BURHAN

Suites numériques : exercices, niveau examen

2ème Année Baccalauréat · Sciences Expérimentales · Mathématiques

Version en ligne : burhan.ma/2bac/sciences-experimentales/mathematiques/suites-numeriques/exercices/examen

Chapitre	Palier	Exercices
Suites numériques	Niveau examen	5

Exercice 1 4 pts

Une récurrence homographique et sa suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. 0,75 pts

Vérifier que, pour tout n tel que u_n existe et $u_n \neq -4$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.

INDICE

L'égalité se vérifie par un calcul direct. Pour l'hérédité, demande-toi ce que l'égalité dit du signe de $u_{n+1} - 1$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit n tel que u_n existe et $u_n \neq -4$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3u_n + 2 - (u_n + 4)}{u_n + 4} \\ &= \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 1$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 3 > 1$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n + 4 > 5 > 0$: u_{n+1} existe. De plus $u_n - 1 > 0$: d'après l'égalité, $u_{n+1} - 1$ est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} - 1 > 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 1$.

2. 0,75 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}.$$

En déduire que (u_n) est décroissante, puis qu'elle converge.

INDICE

Commence par réduire $u_{n+1} - u_n$ au même dénominateur. Si tu bloques sur la factorisation du numérateur : cherche une racine évidente.

CORRIGÉ

Calcul. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, $u_n + 4 > 0$:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} - u_n \\ &= \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

Or $(u_n - 1)(u_n + 2) = u_n^2 + u_n - 2$. Le numérateur vaut donc $-(u_n - 1)(u_n + 2)$, d'où l'égalité demandée.

Signe. D'après la question 1, $u_n - 1 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n < 0$: (u_n) est **décroissante**.

Convergence. (u_n) est décroissante et minorée par 1. Une suite décroissante et minorée converge : (u_n) est **convergente**.

Conclusion. L'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$; la suite (u_n) est décroissante et elle converge.

3. 1 pts

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$. Exprimer v_n en fonction de n.

INDICE

Tu connais déjà $u_{n+1} - 1$ (question 1). Exprime de la même façon $u_{n+1} + 2$. Si tu bloques ensuite : forme le quotient, un facteur se simplifie.

CORRIGÉ

Existence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, donc $u_n + 2 > 3$: v_n existe.

Le terme suivant. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + 2 &= \frac{3u_n + 2 + 2(u_n + 4)}{u_n + 4} \\ &= \frac{5u_n + 10}{u_n + 4} \\ &= \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

Avec la question 1 :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{u_n + 4} \\ &\quad \times \frac{u_n + 4}{5(u_n + 2)} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{2}{5}\, v_n. \end{aligned}$$

Conclusion. (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

4. 1 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$. En déduire u_n en fonction de n, puis $\lim u_n$.

INDICE

Pars de la définition de v_n et isole u_n. Pense à justifier que tu ne divises jamais par zéro.

CORRIGÉ

Isoler u_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. De $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, on tire $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$, donc $u_n(1 - v_n) = 1 + 2v_n$. Or $0 < v_n \leq \dfrac{2}{5} < 1$, donc $1 - v_n \neq 0$ et :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1+2v_n}{1-v_n} \\ &= \frac{1+2\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Contrôle. Pour $n = 0$: $\dfrac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{9}{5} \times \dfrac{5}{3} = 3 = u_0$.

Limite. $0 < \dfrac{2}{5} < 1$, donc $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$. Par limite d'un quotient, (u_n) tend vers $\dfrac{1+0}{1-0} = 1$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$, ce qui donne l'expression ci-dessus en fonction de n ; de plus $\lim u_n = 1$.

Remarque. 1 est bien solution de $\dfrac{3x+2}{x+4} = x$. Mais c'est l'expression explicite qui **prouve** ici la valeur de la limite.

5. 0,5 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. Calculer T_n en fonction de n, puis $\lim T_n$.

INDICE

Reconnais une somme de termes consécutifs d'une suite connue. Avant d'appliquer la formule, compte les termes et repère le premier.

