BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, entraînement

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/entrainement

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Entraînement	8

Exercice 1

Carrés modulo 7

1.

Recopie et complète le tableau des restes de x^2 dans la division par 7, selon le reste r de l'entier x dans la division par 7.

r	0	1	2	3	4	5	6
reste de x^2	?	?	?	?	?	?	?

INDICE

Si $x \equiv r\ [7]$, alors $x^2 \equiv r^2\ [7]$. Il suffit donc de calculer les sept carrés r^2, puis de les réduire modulo 7.

2.

Montre que, pour tout entier relatif n, l'entier $n^2 + 4$ n'est pas divisible par 7.

INDICE

Raisonne par l'absurde : si $7 \mid n^2 + 4$, à quoi serait congru n^2 modulo 7 ? Compare avec le tableau.

3.

Soient x et y deux entiers relatifs tels que $7 \mid x^2 + y^2$. Montre que $7 \mid x$ et $7 \mid y$.

INDICE

Les restes de x^2 et de y^2 sont pris dans $\{0, 1, 2, 4\}$. Dresse le tableau de leurs sommes modulo 7 et repère les cases nulles.

4.

Déduis-en que l'équation $x^2 + y^2 = 77$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

INDICE

Suppose qu'un couple (x, y) convient et applique la question 3. Écris ensuite $x = 7x'$ et $y = 7y'$, et remplace dans l'équation.

Exercice 2

Deux preuves pour une divisibilité par 11

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 5^{2n+1} + 2 \times 3^{n+1}$.

1.

Calcule u_0, u_1 et u_2, puis vérifie que chacun est divisible par 11.

INDICE

Remplace n par 0, 1 et 2 dans les exposants $2n+1$ et $n+1$ avant de calculer les puissances.

2.

Montre que $u_{n+1} = 25u_n - 44 \times 3^{n+1}$ pour tout entier naturel n. Démontre ensuite par récurrence que $11 \mid u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INDICE

Écris $5^{2n+3} = 25 \times 5^{2n+1}$, puis remplace 5^{2n+1} par $u_n - 2 \times 3^{n+1}$. Pour l'hérédité, remarque que $44 = 4 \times 11$.

3.

Démontre le même résultat sans récurrence, à l'aide des congruences modulo 11.

INDICE

Réduis d'abord 25 modulo 11. Écris ensuite $5^{2n+1} = 5 \times 25^n$ et $2 \times 3^{n+1} = 6 \times 3^n$.

4.

Montre que, pour tout entier naturel n, le reste de u_n dans la division euclidienne par 3 est 2.

INDICE

Modulo 3, le terme $2 \times 3^{n+1}$ disparaît. Réduis ensuite 5 et 25 modulo 3.

Exercice 3

Quand le plus petit diviseur premier est grand

Soit n un entier naturel composé et p son plus petit diviseur premier. On pose $m = \dfrac{n}{p}$; c'est un entier naturel, car $p \mid n$.

1.

Montre que $m \geq 2$, puis que $m \geq p$.

INDICE

Pour $m \geq 2$, raisonne par l'absurde sur le cas $m = 1$. Pour la seconde inégalité, m est un diviseur de n au moins égal à 2 : compare-le au plus petit d'entre eux.

2.

On suppose dans cette question que m est composé, et on note p' le plus petit diviseur premier de m. Montre que $p' \geq p$, puis que $n \geq p^3$.

INDICE

Un diviseur de m est aussi un diviseur de n. Pour la seconde partie, un entier composé est au moins égal au carré de son plus petit diviseur premier.

3.

Déduis-en que, si $p^3 > n$, alors m est un nombre premier.

INDICE

Raisonne par l'absurde à partir de la question 2, sans oublier que $m \geq 2$.

4.

Application : détermine le plus petit diviseur premier p de 323 et vérifie que $p^3 > 323$. Que peux-tu en conclure pour le quotient $\dfrac{323}{p}$?

INDICE

Teste les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ dans l'ordre, jusqu'au premier qui divise 323. Vérifie aussi que 323 est composé.

Exercice 4

Le PGCD de 3n + 11 et n + 2

Pour tout entier naturel n, on pose $a = 3n + 11$ et $b = n + 2$.

1.

Montre que tout diviseur commun à a et b divise 5. Déduis-en que $a \wedge b$ vaut 1 ou 5.

INDICE

Cherche une combinaison $a - kb$, avec k entier, dans laquelle n disparaît. Un diviseur commun à deux entiers divise toute combinaison de ces entiers.

2.

Montre que $a \wedge b = 5$ si et seulement si $n \equiv 3\ [5]$.

INDICE

Si $a \wedge b = 5$, alors 5 divise $b = n + 2$. Pour la réciproque, calcule a et b modulo 5 lorsque $n \equiv 3\ [5]$.

3.

On suppose $n \equiv 3\ [5]$ et on écrit $n = 5k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$. Exprime a et b en fonction de k, puis montre que $3k + 4$ et $k + 1$ sont premiers entre eux.

INDICE

Factorise 5 dans a et dans b. Pour la primalité relative, cherche une combinaison de $3k + 4$ et de $k + 1$ égale à 1.

4.

Toujours pour $n = 5k + 3$, exprime $a \vee b$ en fonction de k. Vérifie ta formule pour $n = 8$.

INDICE

Utilise la relation entre le produit ab, le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels non nuls. Les écritures de la question 3 redonnent le PGCD.

5.

Pour $n = 6$, justifie que $a \wedge b = 1$, puis trouve par l'algorithme d'Euclide un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $au + bv = 1$.

