BURHAN

Suites numériques : fiche de révision

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/resume

Chapitre	Semestre
Suites numériques	Semestre 1

L'essentiel du chapitre

> **À retenir : Quatre réflexes**
>
> - **Monotone et bornée du bon côté** : croissante et majorée, ou décroissante et minorée, la suite converge. Le critère dit qu'une limite existe, pas combien elle vaut.
> - **Récurrence** pour tout ce qui porte sur « tous les n » : un encadrement, parfois une monotonie.
> - **Propriété du point fixe en dernier** : elle ne s'applique que si la suite converge. On prouve d'abord la convergence, puis on résout $f(\ell) = \ell$.
> - **Suite auxiliaire** : quand l'énoncé fournit (v_n), on montre qu'elle est géométrique (parfois arithmétique), on écrit v_n, puis u_n, puis la limite avec (q^n).

Chaque conclusion demande sa justification.

Pour montrer que…	il faut citer…
$a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$	une récurrence : initialisation, hérédité, conclusion
(u_n) est croissante	$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n
(u_n) converge	croissante et majorée, ou décroissante et minorée
$\lim u_n = +\infty$ par comparaison	$u_n \geq v_n$ à partir d'un rang, et $\lim v_n = +\infty$
$\lim u_n = \ell$ par encadrement	$v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un rang, et $\lim v_n = \lim w_n = \ell$
(v_n) est géométrique	$v_{n+1} = q\, v_n$ pour tout n, avec q indépendant de n
$\lim q^n = 0$	$-1 < q < 1$
la limite ℓ de $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $f(\ell) = \ell$ (propriété du point fixe)	f continue sur un intervalle fermé I ; $f(I) \subset I$; $u_0 \in I$; (u_n) convergente

Suites arithmétiques et géométriques

Pour $n_0 \leq p \leq n$, avec r la raison d'une suite arithmétique et q celle d'une suite géométrique :

Arithmétique : terme général

$$u_n = u_p + (n - p)\, r$$

Géométrique : terme général

$$u_n = u_p \times q^{\,n-p}$$

Arithmétique : somme de u_p à u_n

$$(n-p+1)\times\frac{u_p+u_n}{2}$$

Géométrique, q différent de 1 : somme de u_p à u_n

$$u_p\times\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Exemple : compter avant de sommer

$1+2+4+\cdots+2^9$: termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2, de l'exposant 0 à l'exposant 9, donc **dix** termes. Comme $2\neq 1$:

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+2^9 &= 1\times\frac{1-2^{10}}{1-2}\\ &= 1023.\end{aligned}$$

Limites de référence et calculs

À retenir : Trois comportements possibles

Quand n tend vers $+\infty$, une suite (u_n) :

- **converge** vers un réel ℓ : on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$, et la suite est **convergente** ;
- ou **tend vers** $+\infty$ ou vers $-\infty$: elle est **divergente** ;
- ou **n'a pas de limite** : elle est aussi divergente. C'est le cas de $(-1)^n$, qui vaut 1, -1, 1…

Une limite, quand elle existe, est unique.

Pour tout entier $p\geq 1$, quand n tend vers $+\infty$ (avec $n\geq 1$ pour les inverses) :

Puissances de n

$$\lim_{n\to+\infty} n^p=+\infty$$

Racine carrée de n

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$$

Inverses des puissances de n

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$$

Inverse de la racine carrée de n

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$$

Propriété : Limite de la suite (qⁿ)

Soit q un réel. Quand n tend vers $+\infty$:

- si $q>1$, $\lim q^n=+\infty$;
- si $q=1$, la suite (q^n) est constante, égale à 1 ;
- si $-1<q<1$, $\lim q^n=0$;
- si $q\leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.

Méthode : lever une forme indéterminée

1. **Polynômes en n** : mets en facteur la plus grande puissance de n, en haut et en bas.
2. **Différence de racines** : multiplie et divise par l'expression conjuguée.
3. **Puissances a^n et b^n** : mets en facteur celle dont la base est la plus grande en valeur absolue ; il reste des q^n avec $-1 < q < 1$.
4. **Racines et puissances de n mêlées** : mets en facteur le terme qui l'emporte, par exemple n dans $n - \sqrt{n} = n\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exemple : Trois calculs express

Pour $n \geq 1$:

- $\dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 3} = \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}}$, qui tend vers 2.
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, qui tend vers 0.
- $\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 1} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$, qui tend vers 1, car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tendent vers 0.