CORRIGÉ

T_n compte $n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$, différente de 1, et de premier terme $v_0 = \dfrac{2}{5}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1} = 0$, la suite (T_n) tend vers $\dfrac{2}{3}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{2}{3}\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$, et $\lim T_n = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2 4 pts

Une fonction cubique au service d'une suite

Partie A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{3}.$$

Partie B. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C. Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

(Partie A) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

INDICE

Calcule $f'(x)$. Que peux-tu dire de son signe ?

CORRIGÉ

f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$, et $f'(x) = 0$ seulement pour $x = 0$. Une dérivée positive qui ne s'annule qu'en un point isolé donne une fonction strictement croissante.

Conclusion. f est **strictement croissante sur** $\mathbb{R}$.

2. 0,75 pts

(Partie A) Vérifier que, pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{(x-1)^2(x+2)}{3}.$$

En déduire la position de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$ sur $[-2, +\infty[$.

INDICE

Écris d'abord $f(x) - x$ sur un seul dénominateur. Pour la position, étudie le signe de chaque facteur sur $[-2, +\infty[$.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $f(x) - x = \dfrac{x^3 + 2 - 3x}{3}$. D'autre part :

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x+2) &= (x^2 - 2x + 1)(x+2) \\ &= x^3 + 2x^2 - 2x^2 \\ &\quad - 4x + x + 2 \\ &= x^3 - 3x + 2.\end{aligned}$$

Les deux numérateurs sont égaux, d'où l'égalité.

Le signe. Pour tout réel x, $(x-1)^2 \geq 0$; pour tout $x \geq -2$, $x + 2 \geq 0$. Donc $f(x) - x \geq 0$ sur $[-2, +\infty[$, avec égalité seulement en -2 et en 1.

Conclusion. Sur $[-2, +\infty[$, la courbe de f est **au-dessus** de la droite d'équation $y = x$; elles se rencontrent aux points d'abscisses -2 et 1.

3. 0,75 pts

(Partie B) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

INDICE

Dans l'hérédité, utilise le sens de variation de f établi à la question 1.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 0$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 1$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$, soit $\dfrac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 1$. Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$: $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

4. 0,5 pts

(Partie B) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

INDICE

Relie $u_{n+1} - u_n$ à une expression étudiée dans la partie A.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n \in [0, 1]$ (question 3), et $[0, 1] \subset [-2, +\infty[$; d'après la question 2, $f(u_n) - u_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est **croissante**.

5. 1 pts

(Partie B) Montrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite en justifiant chaque hypothèse.

INDICE

Commence par la convergence, en nommant le critère. Ensuite seulement, cherche la valeur : quel intervalle fermé, stable par f, contient tous les termes ?

CORRIGÉ

Convergence. (u_n) est croissante et majorée par 1. Une suite croissante et majorée converge : (u_n) converge vers un réel ℓ.

Hypothèses de la propriété du point fixe, sur $I = [0, 1]$; cette propriété suppose la suite convergente, ce que l'on vient d'établir :

- f est continue sur I (fonction polynôme) ;
- I est un intervalle fermé ;
- f est continue et croissante, donc $f(I) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{2}{3}, 1\right] \subset I$;
- $u_0 = 0 \in I$;
- (u_n) converge.

Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $(\ell - 1)^2(\ell + 2) = 0$: $\ell = 1$ ou $\ell = -2$. Comme $-2 \notin I$, $\ell = 1$.

Conclusion. La suite (u_n) converge et $\lim u_n = 1$.

6. `0,5 pts`

(Partie C) On admet que $w_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (w_n) est croissante, puis qu'elle ne peut pas converger. Quelle est sa limite ?

INDICE

Pour la monotonie, reprends l'idée de la question 4. Pour la suite, raisonne par l'absurde : si (w_n) convergeait, dans quel intervalle serait sa limite ?

CORRIGÉ

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $w_n \geq 2$, donc $w_n \in [-2, +\infty[$ et, d'après la question 2, $w_{n+1} - w_n = f(w_n) - w_n \geq 0$: (w_n) est **croissante**.