INDICE

Ici $a = 29$ et $b = 8$, et 6 n'est pas congru à 3 modulo 5. Écris les divisions successives, puis remonte-les en isolant chaque reste.

Exercice 5

250 dattes en boîtes de 13 et de 8

Une coopérative conditionne exactement 250 dattes dans des boîtes de 13 et des boîtes de 8, toutes pleines. On note x le nombre de boîtes de 13 et y celui des boîtes de 8. On étudie d'abord, dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $13x + 8y = 250$.

1.

Justifie que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$, puis vérifie que le couple $(2, 28)$ en est une.

INDICE

Calcule $13 \wedge 8$, par exemple avec l'algorithme d'Euclide, et regarde s'il divise le second membre.

2.

Montre, à l'aide du théorème de Gauss, que les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$ sont les couples $(2 + 8k,\ 28 - 13k)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

INDICE

Soustrais membre à membre $13x + 8y = 250$ et $13 \times 2 + 8 \times 28 = 250$, puis regroupe pour obtenir $13(x - 2) = 8(28 - y)$.

3.

Détermine toutes les façons de conditionner les 250 dattes.

INDICE

Ici, x et y sont des entiers naturels. Écris les deux inégalités $2 + 8k \geq 0$ et $28 - 13k \geq 0$, puis encadre l'entier k.

4.

Quelle façon utilise le moins de boîtes ? Justifie.

INDICE

Exprime le nombre total de boîtes $x + y$ en fonction de k, puis regarde comment il varie quand k augmente.

Exercice 6

Inverser 10 modulo 37

1.

Montre que $10 \wedge 37 = 1$ et trouve un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $10u + 37v = 1$.

INDICE

Applique l'algorithme d'Euclide à 37 et 10. Remonte ensuite les divisions à partir du dernier reste non nul, en isolant chaque reste.

2.

Déduis-en que $\overline{10}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$, et donne son inverse sous la forme $\overline{r}$, avec $0 \leq r \leq 36$.

INDICE

Lis l'égalité de la question 1 modulo 37 : le terme $37v$ disparaît. Ramène ensuite -11 entre 0 et 36.

3.

Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation $10x \equiv 7\ [37]$.

INDICE

Multiplie les deux membres par 26. Le point délicat : justifie que l'équation obtenue est équivalente à la première, dans les deux sens.

4.

Montre que, dans $\mathbb{Z}/38\mathbb{Z}$, l'équation $\overline{10} \times x = \overline{7}$ n'a aucune solution. Quelle hypothèse a changé par rapport à la question 3 ?

INDICE

Calcule $10 \wedge 38$. Si une classe $\overline{c}$ convenait, quel entier diviserait à la fois 38 et $10c - 7$?

Exercice 7

42 divise $n^7 - n$

Soit n un entier relatif. On veut montrer que 42 divise $n^7 - n$, en remarquant que $42 = 2 \times 3 \times 7$.

1.

Montre que $7 \mid n^7 - n$.

INDICE

Utilise la forme du petit théorème de Fermat qui ne demande aucune hypothèse sur n. Il reste seulement à vérifier que 7 est premier.

2.

Montre que $3 \mid n^7 - n$.

INDICE

Applique le petit théorème de Fermat avec $p = 3$, puis écris n^7 à l'aide de n^3.

3.

Montre que $2 \mid n^7 - n$.

INDICE

Distingue deux cas, selon la parité de n, et calcule n^7 modulo 2 dans chaque cas.

4.

Déduis-en que $42 \mid n^7 - n$. Nomme précisément la propriété utilisée et vérifie ses hypothèses.

INDICE

Utilise la conséquence du théorème de Gauss sur deux diviseurs premiers entre eux, en deux temps : d'abord avec 2 et 3, puis avec 6 et 7.

5.

Application : donne le reste de 13^7 dans la division euclidienne par 42.

INDICE

D'après la question 4, $13^7 - 13$ est un multiple de 42. Pense ensuite à l'encadrement du reste.

Exercice 8

Critères de divisibilité en base huit

Soit $N = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}^{(8)}$ un entier naturel écrit en base 8. Ses chiffres vérifient $0 \leq a_i \leq 7$, et $N = a_k 8^k + \dots + a_1 \times 8 + a_0$.

1.

Montre que, pour tout entier naturel i, on a $8^i \equiv 1\ [7]$ et $8^i \equiv (-1)^i\ [9]$.

INDICE

Écris d'abord 8 modulo 7 et modulo 9, puis élève à la puissance i.

2.

Déduis-en que $N \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_k\ [7]$. Énonce un critère de divisibilité par 7 d'un entier écrit en base 8.

INDICE

Remplace chaque 8^i par 1 dans l'écriture de N, en utilisant la compatibilité des congruences avec la somme et le produit.

3.

Montre de même que $N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k\ [9]$.

INDICE

Cette fois, chaque 8^i se remplace par $(-1)^i$: regarde le signe obtenu pour i pair et pour i impair.

4.

Soit $M = \overline{53627}^{(8)}$. Sans convertir M en base dix, donne les restes de M dans les divisions euclidiennes par 7 et par 9. Contrôle ensuite en convertissant.

INDICE

Lis les chiffres de droite à gauche : $a_0 = 7$, $a_1 = 2$, et ainsi de suite. Réduis ensuite les sommes obtenues pour arriver à des restes encadrés.

5.

Détermine le chiffre c de la base 8 tel que l'entier $\overline{4c15}^{(8)}$ soit divisible par 7.

INDICE

Applique le critère de la question 2. N'oublie pas que c est un chiffre de la base 8 : $0 \leq c \leq 7$.