BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Corrigé détaillé en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une récurrence homographique et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout n tel que u_n existe et $u_n \neq -4$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.

INDICE

L'égalité se vérifie par un calcul direct. Pour l'hérédité, demande-toi ce que l'égalité dit du signe de $u_{n+1} - 1$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$.

En déduire que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge.

INDICE

Commence par réduire $u_{n+1} - u_n$ au même dénominateur. Si tu bloques sur la factorisation du numérateur : cherche une racine évidente.

3. 1 pts

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$. Exprimer v_n en fonction de n.

INDICE

Tu connais déjà $u_{n+1} - 1$ (question 1). Exprime de la même façon $u_{n+1} + 2$. Si tu bloques ensuite : forme le quotient, un facteur se simplifie.

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$. En déduire u_n en fonction de n, puis $\lim u_n$.

INDICE

Pars de la définition de v_n et isole u_n. Pense à justifier que tu ne divises jamais par zéro.

5. `0,5 pts`

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Calculer T_n en fonction de n, puis $\lim T_n$.

INDICE

Reconnais une somme de termes consécutifs d'une suite connue. Avant d'appliquer la formule, compte les termes et repère le premier.

Exercice 2 4 pts

Une fonction cubique au service d'une suite

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}.$$

Partie B. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

(Partie A) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$. Que peux-tu dire de son signe ?

2. 0,75 pts

(Partie A) Vérifier que, pour tout réel x :

$f(x) - x = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{3}$.

En déduire la position de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $[-2, +\infty[$.

INDICE

Écris d'abord $f(x) - x$ sur un seul dénominateur. Pour la position, étudie le signe de chaque facteur sur $[-2, +\infty[$.

3. 0,75 pts

(Partie B) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Dans l'hérédité, utilise le sens de variation de f établi à la question 1.

4. 0,5 pts

(Partie B) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Relie $u_{n+1} - u_n$ à une expression étudiée dans la partie A.

5. 1 pts

(Partie B) Montrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en justifiant chaque hypothèse.

INDICE

Commence par la convergence, en nommant le critère. Ensuite seulement, cherche la valeur : quel intervalle fermé, stable par f, contient tous les termes ?

6. 0,5 pts

(Partie C) On admet que $w_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (w_n) est croissante, puis qu'elle ne peut pas converger. Quelle est sa limite ?

INDICE

Pour la monotonie, reprends l'idée de la question 4. Pour la suite, raisonne par l'absurde : si (w_n) convergeait, dans quel intervalle serait sa limite ?

Exercice 3 4 pts

Deux points fixes, deux premiers termes

Partie A. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$.

Partie B. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

(Partie A) Justifier que f est croissante sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \sqrt{x}\,(2 - \sqrt{x})$. En déduire le signe de $f(x) - x$ et les points fixes de f.

INDICE

Pour l'égalité, pense à écrire x comme un carré. Pour le signe, compare $\sqrt{x}$ à un nombre bien choisi.

2. 0,75 pts

(Partie B) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Dans l'hérédité, utilise le sens de variation de f. Calcule ensuite les images des bornes.

3. 0,5 pts

(Partie B) En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Écris $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de f, puis utilise la partie A.

4. 0,75 pts

(Partie B) Montrer que (u_n) converge. Déterminer sa limite en citant les hypothèses utilisées, et expliquer pourquoi la solution 0 est écartée.

INDICE

Nomme d'abord le critère de convergence. Pour la valeur, demande-toi quel intervalle fermé, stable par f, contient tous les termes.

5. 0,75 pts

(Partie C) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq v_n \leq 9$, puis que (v_n) est décroissante.

INDICE

Même méthode qu'à la partie B, avec d'autres bornes. Pour la monotonie, regarde dans quelle zone du tableau de la question 1 se trouvent les termes.

6. 0,75 pts

(Partie C) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.

INDICE

Le critère n'est pas le même qu'à la question 4 : lequel s'applique à une suite décroissante ?

Exercice 4 4 pts

Des termes qui fondent, une somme qui reste finie

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}.$$

1. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

INDICE

Dans l'hérédité, étudie le signe du numérateur et du dénominateur de u_{n+1}.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}\, u_n$. En déduire que (u_n) est strictement décroissante.

INDICE

Compare les dénominateurs des deux membres. N'oublie pas le signe de u_n.

3. 0,75 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de la question 2. Pour la limite, quel théorème utilise un encadrement ?

4. 1,25 pts

On pose $w_n = \frac{1}{u_n}$ et $t_n = w_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n + 1$, puis que (t_n) est géométrique. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2}{3^{n+1} - 1}.$$

INDICE

Pour w_{n+1}, renverse la relation de récurrence. Si tu bloques pour (t_n) : exprime t_{n+1} en fonction de w_n, puis cherche à faire apparaître t_n.

5. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n < \frac{3}{2}$, puis que (S_n) converge. Que peut-on dire de sa limite ?

INDICE

Utilise la majoration de la question 3 pour chaque terme de la somme. Si tu bloques : additionne ces majorations, puis reconnais une somme géométrique. Pour la convergence, étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$.

Exercice 5 4 pts

Un point fixe double et une convergence lente

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=4-\dfrac{4}{x}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$. Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{(x-2)^2}{x}$.

INDICE

Pour les variations, dérive f. Pour l'égalité, mets $f(x)-x$ sur un seul dénominateur, puis observe le numérateur.

2. 0,75 pts

Vérifier que $u_{n+1}-2=\dfrac{2(u_n-2)}{u_n}$ lorsque $u_n>0$, puis montrer par récurrence que $u_n>2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer enfin que (u_n) est décroissante.

INDICE

Dans l'hérédité, l'égalité proposée donne le signe de $u_{n+1}-2$. Pour la monotonie, pense à la question 1.

3. 0,75 pts

En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite, en citant les hypothèses utilisées.

INDICE

Nomme d'abord le critère de convergence. Pour la valeur, cherche un intervalle fermé, stable par f, qui contient tous les termes.

4. 0,75 pts

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$. Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Exprime v_{n+1} à l'aide de la question 2. Si tu bloques : au numérateur, écris $u_n=(u_n-2)+2$.

5. 0,75 pts

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. Retrouver ainsi la limite et le sens de variation de (u_n).

INDICE

Utilise le terme général d'une suite arithmétique, puis reviens à u_n par la définition de v_n.

6. 0,5 pts

Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n-2\leq 10^{-2}$. Commenter.

INDICE

Utilise l'expression de u_n obtenue à la question 5, puis résous une inéquation en n.