\}\big) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}.$$

L'événement « verte et nombre pair » contient trois issues : $(\text{verte}, 2)$, $(\text{verte}, 4)$ et $(\text{verte}, 6)$. Chacune a la probabilité $\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$. Sa probabilité vaut donc $3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$, soit $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$.

Souvent, d'une épreuve, on ne retient que deux issues : « rouge » ou « pas rouge ». On parle alors de **succès** et d'**échec**.

Succès ou échec

Définition : Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$.

1. Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'**échec**, de probabilité $1 - p$.
2. Soit n un entier naturel non nul. Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, indépendantes.

Vérifie : Reconnaître un schéma de Bernoulli

Laquelle de ces expériences est un schéma de Bernoulli ?

A. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face, et on compte les lancers.

Faux.
Le nombre de lancers n'est pas fixé à l'avance : il n'y a pas d'entier n donné.

B. On tire successivement, sans remise, trois boules d'une urne de 2 boules rouges et 5 noires ; succès : « rouge ».

Faux.
Sans remise, la composition de l'urne change : les tirages ne sont pas indépendants.

C. On lance une fois un dé équilibré à six faces et on note le résultat.

Faux.
Une seule épreuve, à six issues, sans succès désigné : ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

D. On tire successivement, avec remise, quatre boules d'une urne de 2 boules rouges et 5 noires ; succès : « rouge ».

Juste.
Quatre épreuves identiques et indépendantes, à deux issues, de paramètre $\frac{2}{7}$: c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{2}{7}$.

Indice 1
Un schéma de Bernoulli demande trois choses : deux issues par épreuve, un nombre n fixé d'épreuves, l'indépendance.
Indice 2

Qu'est-ce qui change dans l'urne quand on ne remet pas la boule ?

Correction

Seul le tirage avec remise convient. Chaque tirage a deux issues : rouge, de probabilité $\frac{2}{7}$, ou non. On fait $n = 4$ tirages. Grâce à la remise, l'urne est la même à chaque tirage : les épreuves sont identiques et indépendantes. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{2}{7}$.

Exactement k succès

Petit rappel de 1BAC. Pour $0 \leq k \leq n$, C_n^k est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, et $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$. Par exemple, $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$, et $C_n^0 = C_n^n = 1$.

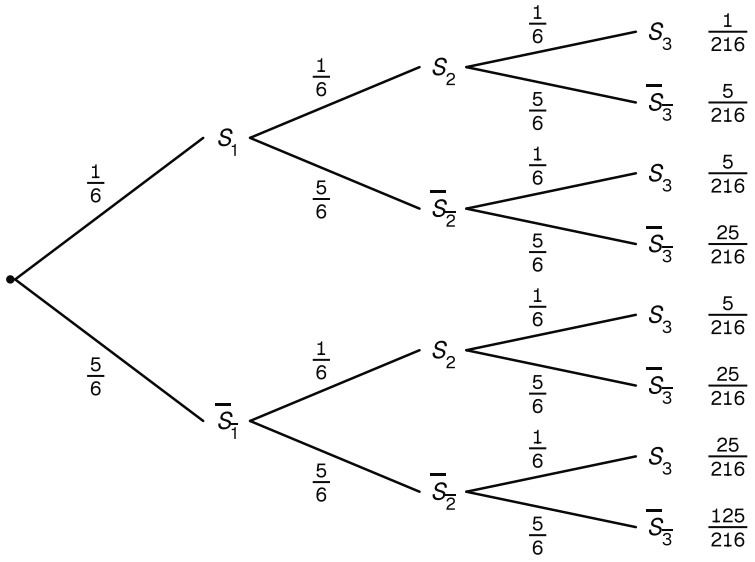
Choisir les rangs de 2 succès parmi 5 épreuves, c'est choisir une partie à 2 éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$: il y a 10 façons.

Exemple : deux six en trois lancers

Tu lances trois fois un dé équilibré à six faces. Succès : « obtenir 6 », de probabilité $\frac{1}{6}$. Pour exactement deux succès, trois listes conviennent : (succès, succès, échec), (succès, échec, succès) et (échec, succès, succès).

Chaque liste a la probabilité $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$, quel que soit l'ordre. Donc la probabilité cherchée vaut $3 \times \frac{5}{216} = \frac{5}{72}$.

Le facteur 3 est C_3^2 : on choisit les rangs des deux succès. **Pourquoi est-ce vrai** en général ? Même calcul : une probabilité par liste, puis un nombre de listes.



Les trois lancers en arbre, S pour un six et son contraire pour un échec : trois chemins comptent exactement deux succès, et chacun vaut 5/216.

Théorème : Probabilité d'obtenir exactement k succès

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir exactement k succès est :

$$C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}.$$

Démonstration

Étape 1. Par « Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli », les n épreuves sont indépendantes, et chacune donne un succès avec la probabilité p. Une issue est une liste de n résultats, succès ou échec. Par « Épreuves indépendantes », une liste qui contient exactement k succès a pour probabilité le produit de k facteurs p et de $n-k$ facteurs $1-p$, soit $p^k(1-p)^{n-k}$, quel que soit l'ordre.

Étape 2. L'ensemble des rangs des k succès est une partie à k éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et chaque telle partie correspond à une seule liste. Par dénombrement (première année), il y a C_n^k listes de ce type.

Conclusion. Par « Probabilité sur un univers fini », la probabilité de l'événement « exactement k succès » est la somme de C_n^k termes égaux à $p^k(1-p)^{n-k}$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

La preuve se fait en deux temps.

1. **La probabilité d'une liste** : l'indépendance permet de multiplier, et l'ordre des facteurs ne compte pas.

2. **Le nombre de listes** : choisir les rangs des k succès, c'est choisir une partie à k éléments, d'où C_n^k.

Probabilité d'une issue, puis nombre d'issues : c'est un geste qui revient dans tout le chapitre.

Vérifie : Quelle hypothèse sert où ?

Dans la preuve de « Probabilité d'obtenir exactement k succès », pourquoi une liste qui contient k succès a-t-elle pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$?

A. Les épreuves sont indépendantes : la probabilité d'une liste est le produit des probabilités de ses résultats.

Juste.
C'est la définition des épreuves indépendantes, appliquée à une liste de n résultats.

B. Toutes les listes sont équiprobables.

Faux.
C'est faux dès que $p \neq \frac{1}{2}$: avec $p = \frac{1}{6}$, la liste de trois succès a la probabilité $\frac{1}{216}$, celle de trois échecs $\frac{125}{216}$.

C. Il y a C_n^k façons de placer les succès.

Faux.
Ce dénombrement sert à l'étape 2, pour compter les listes. Il ne donne pas la probabilité d'une liste.

