BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Niveau examen	5

Exercice 1 3,5 pts

Un premier p et l'entier $2^p + 3^p - 5$

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$. On pose :

$$A_p = 2^p + 3^p - 5.$$

On rappelle que, si deux entiers a et b divisent un entier n et si $a \wedge b = 1$, alors $ab \mid n$. C'est une conséquence du théorème de Gauss.

1. 0,5 pts

Montre que $p \wedge 6 = 1$.

INDICE

Les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p. Il suffit donc de savoir si p divise 6.

2. 0,75 pts

Montre que $2^p \equiv 2\ [p]$ et que $3^p \equiv 3\ [p]$.

INDICE

Le petit théorème de Fermat s'applique à 2 puis à 3. Vérifie ses deux hypothèses grâce à la question 1, puis multiplie la congruence obtenue.

3. 0,5 pts

Déduis-en que $p \mid A_p$.

INDICE

Les congruences modulo p s'additionnent membre à membre.

4. 0,25 pts

Montre que $2 \mid A_p$.

INDICE

Regarde la parité de chacun des trois termes.

5. 0,5 pts

Montre que $3 \mid A_p$.

INDICE

Modulo 3, remplace 2 par -1 et souviens-toi que p est impair.

6. 0,5 pts

Déduis-en que $6 \mid A_p$, puis que $6p \mid A_p$.

INDICE

Applique deux fois le rappel de l'énoncé. Quelle primalité relative as-tu établie à la question 1 ?

7. 0,5 pts

Application. Déduis-en le reste de la division euclidienne de $2^{13}+3^{13}$ par 78.

INDICE

Vérifie d'abord que 13 satisfait les hypothèses de l'énoncé. Écris ensuite 78 sous la forme $6p$.

Exercice 2 — 4 pts

Deux congruences, modulo 43 et modulo 18

On cherche les entiers relatifs n qui vérifient le système :

$$(S) : \quad \begin{cases} n \equiv 3 \ [43] \\ n \equiv 11 \ [18] \end{cases}$$

On rappelle que $n \equiv 3 \ [43]$ équivaut à l'existence d'un entier relatif x tel que $n = 43x + 3$.

1. — 0,5 pts

Montre, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, que $43 \wedge 18 = 1$.

INDICE

Divise 43 par 18, puis chaque diviseur par le reste obtenu, jusqu'à un reste nul.

2. — 0,75 pts

Déduis-en un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $43u + 18v = 1$.

INDICE

Isole chaque reste dans les divisions de la question 1. Remonte ensuite de 1 vers 43 et 18, sans développer trop tôt.

3. — 0,5 pts

Montre que n vérifie (S) si et seulement s'il existe deux entiers relatifs x et y tels que $n = 43x + 3$ et $43x - 18y = 8$.

INDICE

Traduis chaque congruence par une égalité, comme dans le rappel de l'énoncé. Égale ensuite les deux écritures de n.

4. — 0,5 pts

Vérifie que le couple $(-40, -96)$ est une solution de l'équation $(E) : 43x - 18y = 8$.

INDICE

Multiplie par 8 l'égalité de la question 2. Fais ensuite apparaître -18 devant la seconde inconnue.

5. — 1 pts

Résous l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

INDICE

Soustrais l'égalité de la question 4 à l'équation (E), puis applique le théorème de Gauss. Son hypothèse vient de la question 1.

6. `0,5 pts`

Déduis-en que n vérifie (S) si et seulement si $n \equiv 605\ [774]$.

INDICE

Remplace x par l'expression de la question 5 dans $n = 43x + 3$. Ramène ensuite la constante entre 0 et 773 par une division euclidienne.

7. `0,25 pts`

Détermine les entiers n compris entre 3000 et 4000 qui vérifient (S).

INDICE

Écris $n = 605 + 774m$ avec m entier relatif, puis encadre m.

Exercice 3 3,5 pts

Les diviseurs premiers de a² + a + 1

Soit a un entier naturel non nul. On pose $n = a^2 + a + 1$, et l'on considère un nombre premier p tel que $p \mid n$.

On rappelle que :

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1).$$

1. 0,25 pts

Vérifie que $n \times 1 + a \times (-a - 1) = 1$. Déduis-en que $a \wedge n = 1$.

INDICE

Développe le membre de gauche. Pour la conclusion, pense au théorème de Bézout.

2. 0,25 pts

Déduis-en que $p \nmid a$.

INDICE

Raisonne par l'absurde : un diviseur commun de deux entiers divise leur PGCD.

3. 0,5 pts

Montre que $a^3 \equiv 1\ [p]$.

INDICE

Utilise l'égalité rappelée dans l'énoncé, avec l'hypothèse $p \mid n$.

4. 0,25 pts

Justifie que $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

INDICE

Quel théorème donne cette congruence ? Cite ses deux hypothèses avant de l'appliquer.

5. 0,5 pts

Dans les questions 5 et 6, on suppose que $p \equiv 2\ [3]$. Montre que $a \equiv 1\ [p]$.

INDICE

Divise $p - 1$ par 3 et écris a^{p-1} à l'aide de a^3. Combine ensuite les questions 3 et 4.

6. 0,5 pts

Déduis-en que $p \mid 3$. Conclus que l'hypothèse $p \equiv 2\ [3]$ est impossible.

INDICE

Calcule n modulo p avec la question 5, puis souviens-toi que $p \mid n$.

7. 0,5 pts

Déduis-en que $p = 3$ ou $p \equiv 1\ [3]$.