Par l'absurde. Supposons que (w_n) converge vers un réel ℓ. Vérifions les hypothèses de la propriété du point fixe sur $I = [2, +\infty[$:

- f est continue sur I, et I est fermé ;
- $f(I) \subset I$, car f est croissante et $f(2) = \dfrac{10}{3} \geq 2$;
- $w_0 \in I$, et (w_n) converge par hypothèse.

La propriété donne $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. Or les seules solutions de $f(x) = x$ sont 1 et -2, et **aucune** n'appartient à $I = [2, +\infty[$. C'est impossible : (w_n) **ne converge pas**.

La limite. (w_n) est croissante. Si elle était majorée, elle convergerait ; elle n'est donc pas majorée. Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Conclusion. La suite (w_n) est croissante, ne converge pas, et $\lim w_n = +\infty$.

À retenir. L'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par f, mais il n'est **pas majoré** : il ne fournit aucun majorant à cette suite croissante. Le point fixe 1 ne joue aucun rôle pour (w_n).

Exercice 3 — 4 pts

Deux points fixes, deux premiers termes

Partie A. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 2\sqrt{x}$.

Partie B. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. — 0,5 pts

(Partie A) Justifier que f est croissante sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \sqrt{x}\,(2 - \sqrt{x})$. En déduire le signe de $f(x) - x$ et les points fixes de f.

INDICE

Pour l'égalité, pense à écrire x comme un carré. Pour le signe, compare $\sqrt{x}$ à un nombre bien choisi.

CORRIGÉ

Variations. La racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$, et multiplier par $2 > 0$ conserve le sens : f est croissante sur $[0, +\infty[$.

L'égalité. Soit $x \geq 0$. On a $x = (\sqrt{x})^2$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 2\sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ &= \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

Le signe. $\sqrt{x} \geq 0$, et $2 - \sqrt{x} \geq 0$ si et seulement si $\sqrt{x} \leq 2$, c'est-à-dire $x \leq 4$.

x	$[0, 4]$	$[4, +\infty[$
$f(x) - x$	≥ 0	≤ 0

Les points fixes. $f(x) = x$ si et seulement si $\sqrt{x} = 0$ ou $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 4$. La courbe de f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $[0, 4]$ et au-dessous sur $[4, +\infty[$.

Conclusion. f est croissante ; $f(x) - x \geq 0$ sur $[0, 4]$ et $f(x) - x \leq 0$ sur $[4, +\infty[$; les points fixes de f sont 0 et 4.

2. — 0,75 pts

(Partie B) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.

INDICE

Dans l'hérédité, utilise le sens de variation de f. Calcule ensuite les images des bornes.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $1 \leq u_n \leq 4$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 1$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq 4$. Comme f est croissante, $f(1) \leq f(u_n) \leq f(4)$, soit $2 \leq u_{n+1} \leq 4$. Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 4$: $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 4$.

3. 0,5 pts

(Partie B) En déduire le sens de variation de (u_n).

INDICE

Écris $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de f, puis utilise la partie A.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or $u_n \in [1, 4]$ (question 2), et $[1, 4] \subset [0, 4]$; d'après la question 1, $f(u_n) - u_n \geq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est **croissante**.

4. 0,75 pts

(Partie B) Montrer que (u_n) converge. Déterminer sa limite en citant les hypothèses utilisées, et expliquer pourquoi la solution 0 est écartée.

INDICE

Nomme d'abord le critère de convergence. Pour la valeur, demande-toi quel intervalle fermé, stable par f, contient tous les termes.

CORRIGÉ

Convergence. (u_n) est croissante et majorée par 4. Une suite croissante et majorée converge : (u_n) converge vers un réel ℓ.