Indice 1
Une liste est une issue de n épreuves successives.
Indice 2
Quel modèle donne la probabilité d'une issue de plusieurs épreuves ?

Correction
L'expérience est modélisée par des épreuves indépendantes. La probabilité d'une liste est donc le produit des probabilités de ses n résultats : k facteurs p et $n-k$ facteurs $1-p$.

Le dénombrement C_n^k intervient ensuite, pour compter les listes. L'équiprobabilité des listes est fausse en général.

Appliquer et se méfier

Exemple : une application directe

Une joueuse de basket réussit chaque lancer franc avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose ses quatre tirs indépendants. Succès : « le tir est réussi », de paramètre $p = \frac{2}{3}$. C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{2}{3}$.

D'après la probabilité d'obtenir exactement k succès, avec $k = 3$, la probabilité de réussir exactement trois tirs vaut :

$$\begin{aligned} & C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ &= 4 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{32}{81}. \end{aligned}$$

Attention : Sans remise, pas d'épreuves indépendantes

Une urne contient 3 boules rouges et 2 noires, indiscernables au toucher. On tire au hasard deux boules successivement, **sans remise**. Notons R_1 : « rouge au premier tirage » et R_2 : « rouge au second ». Par la formule des probabilités composées, $p(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

Avec le système complet $R_1, \overline{R_1}$, la formule des probabilités totales donne $p(R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$. Or $p(R_1) \times p(R_2) = \frac{9}{25} \neq \frac{3}{10}$: les tirages ne sont pas indépendants.

Ce n'est pas un schéma de Bernoulli. Avant de multiplier, vérifie la remise.

À toi : une pièce truquée

Une pièce truquée tombe sur face avec la probabilité $\frac{1}{3}$. Tu la lances quatre fois, de façon indépendante. Calcule la probabilité d'obtenir exactement deux faces. Rédige : épreuve, succès, paramètre, nombre d'épreuves, indépendance.

Indice 1

L'épreuve est un lancer ; le succès est « face ».

Indice 2

Il faut C_4^2 : combien vaut-il ?

Réponse

L'épreuve est un lancer de la pièce ; le succès est « face », de paramètre $p = \frac{1}{3}$. On fait 4 lancers indépendants : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$.

D'après la probabilité d'obtenir exactement k succès, avec $k = 2$:

$$\begin{aligned} & C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= 6 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{24}{81} = \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Conclusion. La probabilité d'obtenir exactement deux faces vaut $\frac{8}{27}$.

Variable aléatoire et loi

Un nombre attaché au hasard

Devine : Le gain d'un jeu

À une kermesse, tu paies 2 dirhams pour lancer deux dés équilibrés à quatre faces, numérotées de 1 à 4. Si la somme vaut 8, tu reçois 10 dirhams. Si elle vaut 7, tu reçois 4 dirhams. Sinon, tu ne reçois rien. Ton **gain** G est ce que tu reçois, moins la mise. Quelles valeurs G peut-il prendre ?

A. 0, 4 et 10

Faux.

Ce sont les sommes reçues : tu as oublié de retirer la mise de 2 dirhams.

B. 2 et 8

Faux.

Tu as oublié le cas le plus fréquent : tu ne reçois rien, et ton gain vaut -2.

C. -2, 2 et 8

Juste.

On retire la mise à chaque somme reçue : $0-2$, $4-2$ et $10-2$.

D. -2, 4 et 10

Faux.

La mise se retire dans tous les cas, pas seulement quand tu perds.

Indice 1

Le gain se calcule dans chaque cas : somme reçue moins 2.

Indice 2

N'oublie pas le cas où tu ne reçois rien.

Correction

Dans chaque cas, on retire la mise : $10-2=8$, $4-2=2$ et $0-2=-2$. Donc G prend les valeurs -2, 2 et 8.

À chaque issue du lancer, G associe un nombre réel : c'est une **variable aléatoire**.

Définition : Variable aléatoire

Soit (Ω, p) un espace probabilisé fini. Une **variable aléatoire** réelle est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses valeurs est noté $X(\Omega)=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Pour tous réels a et b :

1. $(X=a)$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)=a\}$;
2. $(X \leq a)$ désigne l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$; on définit de même $(X<a)$, $(X \geq a)$, $(X>a)$ et $(a<X\leq b)$.

Exemple : des événements écrits avec le gain

Les dés sont équilibrés et indépendants : les $4 \times 4 = 16$ couples sont équiprobables.

- $(G = 8)$ est l'événement « la somme vaut 8 » : $\{(4,4)\}$, de probabilité $\dfrac{1}{16}$.
- $(G = 2)$ est l'événement « la somme vaut 7 » : $\{(3,4),(4,3)\}$, de probabilité $\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$.
- $(G \leq 2)$ est réalisé quand la somme ne vaut pas 8 : il contient 15 couples, et sa probabilité vaut $\dfrac{15}{16}$.

Une phrase sur G devient un ensemble d'issues.

La loi : un tableau

Définition : Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, p), de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. **Déterminer la loi de probabilité** de X, c'est donner, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, le réel $p_i = p(X = x_i)$. On la présente dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_m

Exemple : la loi du gain

L'événement $(G = -2)$ contient les $16 - 3 = 13$ autres couples. La loi de G est :

x_i	-2	2	8
$p(G = x_i)$	$\dfrac{13}{16}$	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

Additionne : $\dfrac{13}{16} + \dfrac{2}{16} + \dfrac{1}{16} = 1$. Est-ce un hasard ? **Pourquoi est-ce vrai ?** Chaque couple donne une seule valeur de G, et chaque couple est compté une fois.

Propriété : Somme des probabilités d'une loi

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini, de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. Alors :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1.$$

Plus généralement, pour toute partie non vide J de $\{1, \ldots, m\}$, la probabilité que X prenne une valeur x_i avec $i \in J$ est la somme des p_i pour $i \in J$.

Démonstration

Étape 1. Les événements $(X = x_1), \dots, (X = x_m)$ sont deux à deux incompatibles, car une issue ω n'a qu'une image $X(\omega)$. Leur réunion est Ω, car toute image est l'un des x_i. Chaque issue appartient donc à un et un seul de ces événements.

Étape 2. Par « Probabilité sur un univers fini », la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses issues. Les issues de « X prend une valeur x_i avec $i \in J$ » se répartissent, sans répétition, entre les événements $(X = x_i)$, $i \in J$: on regroupe la somme selon ces événements.