Propriété : Limite d'une suite $u_n = f(n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout entier $n \geq a$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, où ℓ est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

La réciproque est fausse : pour $f(x) = \sin(\pi x)$, $f(n) = 0$ pour tout entier n, alors que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemple : En clair : une suite de la forme f(n)

Pour $u_n = \dfrac{4n - 1}{2n + 5}$, on cherche la limite en $+\infty$ de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{4x - 1}{2x + 5}$: elle vaut 2, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Le sens inverse ne marche pas : une suite $\big(g(n)\big)$ peut avoir une limite sans que g en ait une en $+\infty$.

Comparaison, encadrement, passage à la limite

Théorème : Limite infinie par comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Théorème : Convergence par encadrement

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites et ℓ un réel.

- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = \lim w_n = \ell$, alors $\lim u_n = \ell$.
- En particulier, si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = \ell$.

Exemple : Deux exemples

- $u_n = n + (-1)^n$: pour tout n, $u_n \geq n - 1$, et $\lim(n-1) = +\infty$. Par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
- $w_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$ pour $n \geq 1$: comme $1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$, on a $\dfrac{1}{n} \leq w_n \leq \dfrac{3}{n}$. Les deux bornes tendent vers 0 : par encadrement, $\lim w_n = 0$.

Propriété : Passage à la limite dans une inégalité

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'.

Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq \ell'$. En particulier, si $u_n \leq M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leq M$.

Une inégalité stricte entre les termes ne donne qu'une inégalité **large** entre les limites.

Méthode : majorer l'écart à la limite

1. **Contraction** : établis $|u_{n+1} - \ell| \leq k\,|u_n - \ell|$ pour tout n, avec un réel k tel que $0 \leq k < 1$.
2. **Récurrence** : déduis-en $|u_n - \ell| \leq k^n\,|u_0 - \ell|$ pour tout n.
3. **Conclusion** : $\lim k^n = 0$, donc $\lim u_n = \ell$ par encadrement.

Monotonie et convergence

Méthode : trouver le sens de variation

1. **Différence** : signe de $u_{n+1} - u_n$. C'est l'outil par défaut.
2. **Quotient** : si tous les termes sont strictement positifs, compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. **Fonction** : si $u_n = f(n)$, les variations de f sur $[a, +\infty[$ donnent celles de la suite.

4. **Récurrence** : pour $u_{n+1} = f(u_n)$, démontre $u_n \leq u_{n+1}$ (ou $u_n \geq u_{n+1}$) pour tout n.

Exemple : monotone à partir d'un rang

Soit $u_n = n^2 - 6n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 2n - 5.$$

Ce nombre est négatif pour $n \leq 2$ et positif pour $n \geq 3$. La suite est donc croissante **à partir du rang** 3 : $u_2 = -8$, $u_3 = -9$, $u_4 = -8$.

Théorème : Convergence d'une suite monotone et bornée

- Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
- Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

Les conclusions restent vraies lorsque la monotonie et la borne ne valent qu'à partir d'un certain rang. Ce théorème affirme l'existence de la limite ; il ne donne pas sa valeur.

Remarque : En clair

Une suite croissante coincée sous un plafond ne peut que s'approcher de quelque chose : elle converge. Sa limite vaut au plus le majorant trouvé, mais elle n'est pas forcément égale à ce majorant.

Raisonnement par récurrence

Méthode : prouver une propriété pour tout n

On note $P(n)$ la propriété, par exemple « $1 \leq u_n \leq 3$ ».

1. **Initialisation** : vérifie $P(0)$ par un calcul.
2. **Hérédité** : on fixe **un** entier n tel que $P(n)$ soit vraie, et l'on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante, l'hérédité se fait souvent en appliquant f aux trois membres de l'encadrement.

Suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété : Intervalle stable et termes d'une suite récurrente

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ (on dit que I est **stable** par f), et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en particulier, la suite (u_n) est bien définie.

Théorème : Limite de (f(u$_n$)) par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) une suite de termes de I qui converge vers un réel a de I.

Si f est continue en a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

Remarque : En clair : passer f à la limite

Si u_n s'approche de a et si f est continue en a, alors $f(u_n)$ s'approche de $f(a)$. Par exemple, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, alors $\lim \sqrt{u_n + 7} = \sqrt{9} = 3$, car la racine carrée est continue en 9.

C'est ce résultat qui justifie la propriété du point fixe : u_{n+1} tend vers ℓ, et $f(u_n)$ tend vers $f(\ell)$.