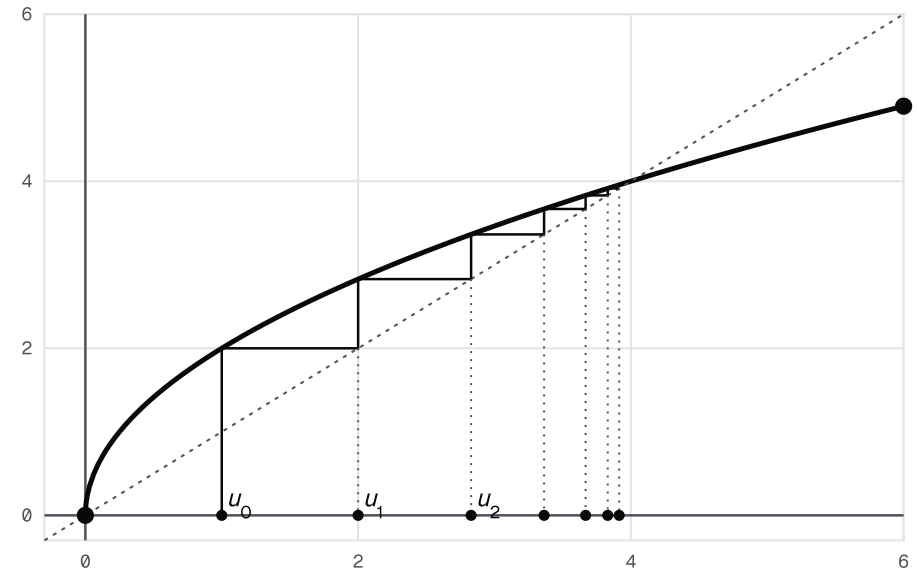
Hypothèses de la propriété du point fixe, sur $I = [1, 4]$; cette propriété suppose la suite convergente, ce que l'on vient d'établir :

- f est continue sur I, car la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$;
- I est un intervalle fermé ;
- f est croissante, $f(1) = 2$ et $f(4) = 4$, donc $f(I) = [2, 4] \subset I$;
- $u_0 = 1 \in I$;
- (u_n) converge.

Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$. D'après la question 1, $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.

Choisir. $0 \notin I$: la limite ne peut pas valoir 0.

Conclusion. La suite (u_n) converge et $\lim u_n = 4$; la solution 0 est écartée car elle n'appartient pas à l'intervalle I qui contient tous les termes.



Escalier de (u_n) depuis u_0 = 1 : les termes montent vers 4, le point fixe retenu, et jamais vers 0.

5. 0,75 pts

(Partie C) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq v_n \leq 9$, puis que (v_n) est décroissante.

INDICE

Même méthode qu'à la partie B, avec d'autres bornes. Pour la monotonie, regarde dans quelle zone du tableau de la question 1 se trouvent les termes.

CORRIGÉ

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$: « $4 \leq v_n \leq 9$ ».

- **Initialisation.** $v_0 = 9$: $Q(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $Q(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $4 \leq v_n \leq 9$. Comme f est croissante, $f(4) \leq f(v_n) \leq f(9)$, soit $4 \leq v_{n+1} \leq 6$. Donc $4 \leq v_{n+1} \leq 9$: $Q(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n$. Or $v_n \in [4, 9]$, et $[4, 9] \subset [4, +\infty[$; d'après la question 1, $f(v_n) - v_n \leq 0$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq v_n \leq 9$, et la suite (v_n) est **décroissante**.

6. `0,75 pts`

(Partie C) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite.

INDICE

Le critère n'est pas le même qu'à la question 4 : lequel s'applique à une suite décroissante ?

CORRIGÉ

Convergence. (v_n) est décroissante et minorée par 4. Une suite décroissante et minorée converge : (v_n) converge vers un réel ℓ'.

Hypothèses de la propriété du point fixe, sur $J = [4, 9]$:

- f est continue sur J ;
- J est un intervalle fermé ;
- f est croissante, $f(4) = 4$ et $f(9) = 6$, donc $f(J) = [4, 6] \subset J$;
- $v_0 = 9 \in J$;
- (v_n) converge.

Donc $\ell' \in J$ et $f(\ell') = \ell'$, soit $\ell' = 0$ ou $\ell' = 4$. Comme $0 \notin J$, $\ell' = 4$.