Conclusion. Avec $J = \{1, \dots, m\}$, l'événement est Ω : $p_1 + \cdots + p_m = p(\Omega) = 1$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Une issue n'a qu'une image, et toute image est l'une des valeurs x_i. Les événements $(X = x_i)$ partagent donc l'univers sans trou ni chevauchement : chaque issue est dans un et un seul d'entre eux.

On regroupe alors les issues selon la valeur prise. Ranger les issues par paquets disjoints : c'est le geste de la preuve.

Vérifie : L'argument de l'étape 1

Dans la preuve de « Somme des probabilités d'une loi », pourquoi les événements $(X = x_1), \dots, (X = x_m)$ sont-ils deux à deux incompatibles ?

A. Parce que leurs probabilités ont pour somme 1.

Faux.

C'est ce qu'on veut démontrer : on tournerait en rond.

B. Parce qu'une issue ω n'a qu'une seule image $X(\omega)$.

Juste.

Une issue ne peut pas donner à la fois x_1 et x_2 : elle n'est que dans un seul de ces événements.

C. Parce que l'univers est muni de l'équiprobabilité.

Faux.

La preuve ne suppose pas l'équiprobabilité : le résultat vaut pour toute probabilité.

Indice 1

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Indice 2

Combien d'images une issue a-t-elle par une application ?

Correction

> Une variable aléatoire est une application : chaque issue ω a une seule image $X(\omega)$. Une issue ne peut donc pas réaliser $(X = x_i)$ et $(X = x_j)$ avec $i \neq j$. Les événements sont deux à deux incompatibles.
>
> La somme 1 est la conclusion, pas un argument.

Rédiger une loi

Exemple : une probabilité déduite de la somme

Une variable Y prend les valeurs -1, 0 et 3, et seulement celles-là. On sait que $p(Y = -1) = \dfrac{2}{7}$ et $p(Y = 3) = \dfrac{1}{7}$. D'après la somme des probabilités d'une loi :

$$p(Y = 0) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}.$$

Tu peux écrire ce calcul dans une copie, en citant la propriété. Mais il exige de connaître **toutes** les valeurs de Y : une valeur oubliée fausserait le résultat.

Méthode : déterminer la loi d'une variable aléatoire

Une urne contient cinq jetons : trois portent le nombre 1, deux portent le nombre 0. On tire simultanément deux jetons au hasard ; X est la somme des deux nombres. **Déterminer** la loi de X.

1. **Nommer le modèle.** Tirage simultané au hasard : les $C_5^2 = 10$ paires de jetons sont équiprobables.
2. **Lister les valeurs.** X prend les valeurs 0, 1 et 2.
3. **Calculer.** $(X = 0)$: deux jetons « 0 », $C_2^2 = 1$ paire. $(X = 1)$: un jeton de chaque sorte, $3 \times 2 = 6$ paires. $(X = 2)$: $C_3^2 = 3$ paires.
4. **Conclure et vérifier.**

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$

Somme : $\dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$.

Attention : Une valeur oubliée

Une boîte contient quatre ampoules, dont une seule défectueuse. On en prend deux au hasard, simultanément ; D est le nombre d'ampoules défectueuses obtenues.

Écrire seulement $p(D=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ donne une « loi » de somme $\frac{1}{2}$: la valeur 0 manque. En effet, $p(D=0)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Une somme différente de 1 est un signal d'alarme : il manque une valeur, ou un calcul est faux.

À toi : le premier pile

Tu lances une pièce équilibrée au plus trois fois, de façon indépendante : tu t'arrêtes dès que tu obtiens pile. T est le rang du premier pile, et $T=0$ si tu n'obtiens aucun pile. Détermine la loi de T et vérifie la somme.

Indice 1
Les valeurs de T sont 0, 1, 2 et 3 : n'oublie pas 0.
Indice 2
$(T=2)$ signifie : face, puis pile. Multiplie les probabilités des lancers indépendants.

Réponse
Les lancers sont indépendants et la pièce est équilibrée. T prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

- $(T=1)$: pile au premier lancer, donc $p(T=1)=\frac{1}{2}$.
- $(T=2)$: face puis pile, donc $p(T=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.
- $(T=3)$: face, face, puis pile, donc $p(T=3)=\frac{1}{8}$.
- $(T=0)$: trois faces, donc $p(T=0)=\frac{1}{8}$.

x_i	0	1	2	3
$p(T=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Somme : $\frac{1}{8}+\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=1$.

Espérance, variance, écart-type

Combien gagnes-tu en moyenne ?

Devine : Seize parties idéales

Reprends le jeu de la kermesse, de loi $p(G=-2)=\frac{13}{16}$, $p(G=2)=\frac{1}{8}$ et $p(G=8)=\frac{1}{16}$. Imagine seize parties où chaque gain sort exactement selon sa probabilité : 13 pertes de 2 dirhams, 2 gains de 2 et 1 gain de 8. Quel est ton gain moyen par partie ?

A. $\frac{8}{3}$ dirhams
Faux.

Tu as fait la moyenne des trois valeurs -2, 2 et 8, comme si elles étaient aussi probables.

B. 0 dirham

Faux.

Les pertes sont bien plus fréquentes que les gains : le total des seize parties vaut -14, pas 0.

C. -2 dirhams

Faux.

C'est le gain le plus fréquent, pas la moyenne : les gains de 2 et de 8 remontent le total.

D. $-\dfrac{7}{8}$ dirham

Juste.

Total : $13 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 8 = -14$, puis $\dfrac{-14}{16} = -\dfrac{7}{8}$.

Indice 1

Calcule le total des seize gains.

Indice 2

Divise ce total par 16.

Correction

Le total des seize parties vaut $13 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 8 = -26 + 4 + 8 = -14$. Le gain moyen vaut donc $\dfrac{-14}{16} = -\dfrac{7}{8}$ dirham.

C'est aussi $(-2) \times \dfrac{13}{16} + 2 \times \dfrac{1}{8} + 8 \times \dfrac{1}{16}$: chaque valeur est pondérée par sa probabilité.

Définition : Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. L'**espérance mathématique** de X est le réel :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_m p_m = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i.$$

Exemple : un jeu équitable ?

Pour la kermesse, $E(G) = -\dfrac{7}{8}$. Sur un grand nombre de parties, tu perds en moyenne $\dfrac{7}{8}$ de dirham par partie : le jeu est **défavorable** au joueur. Un jeu est **équitable** quand l'espérance du gain est nulle.

Si la somme 8 rapportait 24 dirhams, le gain correspondant vaudrait 22. Alors $E(G) = (-2) \times \dfrac{13}{16} + 2 \times \dfrac{2}{16} + 22 \times \dfrac{1}{16} = 0$: le jeu deviendrait équitable.