Théorème : Limite d'une suite récurrente convergente

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle **fermé** I (par exemple $[a, b]$ ou $[a, +\infty[$) tel que $f(I) \subset I$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si (u_n) **converge** vers un réel ℓ, alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

La convergence est une **hypothèse** : l'équation $f(x) = x$ ne prouve pas, à elle seule, que la suite converge.

Méthode : Plan d'étude : l'ordre compte

1. **Encadrement par récurrence** : montre $a \leq u_n \leq b$ pour tout n, souvent grâce à un intervalle I stable par f.
2. **Monotonie** : signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$, démontré. Positif : suite croissante, majorée par b. Négatif : suite décroissante, minorée par a.
3. **Convergence**, en nommant le critère : croissante et majorée, ou décroissante et minorée. La borne utile vient de l'encadrement : un intervalle stable ne la donne que s'il est borné de ce côté.
4. **Propriété du point fixe**, seulement maintenant : f continue sur I fermé, $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$ et suite convergente, donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. Garde la solution qui est dans I.

Exemple : Exemple guidé (1/3) : l'encadrement

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x+2}$ et $I = [0, 2]$. Pour tout $x \in I$, $\dfrac{3x+2}{x+2} = 3 - \dfrac{4}{x+2}$: f est continue et strictement croissante sur I, avec $f(0) = 1$ et $f(2) = 2$. Donc $f(I) = [1, 2] \subset I$.

Soit $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 2$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 0$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : on fixe un entier n tel que $0 \leq u_n \leq 2$. Comme f est croissante sur I, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$, soit $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple : Exemple guidé (2/3) : monotonie et convergence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, au dénominateur commun $u_n + 2$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n \\ &= \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

D'après l'encadrement, $2 - u_n \geq 0$, $u_n + 1 > 0$ et $u_n + 2 > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite est croissante.

Elle est croissante et majorée par 2, donc convergente.

Exemple : Exemple guidé (3/3) : la valeur de la limite

Propriété du point fixe, hypothèses une par une : f est **continue** sur l'intervalle **fermé** $I = [0, 2]$; $f(I) \subset I$; $u_0 \in I$; (u_n) **converge** (partie 2/3). Sa limite ℓ vérifie donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. Comme $\ell + 2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3\ell + 2}{\ell + 2} = \ell &\iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \\ &\iff (\ell - 2)(\ell + 1) = 0. \end{aligned}$$

Or $-1 \notin I$, donc $\lim u_n = 2$. Premiers termes : 0 ; 1 ; $\frac{5}{3}$; $\frac{21}{11}$.

Suite auxiliaire

Méthode : passer par une suite (v_n)

1. **Nature** : calcule v_{n+1} à l'aide de u_{n+1}, remplace u_{n+1} par son expression en u_n, puis fais apparaître v_n. Conclus : géométrique de raison q (ou arithmétique de raison r).
2. **Expression de** v_n : $v_n = v_0 \times q^n$ (ou $v_0 + nr$).
3. **Expression de** u_n : isole u_n dans la définition de v_n.
4. **Limite** : avec $\lim q^n$, puis les opérations.

Exemple : même suite, autre chemin

Reprenons $u_0 = 0$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$, et posons $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$ (on sait que $u_n \geq 0$).

1. $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$ et $u_{n+1} + 1 = \dfrac{4(u_n + 1)}{u_n + 2}$, donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\, v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
2. $v_0 = -2$, donc $v_n = -2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.
3. $v_n(u_n + 1) = u_n - 2$ donne $u_n = \dfrac{2 + v_n}{1 - v_n}$, car $1 - v_n > 0$.
4. $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, donc $\lim v_n = 0$ et $\lim u_n = 2$: la propriété du point fixe donnait bien la bonne valeur.

Remarque : Cas affine, à reconnaître

Pour $u_{n+1} = a\, u_n + b$ avec $a \neq 1$, le réel $\alpha = \dfrac{b}{1 - a}$ vérifie $a\alpha + b = \alpha$. La suite $v_n = u_n - \alpha$ vérifie alors $v_{n+1} = a\, v_n$: elle est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)\, a^n.$$

Si $-1 < a < 1$, la limite vaut α. Sinon, elle dépend aussi de $u_0 - \alpha$: suite constante si $u_0 = \alpha$; pour $a > 1$, limite $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de $u_0 - \alpha$.