Conclusion. La suite (v_n) converge et $\lim v_n = 4$.

À retenir. Les deux suites tendent vers 4, l'une en montant, l'autre en descendant. Quand $f(x) = x$ a plusieurs solutions, c'est l'intervalle qui contient tous les termes qui désigne la bonne.

Exercice 4 4 pts

Des termes qui fondent, une somme qui reste finie

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3}.$$

1. 0,5 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

INDICE

Dans l'hérédité, étudie le signe du numérateur et du dénominateur de u_{n+1}.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 1 > 0$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n + 3 > 3 > 0$: u_{n+1} existe, et c'est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

2. 0,5 pts

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}\, u_n$. En déduire que (u_n) est strictement décroissante.

INDICE

Compare les dénominateurs des deux membres. N'oublie pas le signe de u_n.

CORRIGÉ

Majoration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n > 0$, donc $u_n + 3 \geq 3 > 0$ et $\frac{1}{u_n + 3} \leq \frac{1}{3}$. En multipliant par $u_n > 0$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 3} \leq \frac{u_n}{3}.$$

Monotonie. Comme $u_n > 0$, $\frac{u_n}{3} < u_n$. Donc $u_{n+1} < u_n$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{3}\, u_n$, et la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. 0,75 pts

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. En déduire $\lim u_n$.

INDICE

Pour l'hérédité, pars de la question 2. Pour la limite, quel théorème utilise un encadrement ?

CORRIGÉ

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Q(n)$: « $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ».

Initialisation. $u_0 = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$: $Q(0)$ est vraie.

Hérédité. On fixe un entier n tel que $Q(n)$ soit vraie. Avec les questions 1 et 2, puis $Q(n)$:

$$\begin{aligned} 0 < u_{n+1} &\leq \frac{1}{3}\, u_n \\ &\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie. Par récurrence, $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Limite. $0 < \frac{1}{3} < 1$, donc $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. La suite (u_n) est encadrée par la suite nulle et par $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, qui tendent vers 0. D'après le théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$, et $\lim u_n = 0$.

4. 1,25 pts

On pose $w_n = \dfrac{1}{u_n}$ et $t_n = w_n + \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n + 1$, puis que (t_n) est géométrique. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2}{3^{n+1} - 1}.$$

INDICE

Pour w_{n+1}, renverse la relation de récurrence. Si tu bloques pour (t_n) : exprime t_{n+1} en fonction de w_n, puis cherche à faire apparaître t_n.

CORRIGÉ

La relation pour (w_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc w_n existe. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 3}{u_n} \\ &= 1 + \frac{3}{u_n} = 3w_n + 1. \end{aligned}$$

La suite (t_n). Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= w_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= 3w_n + \frac{3}{2} \\ &= 3\left(w_n + \frac{1}{2}\right) = 3t_n. \end{aligned}$$

(t_n) est géométrique de raison 3, de premier terme $t_0 = w_0 + \dfrac{1}{2} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Retour à u_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{3}{2} \times 3^n = \dfrac{3^{n+1}}{2}$, donc $w_n = t_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ et :

$$u_n = \frac{1}{w_n} = \frac{2}{3^{n+1} - 1}.$$

Contrôle. $u_1 = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{2}{9-1} = \dfrac{1}{4}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 3w_n + 1$; (t_n) est géométrique de raison 3 ; et $u_n = \dfrac{2}{3^{n+1} - 1}$.

5. 1 pts

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n < \dfrac{3}{2}$, puis que (S_n) converge. Que peut-on dire de sa limite ?

INDICE

Utilise la majoration de la question 3 pour chaque terme de la somme. Si tu bloques : additionne ces majorations, puis reconnais une somme géométrique. Pour la convergence, étudie le signe de $S_{n+1} - S_n$.

CORRIGÉ

Majoration. D'après la question 3, $u_k \leq \left(\frac{1}{3}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En additionnant ces inégalités pour k allant de 0 à n :

$$\begin{aligned} S_n &\leq 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\ &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$: (S_n) est croissante.