L'espérance ne dit pas tout. Deux jeux de même espérance peuvent être plus ou moins risqués : il faut aussi mesurer l'écart des valeurs à la moyenne.

Mesurer la dispersion

Définition : Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. La **variance** de X est le réel positif

$$V(X) = \sum_{i=1}^{m} \big(x_i - E(X)\big)^2 p_i,$$

et l'**écart-type** de X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple : une variance par la définition

Soit X de loi $p(X=0) = \dfrac{1}{2}$, $p(X=1) = \dfrac{1}{4}$ et $p(X=4) = \dfrac{1}{4}$. D'abord, $E(X) = 0 + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$. Par la définition de la variance :

$$\begin{aligned} V(X) &= \left(-\frac{5}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + \left(\frac{11}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{43}{16}. \end{aligned}$$

Donc $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{43}}{4}$.

Ces carrés de fractions sont lourds. Or $E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \dfrac{17}{4} - \dfrac{25}{16} = \dfrac{43}{16}$ aussi. **Pourquoi est-ce vrai ?** On développe chaque carré.

Propriété : Calcul pratique de la variance

Soit X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$. On note $E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i$. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2.$$

Démonstration

Notons $\mu = E(X)$.

Étape 1. Pour chaque i, on développe : $(x_i - \mu)^2 p_i = x_i^2 p_i - 2\mu x_i p_i + \mu^2 p_i$.

Étape 2. On additionne pour i de 1 à m ; par « Variance et écart-type » : $V(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i - 2\mu \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{m} p_i$.

Étape 3. Par « Espérance mathématique », $\sum_{i=1}^{m} x_i p_i = \mu$. Par « Somme des probabilités d'une loi », $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Conclusion. $V(X) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$.

Exemple : Contre-exemple : le carré de l'espérance

Avec la même variable, $E(X^2) = \dfrac{17}{4}$, alors que $\big(E(X)\big)^2 = \dfrac{25}{16}$. Ces deux nombres sont différents : on ne remplace jamais l'un par l'autre. Leur différence est justement la variance, positive par définition.

Et si l'on change d'unité, ou si l'on ajoute une prime fixe ? Avec $Y = 3X + 2$, on trouve $E(Y) = \dfrac{23}{4} = 3E(X) + 2$. **Pourquoi est-ce vrai ?** Chaque valeur x_i devient $3x_i + 2$, avec la même probabilité.

Changer d'unité

Propriété : Espérance et variance de aX + b

Soient X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, p), a et b deux réels, et $Y = aX + b$ la variable aléatoire $\omega \mapsto aX(\omega) + b$. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \qquad V(aX + b) = a^2 V(X), \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

Démonstration

Étape 1 (cas $a \neq 0$). Les valeurs de Y sont les réels $ax_i + b$, deux à deux distincts, et $(Y = ax_i + b) = (X = x_i)$. Donc Y prend la valeur $ax_i + b$ avec la probabilité p_i. Si $a < 0$, ces valeurs sont rangées dans l'ordre décroissant, ce qui ne change aucune somme.

Étape 2. Par « Espérance mathématique » et « Somme des probabilités d'une loi » : $E(Y) = \sum_{i=1}^{m} (ax_i + b) p_i = aE(X) + b \times 1$.

Étape 3. Par « Variance et écart-type » : $V(Y) = \sum_{i=1}^{m} \big(ax_i + b - aE(X) - b\big)^2 p_i = a^2 V(X)$. Donc $\sigma(Y) = \sqrt{a^2 V(X)} = |a|\,\sigma(X)$.

Étape 4 (cas $a = 0$). Y prend la seule valeur b, avec la probabilité 1 : $E(Y) = b$ et $V(Y) = 0$, comme l'annoncent les formules.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux preuves, un même outil : séparer une somme.

- **Variance** : on développe $(x_i - \mu)^2$, puis on reconnaît $E(X)$ et la somme 1 des probabilités.
- **Variable** $aX + b$, avec $a \neq 0$: l'événement $(Y = ax_i + b)$ est l'événement $(X = x_i)$, donc les probabilités restent les mêmes. Le cas $a = 0$ se traite à part.

Vérifie : Une transformation affine

Une variable X vérifie $E(X) = 2$ et $V(X) = 5$. On pose $Z = -3X + 4$. Que vaut $V(Z)$?

A. -11

Faux.
Tu as calculé $-3 \times 5 + 4$. Or la constante 4 ne change pas la dispersion, et une variance n'est jamais négative.

B. 45

Juste.
$V(Z) = (-3)^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$.

C. -15

Faux.
Le coefficient -3 intervient au carré : une variance est positive.

D. 15

Faux.
C'est l'écart-type qui est multiplié par $|-3| = 3$. La variance est multipliée par 9.

Indice 1
Utilise la propriété sur $aX + b$, avec $a = -3$ et $b = 4$.
Indice 2
Quel est l'effet de b sur la variance ?

Correction
D'après la propriété sur $aX + b$, avec $a = -3$ et $b = 4$: $V(Z) = a^2 V(X) = 9 \times 5 = 45$. Au passage, $E(Z) = -3 \times 2 + 4 = -2$ et $\sigma(Z) = 3\sqrt{5}$.

Exemple : une prime fixe

Reprends le gain G de la kermesse, avec $E(G) = -\dfrac{7}{8}$. Un sponsor offre 1 dirham à chaque partie : le nouveau gain est $G + 1$. Alors $E(G + 1) = -\dfrac{7}{8} + 1 = \dfrac{1}{8}$: le jeu devient favorable au joueur.

Mais $V(G + 1) = V(G)$: décaler toutes les valeurs ne change pas leur dispersion.

Avec $a = 0$, la variable $0 \times G + 1$ vaut toujours 1 : sa variance est nulle, comme l'annonce la formule.

Rédiger le calcul

Attention : Variance de aX + b : deux pièges

Si $V(X) = 4$, alors $V(-2X + 7) = (-2)^2 \times 4 = 16$.

Ce n'est ni $-2 \times 4 + 7 = -1$, ni $-2 \times 4 = -8$: une variance n'est jamais négative. Ajouter 7 à toutes les valeurs ne les rend pas plus dispersées.

De même, $\sigma(-2X + 7) = |-2| \times 2 = 4$: un écart-type n'est jamais négatif, il ne vaut donc pas -4.

Méthode : espérance, variance et écart-type

Reprends la somme X des deux jetons, de loi $p(X = 0) = \dfrac{1}{10}$, $p(X = 1) = \dfrac{3}{5}$ et $p(X = 2) = \dfrac{3}{10}$. **Montrer que** $E(X) = \dfrac{6}{5}$ et $V(X) = \dfrac{9}{25}$.

