BURHAN

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: exercices, application

2ème Année Baccalauréat · Sciences Mathématiques · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-mathematiques/mathematiques/arithmetique-dans-z/exercices/application

Chapitre	Palier	Exercices
Arithmétique dans $\mathbb{Z}$	Application	11

Exercice 1

Un écart de carrés et un reste négatif

1.

Montre que, pour tout entier relatif n, l'entier $(n+3)^2-(n-4)^2$ est un multiple de 7.

INDICE

Reconnais une différence de deux carrés : $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Calcule d'abord $A-B$ avec $A=n+3$ et $B=n-4$.

2.

Écris la division euclidienne de -250 par 9. Précise le quotient et le reste.

INDICE

Divise d'abord 250 par 9, puis change les signes. Le point délicat : le reste doit vérifier $0\leq r<9$. S'il sort négatif, il faut encore ajuster le quotient.

3.

Détermine les entiers naturels n tels que $n+2$ divise $3n+17$.

INDICE

Écris $3n+17$ sous la forme $3(n+2)+c$, avec un entier c à trouver. Un diviseur commun à deux entiers divise toute combinaison de ces deux entiers.

Exercice 2

Les puissances de 5 modulo 13

1.

Recopie et complète le tableau des restes de 5^k dans la division euclidienne par 13.

k	1	2	3	4
reste de 5^k	?	?	?	?

INDICE

Ne calcule jamais 5^k en entier : multiplie le reste précédent par 5, puis réduis le produit modulo 13.

2.

Déduis-en le reste de la division euclidienne de 5^{2026} par 13.

INDICE

Le cycle a pour longueur 4, car $5^4 \equiv 1\ [13]$. Écris la division euclidienne de l'exposant 2026 par 4.

3.

Montre que, pour tout entier naturel n, l'entier $5^{4n+3} + 5$ est divisible par 13.

INDICE

Écris $5^{4n+3} = \left(5^4\right)^n \times 5^3$ et utilise le tableau de la question 1.

4.

Quel est le reste de 18^{2026} dans la division euclidienne par 13 ?

INDICE

Cherche un entier plus simple qui soit congru à 18 modulo 13.

Exercice 3

383 et 1147 : premier ou composé ?

1.

Montre que 383 est un nombre premier.

INDICE

Liste d'abord les nombres premiers p tels que $p^2 \leq 383$: compare 383 aux carrés 17^2, 19^2 et 23^2. Teste ensuite chacun de ces premiers.

2.

Détermine le plus petit diviseur premier de 1147.

INDICE

Teste les nombres premiers dans l'ordre croissant : le premier qui divise 1147 est son plus petit diviseur premier. Tu n'iras pas au-delà des premiers p tels que $p^2 \leq 1147$.

3.

Déduis-en que 1147 est composé, puis montre que 1147 est le produit de deux nombres premiers.

INDICE

Écris le quotient de 1147 par 31. Pour savoir si ce quotient est premier, il suffit de tester les premiers p dont le carré ne le dépasse pas.

Exercice 4

L'algorithme d'Euclide pour 1716 et 1001

1.

Calcule $1716 \wedge 1001$ par l'algorithme d'Euclide. Présente les divisions successives dans un tableau.

INDICE

Divise 1716 par 1001, puis 1001 par le reste obtenu, et continue tant que le reste n'est pas nul. Sur chaque ligne, le reste est strictement inférieur au diviseur.

2.

Déduis-en $1716 \vee 1001$.

INDICE

Pour deux entiers naturels non nuls, le produit de leur PGCD par leur PPCM est égal au produit des deux entiers. Simplifie avant de multiplier.

3.

Écris la fraction $\dfrac{1001}{1716}$ sous forme irréductible.

INDICE

Divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD. Justifie ensuite que les deux quotients obtenus sont premiers entre eux.

Exercice 5

Un couple de Bézout pour 157 et 68

1.

Applique l'algorithme d'Euclide à 157 et 68. Que vaut $157 \wedge 68$?

INDICE

Enchaîne les divisions euclidiennes jusqu'à obtenir un reste nul. Écris chaque division avec son reste encadré.

2.

Remonte les divisions de la question 1 pour obtenir un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $157u + 68v = 1$. Vérifie ton résultat.

INDICE

Pars de la dernière division utile : $1 = 21 - 4 \times 5$. Remplace ensuite 5 par son expression tirée de la ligne au-dessus. Garde 21, 68 et 157 comme des « briques », sans effectuer les produits.

3.

Soit n un entier naturel. Montre que $3n + 5$ et $2n + 3$ sont premiers entre eux.

INDICE

Cherche des entiers u et v, indépendants de n, tels que les termes en n s'éliminent dans $u(3n + 5) + v(2n + 3)$.

Exercice 6

Gauss, avec et sans son hypothèse

1.

Soit n un entier relatif tel que $9 \mid 14n$. Montre que $9 \mid n$.

INDICE

Pense au théorème de Gauss. Avant de l'appliquer, prouve que 9 et 14 sont premiers entre eux, par exemple avec une combinaison égale à 1.

2.

Un élève écrit : « 6 divise 4×9, donc 6 divise 9. » Montre que sa conclusion est fausse et indique l'hypothèse du théorème de Gauss qui n'est pas vérifiée.