Convergence. (S_n) est croissante et majorée par $\dfrac{3}{2}$. Une suite croissante et majorée converge : (S_n) converge vers un réel σ.

La limite. Par passage à la limite dans $S_n < \dfrac{3}{2}$, on obtient seulement $\sigma \leq \dfrac{3}{2}$: l'inégalité stricte devient **large**. Comme (S_n) est croissante, on a aussi $\sigma \geq S_1 = \dfrac{5}{4}$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n < \dfrac{3}{2}$; la suite (S_n) converge vers un réel σ tel que $\dfrac{5}{4} \leq \sigma \leq \dfrac{3}{2}$.

À retenir. Le critère des suites monotones donne l'existence de σ, pas sa valeur.

Exercice 5 4 pts

Un point fixe double et une convergence lente

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=4-\dfrac{4}{x}$, et (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. 0,5 pts

Étudier le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$. Vérifier que, pour tout $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{(x-2)^2}{x}$.

INDICE

Pour les variations, dérive f. Pour l'égalité, mets $f(x)-x$ sur un seul dénominateur, puis observe le numérateur.

CORRIGÉ

Variations. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{4}{x^2}>0$: f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

L'égalité. Soit $x>0$:

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{4x-4-x^2}{x} \\ &= -\frac{x^2-4x+4}{x} \\ &= -\frac{(x-2)^2}{x}. \end{aligned}$$

Conséquence. Pour tout $x>0$, $f(x)-x\leq 0$, avec égalité seulement en $x=2$: 2 est l'unique point fixe de f, et la courbe de f est sous la droite d'équation $y=x$.

Conclusion. f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x>0$, $f(x)-x=-\dfrac{(x-2)^2}{x}$.

2. 0,75 pts

Vérifier que $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2(u_n - 2)}{u_n}$ lorsque $u_n > 0$, puis montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer enfin que (u_n) est décroissante.

INDICE

Dans l'hérédité, l'égalité proposée donne le signe de $u_{n+1} - 2$. Pour la monotonie, pense à la question 1.

CORRIGÉ

L'égalité. Soit n tel que $u_n > 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= 2 - \frac{4}{u_n} \\ &= \frac{2u_n - 4}{u_n} \\ &= \frac{2(u_n - 2)}{u_n}. \end{aligned}$$

Récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 2$ ».

- **Initialisation.** $u_0 = 3 > 2$: $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** On fixe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie. Alors $u_n > 0$, donc u_{n+1} existe, et $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2(u_n - 2)}{u_n} > 0$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= -\frac{(u_n - 2)^2}{u_n}. \end{aligned}$$

Comme $u_n > 2$, ce nombre est strictement négatif.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$, et la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

3. 0,75 pts

En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite, en citant les hypothèses utilisées.

INDICE

Nomme d'abord le critère de convergence. Pour la valeur, cherche un intervalle fermé, stable par f, qui contient tous les termes.

CORRIGÉ

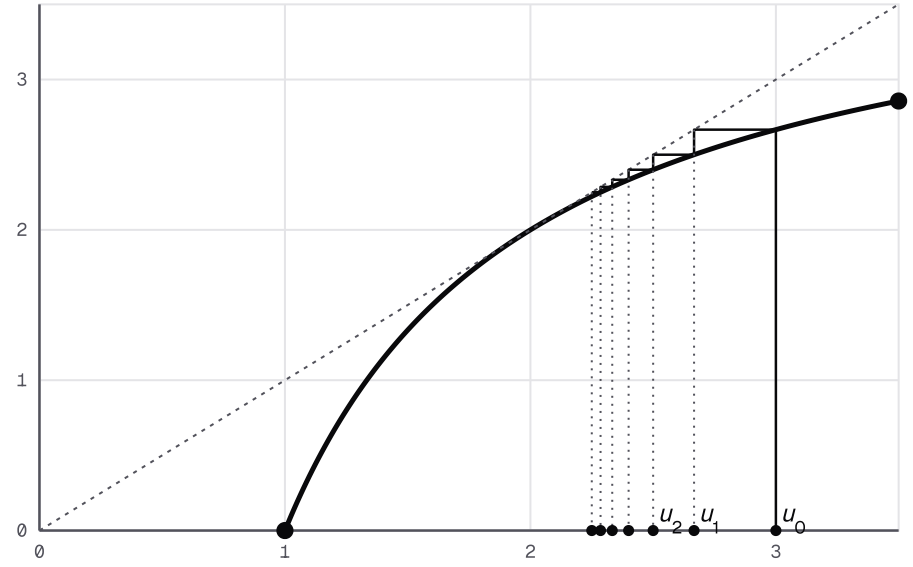
Convergence. (u_n) est décroissante et minorée par 2. Une suite décroissante et minorée converge : (u_n) converge vers un réel ℓ.