1. **Partir du tableau** de la loi, dont la somme vaut 1.
2. **Espérance**, tous les termes écrits : $E(X) = 0 \times \dfrac{1}{10} + 1 \times \dfrac{3}{5} + 2 \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{6}{5}$.
3. **Carrés** : $E(X^2) = 0 + 1 \times \dfrac{3}{5} + 4 \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{9}{5}$.
4. **Variance** : $V(X) = \dfrac{9}{5} - \dfrac{36}{25} = \dfrac{9}{25}$, bien positive.
5. **Conclure** : « $E(X) = \dfrac{6}{5}$, $V(X) = \dfrac{9}{25}$ et $\sigma(X) = \dfrac{3}{5}$. » Sur un grand nombre de tirages, la somme vaut $\dfrac{6}{5}$ en moyenne.

À toi : le premier pile, en moyenne

Reprends la variable T, rang du premier pile en au plus trois lancers, de loi $p(T = 0) = \dfrac{1}{8}$, $p(T = 1) = \dfrac{1}{2}$, $p(T = 2) = \dfrac{1}{4}$ et $p(T = 3) = \dfrac{1}{8}$. Calcule $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$, en rédigeant comme dans la méthode.

Indice 1

Écris les quatre termes de $E(T)$, même celui qui est nul.

Indice 2

Pour $E(T^2)$, élève les valeurs au carré, pas les probabilités.

Réponse

La loi de T a pour somme 1.

Espérance.

$$\begin{aligned} E(T) &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

Carrés.

$$\begin{aligned} E(T^2) &= 0 + 1 \times \frac{1}{2} \\ &\quad + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{21}{8}. \end{aligned}$$

Variance. Avec $E(T^2)$ et $E(T)$, la formule $V(T) = E(T^2) - \big(E(T)\big)^2$ donne $V(T) = \frac{21}{8} - \frac{121}{64} = \frac{47}{64}$, bien positive. Donc $\sigma(T) = \frac{\sqrt{47}}{8}$.

Conclusion. $E(T) = \frac{11}{8}$, $V(T) = \frac{47}{64}$ et $\sigma(T) = \frac{\sqrt{47}}{8}$. Sur un grand nombre de séries, T vaut $\frac{11}{8}$ en moyenne, en comptant 0 pour une série sans pile.

Loi binomiale

Compter les succès

Devine : Deux faces en quatre lancers

Tu lances quatre fois une pièce équilibrée. X est le nombre de faces obtenues. Que vaut $p(X = 2)$?

A. $\frac{1}{5}$

Faux.

Tu as supposé les cinq valeurs $0, 1, 2, 3, 4$ équiprobables. Or $X = 2$ arrive de bien plus de façons que $X = 4$.

B. $\frac{1}{16}$

Faux.

C'est la probabilité d'une seule liste, par exemple face, face, pile, pile. Il y a d'autres ordres.

C. $\frac{1}{2}$

Faux.

Deux faces sur quatre, c'est la moitié des lancers, mais pas une probabilité de $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{8}$

Juste.

$C_4^2 = 6$ listes, chacune de probabilité $\frac{1}{16}$: $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Indice 1

Une liste de quatre résultats a la probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Indice 2

Combien de listes contiennent exactement deux faces ?

Correction

Les quatre lancers forment un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et $\frac{1}{2}$, le succès étant « face ».

D'après la probabilité d'obtenir exactement k succès :

$$\begin{aligned} p(X=2) &= C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

La loi de ce nombre de succès porte un nom.

Définition : Loi binomiale

Soient n un entier naturel non nul et p un réel tel que $0 < p < 1$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathcal{B}(n,p)$, si $X(\Omega) = \{0,1,\dots,n\}$ et :

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad p(X=k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}.$$

Exemple : une loi binomiale en tableau

Soit X de loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{4}\right)$. Pour k de 0 à 3, $p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$:

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

La somme vaut $\frac{64}{64} = 1$.

Le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli suit-il toujours une telle loi ? **Pourquoi est-ce vrai ?** La formule des k succès est exactement celle de la définition.

Du schéma à la loi

Propriété : Nombre de succès dans un schéma de Bernoulli

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X égale au nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De plus :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = 1.$$

Démonstration

Étape 1. Le nombre de succès est un entier compris entre 0 et n, et chacune de ces valeurs est atteinte, par exemple par la liste dont les k premiers résultats sont des succès et les autres des échecs. Donc $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$.

Étape 2. Par « Probabilité d'obtenir exactement k succès », $p(X = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout k : c'est la « Loi binomiale ».

Étape 3. Par la formule du binôme (première année), $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1$, ce qui est conforme à « Somme des probabilités d'une loi ».

Exemple : un nombre moyen de succès

Avec la loi du tableau précédent :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{27}{64} + 1 \times \frac{27}{64} \\ &\quad + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} \\ &= \frac{48}{64} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Or $3 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$: trois épreuves, une chance sur quatre à chaque fois, donc trois quarts de succès en moyenne.

Est-ce toujours $n \times p$? **Pourquoi est-ce vrai ?** Une identité sur les C_n^k fait sortir n, puis la formule du binôme conclut.

Propriété : Espérance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

Démonstration

Étape 1. Pour $1 \leq k \leq n$: $k \, C_n^k = \dfrac{k \times n!}{k! \, (n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \, (n-k)!} = n \, C_{n-1}^{k-1}$.

Étape 2. Par « Espérance mathématique », le terme $k = 0$ étant nul : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} k \, C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \, p^{k-1} (1-p)^{n-k}$.

Étape 3. On pose $j = k - 1$: la dernière somme devient $\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} \, p^j (1-p)^{n-1-j}$, qui vaut $\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = 1$ par la formule du binôme.

Conclusion. $E(X) = np$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Deux outils de première année font tout le travail.

1. **Une identité sur les C_n^k** : pour $1 \leq k \leq n$, $k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1}$. On fait sortir n de la somme, et le terme $k = 0$, nul, disparaît.
2. **La formule du binôme** : $\big(p + (1-p)\big)^n = 1$ donne la somme 1 de la loi, et la même idée avec l'exposant $n-1$ termine l'espérance.

Reconnaître un binôme caché dans une somme : c'est le réflexe de ces preuves.

Vérifie : La fin du calcul de l'espérance

Dans la preuve de « Espérance d'une loi binomiale », on obtient $E(X) = np\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j}\,p^{j}(1-p)^{n-1-j}$. Pourquoi cette dernière somme vaut-elle 1 ?

A. Parce que $C_{n-1}^{j} = C_n^{j}$ pour tout j.

Faux.

C'est faux : par exemple $C_2^1 = 2$, alors que $C_3^1 = 3$.