INDICE

Écris la division euclidienne de p par 3 et examine les trois restes possibles un par un.

8. 0,75 pts

Application. Décompose $931 = 30^2 + 30 + 1$ en produit de facteurs premiers, et vérifie le résultat de la question 7.

Montre ensuite que, pour tout entier naturel non nul a, l'entier $a^2 + a + 1$ n'est divisible ni par 5, ni par 11.

INDICE

Teste les petits premiers sur 931. Pour la seconde partie, cherche le reste de 5 et de 11 dans la division par 3.

Exercice 4 3,5 pts

Les entiers dont le carré est congru à 1

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$.

On rappelle que, si p est premier et si p ne divise pas un entier m, alors $p \wedge m = 1$.

On rappelle aussi le théorème de Gauss : si $c \mid ab$ et $c \wedge a = 1$, alors $c \mid b$.

1. 0,25 pts

Soit x un entier tel que $x^2 \equiv 1\ [p]$. Montre que p divise $(x-1)(x+1)$.

INDICE

Traduis la congruence par une divisibilité, puis factorise $x^2 - 1$.

2. 0,75 pts

Déduis-en que $x \equiv 1\ [p]$ ou $x \equiv -1\ [p]$.

INDICE

Distingue deux cas, selon que p divise $x - 1$ ou non. Dans le second cas, utilise les deux rappels de l'énoncé.

3. 0,5 pts

Montre la réciproque : si $x \equiv 1\ [p]$ ou $x \equiv -1\ [p]$, alors $x^2 \equiv 1\ [p]$. Montre ensuite que 1 et -1 ne sont pas congrus modulo p.

INDICE

Élève chaque congruence au carré. Pour la seconde partie, calcule $1 - (-1)$ et utilise $p \geq 3$.

4. 0,5 pts

Soit a un entier tel que $p \nmid a$. Montre que $a \times a^{p-2} \equiv 1\ [p]$: l'entier a^{p-2} est un inverse de a modulo p.

INDICE

Vérifie que $p - 2 \geq 1$, puis applique le petit théorème de Fermat en citant ses deux hypothèses.

5. 0,5 pts

Avec l'entier a de la question 4, montre que $a^{p-2} \equiv a\ [p]$ si et seulement si $a \equiv 1\ [p]$ ou $a \equiv -1\ [p]$.

INDICE

Dans un sens, multiplie par a et utilise la question 4. Dans l'autre, remarque que $p - 2$ est impair.

6. 0,5 pts

Application. Décompose 253 en produit de facteurs premiers.

Montre que, pour tout entier x : $x^2 \equiv 1\ [253]$ si et seulement si $x^2 \equiv 1\ [11]$ et $x^2 \equiv 1\ [23]$.

INDICE

Teste les premiers 2, 3, 5, 7 et 11. Pour la réciproque, pense à la conséquence du théorème de Gauss sur deux diviseurs premiers entre eux.

7. `0,5 pts`

Déduis-en que l'équation $x^2 \equiv 1\ [253]$ a exactement quatre solutions x telles que $0 \leq x \leq 252$. Vérifie que 45 et 208 en font partie.

INDICE

Modulo 11 comme modulo 23, l'entier x est congru à 1 ou à -1 : cela fait quatre cas. Montre que chaque cas a au plus une solution entre 0 et 252.

Exercice 5 3,5 pts

La somme et le PPCM de deux entiers

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $d = a \wedge b$ et $m = a \vee b$. Comme d divise a et b, on écrit $a = da_1$ et $b = db_1$, où a_1 et b_1 sont des entiers naturels non nuls.

On rappelle que $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$.

On rappelle aussi l'identité de Bézout : il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = a \wedge b$.

1. 0,5 pts

Montre que $a_1 \wedge b_1 = 1$, puis que $m = da_1b_1$.

INDICE

Divise par d l'égalité de Bézout du rappel. Pour m, utilise le premier rappel.

2. 0,75 pts

Montre que $(a_1 + b_1) \wedge a_1b_1 = 1$.

INDICE

Raisonne par l'absurde avec un diviseur premier de ce PGCD. Un premier qui divise a_1b_1 divise a_1 ou b_1 .

3. 0,5 pts

Déduis-en que $(a + b) \wedge m = d$, puis que $a_1 + b_1 = \dfrac{a+b}{d}$ et $a_1b_1 = \dfrac{m}{d}$.

INDICE

Écris une égalité de Bézout pour $a_1 + b_1$ et a_1b_1, puis multiplie-la par d.

4. 0,25 pts

Application. On cherche les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = 96$ et $a \vee b = 180$.

Calcule $96 \wedge 180$ par l'algorithme d'Euclide.

INDICE

Divise 180 par 96, puis chaque diviseur par le reste obtenu.

5. 0,5 pts

Déduis-en tous les couples (a, b) cherchés à la question 4.

INDICE

Avec la question 3, calcule d, $a_1 + b_1$ et a_1b_1. Cherche ensuite a_1 parmi les diviseurs positifs de a_1b_1, sans oublier la réciproque.

6. 0,5 pts

Montre qu'il n'existe aucun couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = 100$ et $a \vee b = 150$.

INDICE

Procède comme aux questions 4 et 5, puis compare les valeurs obtenues pour $a_1 + b_1$ et pour $a_1 b_1$.

7. 0,5 pts

Soit p un nombre premier. Détermine les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = p(p + 1)$ et $a \vee b = p^2$.

INDICE

Un diviseur commun à $p(p + 1)$ et à p^2 divise leur différence. Les diviseurs positifs de p sont 1 et p.