Hypothèses de la propriété du point fixe, sur $I = [2, 3]$; cette propriété suppose la suite convergente, ce que l'on vient d'établir :

- f est continue sur I : fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur I ;
- I est un intervalle fermé ;
- f est croissante, $f(2) = 2$ et $f(3) = \dfrac{8}{3}$, donc $f(I) = \left[2, \dfrac{8}{3}\right] \subset I$;
- $u_0 = 3 \in I$;
- (u_n) converge.

Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$, soit $-\dfrac{(\ell - 2)^2}{\ell} = 0$: $\ell = 2$.

Conclusion. La suite (u_n) converge et $\lim u_n = 2$.



Escalier de (u_n) depuis u_0 = 3 : la courbe touche la droite y = x en 2, et les marches rétrécissent très lentement.

4. 0,75 pts

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$. Montrer que (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

INDICE

Exprime v_{n+1} à l'aide de la question 2. Si tu bloques : au numérateur, écris $u_n = (u_n - 2) + 2$.

CORRIGÉ

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 2 > 0$, donc v_n existe. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 2} \\ &= \frac{u_n}{2(u_n - 2)} \\ &= \frac{(u_n - 2) + 2}{2(u_n - 2)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 2} \\ &= v_n + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion. (v_n) est **arithmétique de raison** $\dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3 - 2} = 1$.

5. 0,75 pts

Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. Retrouver ainsi la limite et le sens de variation de (u_n).

INDICE

Utilise le terme général d'une suite arithmétique, puis reviens à u_n par la définition de v_n.

CORRIGÉ

Expressions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n+2}{2}$. Comme $u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$:

$$\begin{aligned} u_n &= 2 + \frac{2}{n+2} \\ &= \frac{2n+6}{n+2}. \end{aligned}$$

Contrôle. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$ et $\dfrac{2+6}{1+2} = \dfrac{8}{3}$.

Limite et monotonie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = g(n)$, où g est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 2 + \dfrac{2}{x+2}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x+2}$ est strictement décroissante sur cet intervalle, donc g aussi, et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n+2}{2}$ et $u_n = \dfrac{2n+6}{n+2}$. On retrouve que (u_n) est décroissante et que $\lim u_n = 2$.

6. `0,5 pts`

Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n - 2 \leq 10^{-2}$. Commenter.

INDICE

Utilise l'expression de u_n obtenue à la question 5, puis résous une inéquation en n.

CORRIGÉ

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 5, $u_n - 2 = \dfrac{2}{n+2}$, et $n+2 > 0$:

$$\begin{aligned} & u_n - 2 \leq 10^{-2} \\ \iff & \frac{2}{n+2} \leq \frac{1}{100} \\ \iff & n+2 \geq 200 \\ \iff & n \geq 198. \end{aligned}$$

Conclusion. Le plus petit entier n tel que $u_n - 2 \leq 10^{-2}$ est $n = 198$.

Commentaire. La convergence est très lente : l'écart diminue comme $\dfrac{2}{n+2}$, et non comme une puissance q^n avec $|q| < 1$.

Pour comprendre, pas pour l'examen. Ici, le point fixe 2 est une racine **double** de $f(x) - x$: la courbe est tangente à la droite $y = x$ en ce point, et chaque étape rapproche à peine les termes de la limite.