B. Parce que les épreuves sont indépendantes.

Faux.

L'indépendance a servi à établir la loi. Ici, il ne reste qu'un calcul sur une somme.

C. Par la formule du binôme, elle vaut $\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = 1$.

Juste.

C'est la formule du binôme de première année, avec l'exposant $n-1$.

Indice 1

Compare cette somme au développement de $(a+b)^{n-1}$.

Indice 2

Que vaut $p + (1-p)$?

Correction

La somme est le développement de $(a+b)^{n-1}$ par la formule du binôme, avec $a = p$ et $b = 1-p$. Elle vaut donc $\big(p + (1-p)\big)^{n-1} = 1^{n-1} = 1$. D'où $E(X) = np$.

Variance et rédaction

Propriété : Variance d'une loi binomiale

Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration

Idée de la preuve. On calcule d'abord la somme $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,p(X=k)$, comme pour l'espérance : pour $n \geq 2$ et $2 \leq k \leq n$, on a $k(k-1)\,C_n^k = n(n-1)\,C_{n-2}^{k-2}$, et la formule du binôme donne $n(n-1)p^2$. On en déduit $E(X^2) = n(n-1)p^2 + np$, en ajoutant $E(X) = np$ (« Espérance d'une loi binomiale »). Enfin, par « Calcul pratique de la variance » : $V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$, et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ par « Variance et écart-type ».

Étapes omises : la vérification de l'identité sur les coefficients, le changement d'indice, et le cas $n = 1$, où $V(X) = p(1-p)$ se calcule directement.

Exemple : Contre-exemple : sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 noires, indiscernables au toucher. On en tire au hasard deux successivement, sans remise ; X est le nombre de rouges. On trouve $p(X=0) = \dfrac{1}{10}$, $p(X=1) = \dfrac{3}{5}$ et $p(X=2) = \dfrac{3}{10}$.

Ce n'est pas la loi $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{3}{5}\right)$, qui donnerait $p(X=2) = \dfrac{9}{25}$. L'espérance vaut ici $\dfrac{6}{5} = 2 \times \dfrac{3}{5}$, mais la variance vaut $\dfrac{9}{25}$, et non $2 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{12}{25}$.

Sans indépendance, les formules de la loi binomiale ne s'appliquent pas.

Méthode : montrer qu'une variable suit une loi binomiale

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules bleues, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule, on note sa couleur et on la remet, pour cinq tirages en tout. X est le nombre de boules blanches. **Montrer que** X suit une loi binomiale, puis donner $E(X)$ et $V(X)$.

1. **L'épreuve et le succès.** Un tirage ; succès : « blanche ». Les boules sont indiscernables au toucher : les six boules sont équiprobables, donc le paramètre vaut $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
2. **Le nombre et l'indépendance.** $n = 5$ tirages avec remise : identiques et indépendants.
3. **Conclure.** « X compte les succès d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\dfrac{1}{3}$: X suit la loi $\mathcal{B}\left(5, \dfrac{1}{3}\right)$. »
4. **Exploiter.** $E(X) = \dfrac{5}{3}$ et $V(X) = 5 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{9}$.

Exemple : Exemple guidé : au moins un succès

Avec la même urne, calcule la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

1. **Passer au contraire.** Le contraire de $(X \geq 1)$ est $(X = 0)$: aucune blanche.

2. **Calculer.** $p(X=0) = C_5^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$.
3. **Conclure.** $p(X \geq 1) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$.

Additionner $p(X=1)$ jusqu'à $p(X=5)$ donnerait le même résultat, avec cinq calculs au lieu d'un.

À toi de jouer

Vérifie : Au moins un six

Tu lances n fois un dé équilibré à six faces. Quelle expression donne la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

A. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Juste.

Le contraire est « aucun 6 », de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

B. $\frac{n}{6}$

Faux.

Pour $n = 7$, on obtiendrait $\frac{7}{6} > 1$: ce n'est pas une probabilité. On n'additionne pas les chances des lancers.

C. $1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n$

Faux.

$\left(\frac{1}{6}\right)^n$ est la probabilité d'obtenir 6 à **tous** les lancers, pas d'en obtenir aucun.

D. $n \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$

Faux.

C'est la probabilité d'obtenir **exactement** un 6 : il manque les cas à deux 6 ou plus.

Indice 1

Le nombre de 6 suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.

Indice 2

Quel est le contraire de « au moins un 6 » ?

Correction

Les lancers sont indépendants : le nombre X de 6 suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$. Le contraire de $(X \geq 1)$ est $(X = 0)$, de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Par la règle du contraire, $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Pour $n = 2$, cela donne $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

À toi : des graines qui germent

Une graine germe avec la probabilité $\frac{4}{5}$, indépendamment des autres. Tu sèmes six graines ; X est le nombre de graines qui germent. Montre que X suit une loi binomiale. Calcule $E(X)$, $V(X)$, puis la probabilité qu'au moins une graine germe.

Indice 1

L'épreuve est le sort d'une graine ; le succès est « elle germe ».

Indice 2

Pour « au moins une », passe par le contraire : aucune ne germe.

Réponse

L'épreuve est le sort d'une graine ; le succès est « la graine germe », de paramètre $p = \frac{4}{5}$. Les six graines germent indépendamment : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 6 et $\frac{4}{5}$. Donc X suit la loi $\mathcal{B}\left(6, \frac{4}{5}\right)$.

$E(X) = 6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$ et $V(X) = 6 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{24}{25}$.

Le contraire de $(X \geq 1)$ est $(X = 0)$, et $p(X = 0) = \left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{15625}$. Donc $p(X \geq 1) = 1 - \frac{1}{15625} = \frac{15624}{15625}$.

Fonction de répartition

Cumuler les probabilités

Devine : Au plus un point

À un jeu de fléchettes, Salma marque X points, de loi :

x_i	-1	0	2	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Quelle est la probabilité qu'elle marque au plus 1 point ?

A. $\frac{1}{2}$

Juste.

Les valeurs inférieures ou égales à 1 sont -1 et 0 : $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

B. 0

Faux.

La valeur 1 n'est pas prise, mais « au plus 1 » contient aussi -1 et 0.

C. $\frac{3}{4}$

Faux.
Tu as ajouté $p(X = 2)$. Or $2 > 1$: cette valeur dépasse 1.

D. $\frac{1}{3}$
Faux.
C'est $p(X = 0)$ seul : la valeur -1 est aussi inférieure à 1.

Indice 1
« Au plus 1 » signifie $X \leq 1$.
Indice 2
Quelles valeurs de X sont inférieures ou égales à 1 ?