INDICE

Calcule 4×9 et regarde sa divisibilité par 6. Calcule ensuite le PGCD de 6 et de 4.

3.

Détermine tous les couples (x, y) d'entiers relatifs tels que $9x = 14y$.

INDICE

L'égalité montre que 9 divise $14y$. La question 1 te dit ce que tu peux en conclure pour y. N'oublie pas de vérifier la réciproque.

Exercice 7

1260 et 1350 décomposés

1.

Décompose 1260 et 1350 en produits de facteurs premiers.

INDICE

Divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles : 2, puis 3, puis 5, puis 7.

2.

Combien l'entier 1260 a-t-il de diviseurs positifs ?

INDICE

Un diviseur positif de 1260 s'écrit $2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \times 7^{\beta_4}$. Compte les valeurs possibles de chaque exposant, sans oublier la valeur 0.

3.

Calcule $1260 \wedge 1350$ et $1260 \vee 1350$ à l'aide des décompositions, puis contrôle tes résultats.

INDICE

Écris les deux décompositions avec les mêmes nombres premiers $2, 3, 5, 7$, en acceptant des exposants nuls. Le PGCD prend le plus petit exposant de chaque premier, le PPCM le plus grand.

4.

Quel est le plus petit entier naturel non nul k tel que $1260k$ soit le carré d'un entier ?

INDICE

Par l'unicité de la décomposition, un entier naturel non nul est un carré exactement quand tous les exposants de sa décomposition sont pairs. Repère les exposants impairs de 1260.

Exercice 8

La table de multiplication modulo 10

1.

Dresse la table de multiplication de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

INDICE

Dans la case de la ligne $\overline{a}$ et de la colonne $\overline{b}$, calcule ab, puis prends son reste dans la division par 10. La table est symétrique : la moitié des cases suffit.

2.

Lis dans la table les classes inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et donne l'inverse de chacune. Contrôle avec la caractérisation par le PGCD.

INDICE

Une classe $\overline{a}$ est inversible lorsque sa ligne contient la classe $\overline{1}$. Pour le contrôle, calcule $a \wedge 10$ pour chaque a de 0 à 9.

3.

Résous dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{3} \times x = \overline{7}$.

INDICE

Multiplie les deux membres par l'inverse de $\overline{3}$ trouvé à la question 2. Vérifie ensuite la classe obtenue.

4.

Explique, à l'aide de la table, pourquoi l'équation $\overline{2} \times x = \overline{5}$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Prouve-le ensuite sans la table.

INDICE

Regarde quelles classes apparaissent sur la ligne de $\overline{2}$. Pour une preuve sans la table, cherche un diviseur commun à 2 et à 10.

Exercice 9

Fermat pour une puissance de 7 modulo 11

1.

Justifie que $7^{10} \equiv 1\ [11]$, sans calculer 7^{10}.

INDICE

Pense au petit théorème de Fermat avec $p = 11$ et $a = 7$. Écris ses deux hypothèses et vérifie-les une à une.

2.

Déduis-en le reste de 7^{2025} dans la division euclidienne par 11.

INDICE

Réduis l'exposant modulo $p - 1 = 10$: écris $2025 = 10q + r$, avec $0 \leq r < 10$. Il te restera à calculer 7^r modulo 11 par petites étapes.

3.

Montre que 11 divise $7^{2025} + 1$.

INDICE

Utilise le résultat de la question 2 : à quoi est congru $7^{2025} + 1$ modulo 11 ?

4.

Pourquoi la forme $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$ du petit théorème de Fermat ne s'applique-t-elle pas à $a = 33$ et $p = 11$? Donne le reste de 33^{2025} dans la division par 11.

INDICE

Vérifie l'hypothèse « p ne divise pas a » pour $a = 33$.

Exercice 10

Compter en base six

1.

Écris en base 6 l'entier 1000 (donné en base dix).

INDICE

Divise 1000 par 6, puis le quotient par 6, et continue jusqu'à un quotient nul. Les restes, lus du dernier au premier, sont les chiffres.

2.

Écris en base dix l'entier $\overline{2153}^{(6)}$.

INDICE

Développe selon les puissances de 6 : le chiffre de droite est celui des unités, le suivant est multiplié par 6, puis par 6^2, et ainsi de suite.

3.

Pose l'addition $\overline{4344}^{(6)} + \overline{2153}^{(6)}$ directement en base 6, puis contrôle le résultat en base dix.

INDICE

Additionne colonne par colonne, de droite à gauche. Dès qu'une somme atteint 6, écris son reste par 6 et retiens le quotient.

Exercice 11

Une équation en x et y, avec ou sans solution

1.

Montre que l'équation $12x + 18y = 7$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

INDICE

Calcule $12 \wedge 18$ et compare-le au second membre : l'existence de solutions dépend d'une divisibilité.

2.

On considère l'équation (E) : $12x + 18y = 30$. Justifie qu'elle admet des solutions, montre qu'elle équivaut à $2x + 3y = 5$ et trouve une solution évidente.

INDICE

Ici, le PGCD divise le second membre. Divise les deux membres de (E) par ce PGCD ; essaie ensuite de petites valeurs de x et de y.

3.

Détermine toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

INDICE

Vérifie que 2 et 3 sont premiers entre eux. Le théorème qui décrit les solutions de $ax + by = c$ s'applique alors à partir de la solution $(1, 1)$.