Six pièges classiques

Attention : Un point fixe n'est pas une preuve de convergence

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation $3x - 4 = x$ donne $x = 2$, et pourtant $u_n = 2 + 3^n$: la suite tend vers $+\infty$. La propriété du point fixe suppose la suite convergente : résoudre $f(x) = x$ ne sert qu'**après** avoir prouvé la convergence.

Attention : Croissante ne veut pas dire « tend vers +∞ »

La suite de l'exemple guidé est croissante, et sa limite vaut 2. Une suite croissante tend vers $+\infty$ seulement si elle n'est pas majorée.

Attention : Une inégalité stricte devient large à la limite

$u_n = 3 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$: $u_n < 3$ pour tout $n \geq 1$, et pourtant $\lim u_n = 3$. Si $u_n < M$ pour tout n et que (u_n) converge, tu peux seulement écrire $\lim u_n \leq M$.

Attention : Bornée ne veut pas dire convergente

La suite de terme général $2 \times (-1)^n$ vaut $2, -2, 2, -2\ldots$ Elle est bornée, sans limite. De même, $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0, mais $(-2)^n$ n'a pas de limite : pour q négatif, seul $-1 < q < 0$ donne une limite.

Attention : Mal compter les termes d'une somme

De u_3 à u_{10}, il y a $10 - 3 + 1 = 8$ termes, et non 7. De u_0 à u_n, il y en a $n + 1$.

Attention : Une récurrence sans initialisation ne prouve rien

« $n^2 + n$ est impair » est héréditaire : $(n+1)^2 + (n+1) = (n^2 + n) + 2(n+1)$, et ajouter un nombre pair à un impair donne un impair. Pourtant la propriété est fausse pour tout n : déjà $0^2 + 0 = 0$ est pair. Dans l'hérédité, on suppose la propriété pour **un** n fixé, jamais pour tous.

Au bac

Constats sur **15 sujets nationaux** 2BAC SE (option française, 2016 à 2025), et leurs barèmes lus. Ces fréquences décrivent ces sujets-là, pas le prochain examen.

Question	Sujets	Points
minoration, majoration ou encadrement de u_n par récurrence	15 sur 15	0,5 à 0,75
monotonie par le signe de $u_{n+1} - u_n$	13 sur 15	0,25 à 0,5
convergence par le critère monotone	13 sur 15	0,25
limite de $u_{n+1} = f(u_n)$ par la propriété du point fixe	9 sur 15	0,5 à 0,75
expression de u_n en fonction de n	7 sur 15	0,25 à 1
suite auxiliaire géométrique	6 sur 15	0,5 à 1

Les suites y pèsent de 1,75 à 4 points sur 20 : exercice à part, ou partie du problème.

Méthode : Rédiger pour ne perdre aucun point

1. **Récurrence** : sépare nettement initialisation, hérédité et conclusion ; dans deux des barèmes lus, l'initialisation et l'hérédité sont notées à part.
2. **Convergence** : nomme le critère, « croissante et majorée, donc convergente ».
3. **Propriété du point fixe** : énumère les hypothèses (f continue sur l'intervalle **fermé** I, $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$, suite convergente) ; 4 des 7 barèmes lus pour ces questions les notent séparément.
4. **Suite auxiliaire** : prouve $v_{n+1} = q\, v_n$ pour tout n, donne v_0 et q, puis l'expression de v_n ; dans au moins un barème lu, la nature et l'expression de v_n sont notées à part.

Remarque : Ce qu'il faut savoir sur ces sujets

- Dans 8 des 9 parties de problème, f faisait intervenir des fonctions que tu étudieras plus tard. Les étapes du plan d'étude restent les mêmes.
- Dans au moins 5 de ces 9 parties, la monotonie découlait du signe de $f(x) - x$, établi plus haut dans le problème.
- Non relevé dans ces 15 sujets, ce qui ne veut pas dire « jamais demandé » : suites adjacentes, récurrence d'ordre 2, limite infinie demandée comme résultat, démonstration d'un résultat de cours.

Checklist avant le devoir

À retenir : Je sais…

- écrire le terme général et la somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique, en comptant les termes ;
- donner la limite de (q^n) selon q, et lever une forme indéterminée ;
- conclure par comparaison ou par encadrement ;
- étudier le sens de variation d'une suite, éventuellement à partir d'un rang ;
- rédiger une récurrence en trois temps ;
- citer le critère des suites monotones bornées ;
- étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ dans l'ordre : stabilité, monotonie, convergence, puis $f(\ell) = \ell$ avec ses hypothèses ;
- exploiter une suite auxiliaire géométrique jusqu'à la limite de (u_n).