Correction
L'événement $(X \leq 1)$ est réalisé quand X vaut -1 ou 0. Donc $p(X \leq 1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. On a **cumulé** les probabilités des valeurs atteintes jusqu'à 1.

Définition : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. La **fonction de répartition** de X est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = p(X \leq x).$$

Exemple : quelques valeurs de F

Avec la loi de l'activité, note F la fonction de répartition de X.

- $F(-3) = p(X \leq -3) = 0$: aucune valeur n'est inférieure ou égale à -3.
- $F(0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, et aussi $F(1) = \frac{1}{2}$.
- $F(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, et $F(10) = 1$.

F ne change qu'en -1, 0, 2 et 5. **Pourquoi est-ce vrai ?** Entre deux valeurs de X, on ne cumule rien de nouveau.

Une fonction en escalier

Propriété : Expression et propriétés de la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, avec $p_i = p(X = x_i)$, et F sa fonction de répartition.

1. Si $x < x_1$, alors $F(x) = 0$; si $x \geq x_m$, alors $F(x) = 1$.

2. Pour $1 \leq i \leq m-1$ et $x_i \leq x < x_{i+1}$: $F(x) = p_1 + p_2 + \cdots + p_i$.
3. F est croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, et constante sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $[x_i, x_{i+1}[$ et $[x_m, +\infty[$: c'est une fonction en escalier.

Démonstration

Étape 1. Soit x un réel. L'événement $(X \leq x)$ est réalisé exactement quand X prend une valeur x_i telle que $x_i \leq x$. Par « Somme des probabilités d'une loi », $F(x)$ est la somme des p_i pour ces indices, et vaut 0 s'il n'y en a aucun.

Étape 2. Si $x < x_1$, aucun indice ne convient : $F(x) = 0$. Si $x_i \leq x < x_{i+1}$, les indices qui conviennent sont $1, \ldots, i$. Si $x \geq x_m$, tous conviennent : $F(x) = 1$.

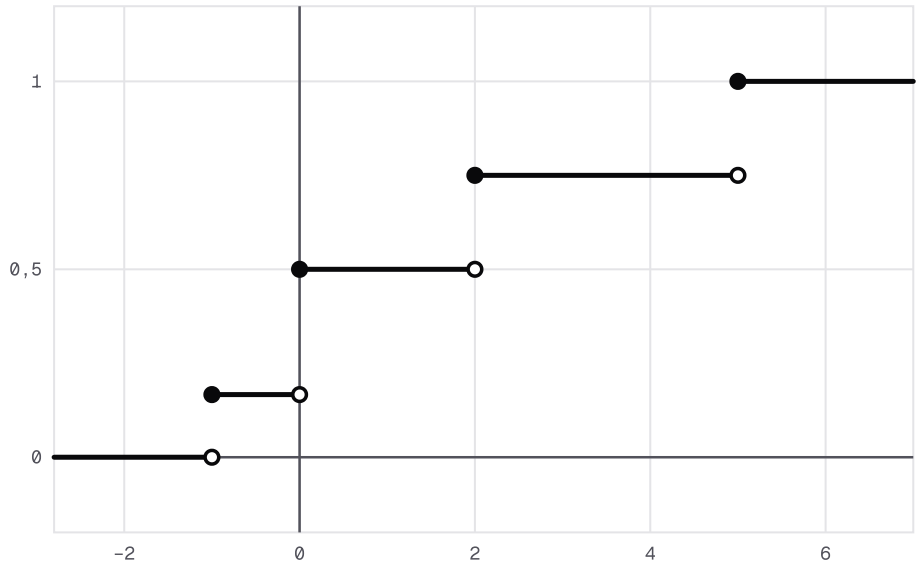
Étape 3. Si $x \leq y$, tout indice retenu pour x l'est aussi pour y ; les p_i étant positifs, $F(x) \leq F(y)$. Enfin, $0 \leq F(x) \leq 1$ par « Règles de calcul des probabilités » (point 1). La constance sur chaque intervalle découle de l'étape 2.

Exemple : F en tableau par intervalles

Les valeurs $-1 < 0 < 2 < 5$ découpent $\mathbb{R}$ en cinq intervalles, fermés à gauche :

x	$]-\infty, -1[$	$[-1, 0[$	$[0, 2[$	$[2, 5[$	$[5, +\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Chaque saut vaut une probabilité : en 2, F passe de $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{4}$, et $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = p(X=2)$. **Pourquoi est-ce vrai** en général ? Ce qu'on ajoute en x_i, c'est exactement $p(X = x_i)$.



$y = F(x)$ ● Point du graphe ○ Point exclu du graphe

Fonction de répartition F de la loi de l'activité : nulle avant −1, elle saute de 1/6 en −1, de 1/3 en 0, de 1/4 en 2 et de 1/4 en 5, puis vaut 1. Chaque palier est fermé à gauche.

Borne exclue en x = −1 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0.

Borne exclue en x = 0 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,166667.

Borne exclue en x = 2 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,5.

Borne exclue en x = 5 : point creux à l'ordonnée estimée ≈ 0,75.

Propriété : Probabilités calculées avec la fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire de valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ et F sa fonction de répartition.

1. Pour tous réels a et b tels que $a < b$: $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ et $p(X > a) = 1 - F(a)$.
2. $p(X = x_1) = F(x_1)$ et, pour $2 \leq i \leq m$, $p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Démonstration

Étape 1. Soient $a < b$. L'événement $(X \leq b)$ est la réunion des événements incompatibles $(X \leq a)$ et $(a < X \leq b)$. Par « Règles de calcul des probabilités » (point 2), $F(b) = F(a) + p(a < X \leq b)$.

Étape 2. $(X > a)$ est l'événement contraire de $(X \leq a)$: par le point 3 des mêmes règles, $p(X > a) = 1 - F(a)$.

Étape 3. Par « Expression et propriétés de la fonction de répartition », $F(x_1) = p(X = x_1)$: point 2 avec $i = 1$ si $m \geq 2$; point 1 si $m = 1$, car alors $p(X = x_1) = 1$. Pour $2 \leq i \leq m$, l'étape 1 avec $a = x_{i-1}$ et $b = x_i$ donne $F(x_i) - F(x_{i-1}) = p(x_{i-1} < X \leq x_i)$. Comme X ne prend aucune valeur strictement entre x_{i-1} et x_i, cet événement est $(X = x_i)$.

À retenir : Ce qu'il faut retenir de la preuve

Tout repose sur un découpage.

- $F(x)$ est la somme des p_i pour les valeurs $x_i \leq x$: on regroupe les issues par valeur.
- Pour $a < b$, l'événement $(X \leq b)$ se coupe en deux morceaux incompatibles, $(X \leq a)$ et $(a < X \leq b)$.
- Entre deux valeurs consécutives, il n'y a rien à cumuler : le saut en x_i est $p(X = x_i)$.

Vérifie : Le dernier argument

Dans la preuve de « Probabilités calculées avec la fonction de répartition », on écrit $(x_{i-1} < X \leq x_i) = (X = x_i)$. Pourquoi ?

A. Parce que F est croissante.

Faux.

La croissance compare des valeurs de F ; elle ne dit rien de l'événement.

B. Parce que $F(x_i) - F(x_{i-1}) \geq 0$.

Faux.

C'est vrai, mais c'est une conséquence, pas la raison de l'égalité des événements.

C. Parce que $x_i - x_{i-1} = 1$.

Faux.

Les valeurs ne sont pas forcément des entiers consécutifs : dans l'exemple, $5 - 2 = 3$.

D. Parce que X ne prend aucune valeur strictement entre x_{i-1} et x_i.

Juste.

Les valeurs sont rangées : la seule valeur de X dans $]x_{i-1}, x_i]$ est x_i.

Indice 1

Quelles valeurs de X appartiennent à l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$?

Indice 2

Les valeurs $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ sont rangées dans l'ordre croissant.

Correction

Les valeurs de X sont $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$. Dans l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$, la seule valeur de X est x_i, car aucune autre n'est strictement entre x_{i-1} et x_i. Donc l'événement $(x_{i-1} < X \leq x_i)$ est l'événement $(X = x_i)$.

Lire et rédiger

Exemple : calculer avec F

Avec le tableau de F :

- $p(0 < X \leq 5) = F(5) - F(0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

- $p(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$;
- $p(X = 0) = F(0) - F(-1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$.

On retrouve la loi : F et la loi portent la même information. Attention aux inégalités : $p(0 \leq X \leq 5)$ vaut $\dfrac{5}{6}$, pas $F(5) - F(0)$.

Attention : Inférieur ou égal, ou strictement inférieur ?

Soit Z de loi $p(Z = 1) = \dfrac{1}{5}, p(Z = 3) = \dfrac{1}{2}$ et $p(Z = 4) = \dfrac{3}{10}$, et F sa fonction de répartition. $F(3) = p(Z \leq 3)$ compte la valeur 3 elle-même : $F(3) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{10}$.

Mais $p(Z < 3)$ ne compte pas la valeur 3 : seule la valeur 1 est strictement inférieure à 3. Donc $p(Z < 3) = p(Z = 1) = F(1) = \dfrac{1}{5}$, et non $\dfrac{7}{10}$.

Dans le tableau de F, la valeur $F(3)$ se lit donc sur $[3, 4[$, intervalle qui contient sa borne gauche 3.

Méthode : déterminer la fonction de répartition

N est le nombre de piles en deux lancers indépendants d'une pièce équilibrée. **Déterminer** sa fonction de répartition F.

1. **Ranger les valeurs et écrire la loi.** N suit la loi $\mathcal{B}\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$: $p(N = 0) = \dfrac{1}{4}, p(N = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $p(N = 2) = \dfrac{1}{4}$.
2. **Découper** $\mathbb{R}$ en intervalles fermés à gauche et ouverts à droite.
3. **Cumuler** sur chaque intervalle :

x	$]-\infty, 0[$	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, +\infty[$
$F(x)$	0	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{4}$	1

4. **Contrôler et conclure.** F vaut 0 avant 0 et 1 à partir de 2. Ses sauts valent $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$: ce sont les probabilités de la loi.

Coin examen et synthèse

> **À toi : Coin examen : une urne, avec remise**
>
> Un exercice de probabilités figure dans 3 des 16 sujets consultés (2017-2022 et 2024-2025), tous de rattrapage. Il vaut alors 3 points. Ses formes : tirages avec ou sans remise, répétition d'épreuves, loi d'une variable aléatoire, espérance. La loi binomiale n'y est pas nommée : à toi de reconnaître le

schéma. Voici un exercice BURHAN de cette forme, complété par une question sur la fonction de répartition. Barème indicatif BURHAN.

Une urne contient 1 boule rouge et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement trois boules, avec remise. X est le nombre de boules rouges obtenues.

- **Q1.** Montrer que, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 3$, $p(X=k) = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}$.
- **Q2.** Déterminer la loi de X sous forme de tableau.
- **Q3.** Calculer $E(X)$.
- **Q4.** Déterminer la fonction de répartition de X, puis en déduire $p(X \geq 2)$.

Indice 1
Q1 : quelle épreuve est répétée ? Quel est le succès ? Les tirages sont-ils indépendants ?
Indice 2
Q4 : l'événement $(X \geq 2)$ est le contraire de $(X \leq 1)$.

Réponse
Q1. Un tirage est une épreuve ; succès : « la boule est rouge ». Les boules sont indiscernables au toucher : les trois boules sont équiprobables, donc le paramètre vaut $p = \frac{1}{3}$. Les 3 tirages se font avec remise : ils sont identiques et indépendants.

C'est un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$, dont X compte les succès. La probabilité d'obtenir exactement k succès donne la formule annoncée : X suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$. **1 pt**

Q2. On applique la formule de Q1 pour k de 0 à 3 :

k	0	1	2	3
$p(X=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

Somme : $\frac{8+12+6+1}{27} = 1$. **0,75 pt**

Q3. X suit la loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$, donc $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$. **0,5 pt**

Q4. On cumule sur des intervalles fermés à gauche :

x	$]-\infty, 0[$	$[0, 1[$	$[1, 2[$	$[2, 3[$	$[3, +\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{8}{27}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{26}{27}$	1

Donc $p(X \geq 2) = 1 - F(1) = 1 - \frac{20}{27} = \frac{7}{27}$. **0,75 pt**

Total indicatif : 3 points.

Synthèse du chapitre. Tu sais maintenant enchaîner les gestes d'un exercice complet.

- **Modèle** : univers, équiprobabilité, modèle de tirage, ou épreuves indépendantes.
- **Probabilités** : contraire, réunion, conditionnelle, probabilités totales.
- **Indépendance** : elle se prouve par un calcul, jamais par l'incompatibilité.
- **Variable aléatoire** : une loi en tableau de somme 1, puis $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- **Loi binomiale** : épreuve, succès, p, n et indépendance nommés, puis $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
- **Fonction de répartition** : un tableau par intervalles fermés à gauche.

Dans chaque « montrer que », nomme l'hypothèse qui fait marcher le calcul.

SOURCES

Référentiel BURHAN du chapitre « Calcul des probabilités » (2bac · sciences-mathematiques · mathematiques)